

Вопросы экзамена по алгебре

Группы 151, 153 (лектор А. Ю. Лузгарев)

Осенний семестр, 2012

I. Вопросы коллоквиума

Глава 1. Наивная теория множеств

1. Множества, подмножества, основные операции над множествами.
2. Отображения: образ, прообраз, инъекция, сюръекция, биекция.
3. Композиция отображений, ее ассоциативность.
4. Бинарные отношения и отношения эквивалентности.
5. Теорема о разбиении на классы эквивалентности. Фактор-множество.
6. Метод математической индукции. Бинарные операции.

Глава 2. Элементарная теория чисел

7. Делимость: определения и простейшие свойства. Ассоциированность.
8. Теорема о делении с остатком.
9. Наибольший общий делитель; его существование и единственность. Линейное представление НОД.
10. Алгоритм Эвклида.
11. Свойства НОД. Взаимная простота, свойства взаимно простых чисел.
12. Линейные диофантовы уравнения. Полное описание множества решений уравнения с двумя неизвестными.
13. НОД нескольких чисел и критерий разрешимости линейного диофантова уравнения с несколькими неизвестными.
14. Простые числа, их свойства.
15. Основная теорема арифметики.
16. Каноническое разложение. Приложения: НОД, число делителей.
17. Сравнения по модулю. Свойства.
18. Китайская теорема об остатках.
19. Классы вычетов, действия над ними. Кольцо классов вычетов.
20. Критерий обратимости элемента кольца классов вычетов. Поле классов вычетов по простому модулю.
21. Теорема Вильсона.
22. Функция Эйлера. Переформулировка китайской теоремы об остатках в терминах колец классов вычетов.
23. Мультипликативность функции Эйлера. Формула для функции Эйлера.
24. Теорема Эйлера и малая теорема Ферма.
25. Алгоритм шифрования RSA.

II. Вопросы основного экзамена

Глава 3. Комплексные числа

26. Комплексные числа: определение, алгебраическая форма записи.
27. Комплексное сопряжение и модуль. Деление комплексных чисел.
28. Неравенство треугольника. Тригонометрическая форма записи комплексного числа.
29. Перемножение комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.
30. Корни n -ой степени из комплексного числа. Свойства корней из единицы.
31. Первообразные корни из единицы, их количество.
32. Экспоненциальная форма записи комплексного числа и логарифм.

Глава 4. Кольцо многочленов

33. Кольцо многочленов над кольцом.
34. Области целостности. Теорема о степени произведения многочленов над областью целостности и ее следствия.
35. Делимость в кольце многочленов. Теорема о делении с остатком.
36. Многочлен как функция. Теорема Безу.
37. Выделение линейных множителей и число различных корней многочлена над полем. Формальное и функциональное равенство многочленов.
38. Алгебраическая замкнутость. Разложение многочленов над полями комплексных и вещественных чисел.
39. Кратные корни. Определение и свойства производной.
40. Характеристика поля. Связь между корнями многочлена и его производной над полем характеристики 0.
41. Интерполяционная задача, единственность ее решения. Интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона.
42. Наибольший общий делитель многочленов: существование и линейной представление.
43. Алгоритм Эвклида для многочленов. Оценка на степень коэффициентов в линейном представлении НОД.
44. Неприводимые многочлены. Основная теорема арифметики в кольце многочленов.
45. Конструкция поля частных области целостности: эквивалентность дробей, введение операций и проверка аксиом поля.
46. Поле рациональных функций. Правильные дроби, их свойства. Выделение многочлена из дроби.
47. Простейшие дроби: две леммы о разложении знаменателя.
48. Теорема о представлении правильной дроби в виде суммы простейших.
49. Простейшие дроби над полями комплексных и вещественных чисел. Нахождение коэффициентов в случае простых корней.

Глава 5. Вычислительная линейная алгебра

50. Системы линейных уравнений и матрицы. Элементарные преобразования и связь с множеством решений.
51. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.