

Программа экзамена по алгебре

Группы 151, 153 (лектор А. Ю. Лузгарев)

Весна 2015

1. Линейные отображения: определения и примеры.
2. Универсальное свойство базиса.
3. Операции над линейными отображениями.
4. Ядро отображения и инъективность.
5. Образ отображения. Размерности ядра и образа. Следствия.
6. Матрица линейного отображения. Сопоставление оператору его матрицы линейно.
7. Матрица композиции отображений.
8. Координаты вектора. Сопоставление вектору его координат линейно. Действие оператора на вектор в координатах.
9. Обратимость и биективность.
10. Изоморфность и равенство размерностей. Следствие: любое пространство изоморфно пространству столбцов.
11. Изоморфизм между пространством линейных отображений и матрицами.
12. Биективность, инъективность, сюръективность оператора. Кольцо операторов.
13. Ранги: строчный, столбцовый, тензорный. Сохранение тензорного ранга при элементарных преобразованиях.
14. Совпадение трех понятий ранга. Ранг окаймленной единичной матрицы. Ранг обратной матрицы. Теорема Кронекера–Капелли.
15. Фактор-пространство.
16. Теорема о гомоморфизме.
17. Относительный базис, равносильные определения. Размерность фактор-пространства.
18. Матрица перехода, свойства.
19. Преобразование координат вектора при замене базиса.
20. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса. Каноническая форма матрицы линейного отображения.
21. Размерность пространства решений однородной линейной системы. Существование нетривиальных решений. Теорема Кронекера–Капелли.
22. Инвариантные подпространства. Собственные числа и векторы, равносильные определения.
23. Линейная независимость собственных векторов. Следствие: количество различных собственных чисел.
24. Ограничение и индуцированный оператор на фактор-пространстве.
25. Подстановка оператора в многочлен. Существование собственного числа над алгебраически замкнутым полем.
26. Критерий верхнетреугольности матрица оператора. Приведение любого оператора над замкнутым полем к верхнетреугольному виду.
27. Обратимость верхнетреугольной матрицы.

28. Собственные числа верхнетреугольной матрицы. Сумма собственных подпространств прямая.
29. Критерий диагонализуемости оператора.
30. Цепочка ядер степеней оператора. Разложение пространства в прямую сумму ядра и образа большой степени оператора.
31. Корневые подпространства. Линейная независимость корневых векторов.
32. Инвариантность ядра и образа многочлена от оператора. Разложение пространства в прямую сумму корневых.
33. Характеристический многочлен. Теорема Гамильтона–Кэли.
34. Минимальный многочлен: существование, единственность, корни. Делимость характеристического многочлена на минимальный.
35. Жорданов базис для нильпотентного оператора.
36. Теорема о жордановой форме.
37. Комплексификация вещественного пространства. Базис и размерность комплексификации.
38. Комплексификация оператора, его матрица. Существование инвариантного подпространства небольшой размерности.
39. Минимальный многочлен и собственные числа комплексификации.
40. Комплексификация и сопряжение.
41. Невещественные собственные числа комплексификации: разбиение на пары, кратность сопряженных собственных чисел.
42. Характеристический многочлен вещественного оператора, его степень и корни. Теорема Гамильтона–Кэли.
43. Теорема о вещественной жордановой форме (формулировка и план доказательства).