

Вопросы коллоквиума по алгебре

Группы 151, 153 (лектор А. Ю. Лузгарев)

Весна 2015

1. Группа перестановок. Табличная запись перестановки.
2. Разложение перестановки в произведение [элементарных] транспозиций.
3. Число инверсий и знак перестановки. Изменение знака при домножении на транспозицию.
4. Знак как число транспозиций в разложении. Мультипликативность знака.
5. Определитель: знакопеременная формула, определители небольших матриц, поведение при транспонировании.
6. Линейность и кососимметричность определителя.
7. Поведение определителя при элементарных преобразованиях. Определитель блочной верхнетреугольной матрицы.
8. Определители единичной матрицы, матрицы с нулевой строкой, окаймленной единичной матрицы. Мультипликативность определителя.
9. Разложение определителя по строке. Соотношения ортогональности.
10. Присоединенная матрица. Критерий обратимости.
11. Формулы Крамера. Свойства решений систем линейных уравнений.
12. Определение векторного пространства, простейшие свойства, примеры.
13. Подпространства: определение и примеры. Пересечение и сумма подпространств.
14. Прямая сумма подпространств. Критерии разложения пространства в прямую сумму подпространств.
15. Системы образующих и линейно независимые системы. Примеры.
16. Лемма о линейной зависимости. Следствие о добавлении вектора к линейно независимой системе.
17. Количество элементов в линейно независимой и порождающей системах.
18. Конечномерность подпространства конечномерного пространства.
19. Базис, определение и эквивалентная переформулировка. Любая система образующих содержит базис.
20. Любая линейно независимая система содержится в базисе. Дополнение пространства до прямой суммы.
21. Равномощность всех базисов. Размерность подпространства.
22. Теорема Грассмана о размерности суммы подпространств.
23. Если длина порождающей системы равна размерности, то это базис; то же для линейно независимой системы. Размерность прямой суммы подпространств. Критерий разложения в прямую сумму, использующий размерность.