07.10.2013

И.А. Панин

A – аб. группа

$\downarrow$

BA – симпл-мн-во: $\pi_1(|BA|) = A$, $\pi_i(|BA|) = 0$, $i>0$

связное

даже симпл.аб.группа

$$\begin{array}{c} A\times A\times A \\ \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \\ A\times A \\ \downarrow\downarrow\downarrow \\ A \\ \downarrow\downarrow \\ 0 \end{array}$$

гомоморфизмы аб. групп

BA симпл.

$$\begin{array}{c} B(A\times A\times A) \\ \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \\ B(A\times A) \\ \downarrow\downarrow\downarrow \\ B(A) \\ \downarrow\downarrow \\ B(0) \end{array}$$

$B(BA)$ бисимпл.

$$\begin{array}{c} BA\times BA\times BA \\ \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \\ BA\times BA \\ \downarrow\downarrow\downarrow \\ BA \\ \downarrow\downarrow \\ B(0) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\varphi} & A \\ & \downarrow & \\ BA' & \xrightarrow{B\varphi} & BA \end{array}$$

гомоморфизм симпл.аб.групп

$B(A_1\times A_2) = BA_1\times BA_2$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Бисимплициальное мн-во = функтор $\Delta^{op}\times\Delta^{op}\to Sets$

Трисимплициальное мн-во = функтор $\Delta^{op}\times\Delta^{op}\times\Delta^{op}\to Sets$

$$\begin{array}{ccc} \Delta\times\Delta & \xrightarrow{X_{\cdot\cdot}} & Sets \\ \uparrow & \nearrow_{\Delta(X_{\cdot\cdot})} & \\ \Delta & & \end{array}$$

$(\Delta(X_{\cdot\cdot}))_n = X_{nn}$

Опр. $|X_{\cdot\cdot}| := |\Delta(X_{\cdot\cdot})|$

$\boxed{\text{Утв.}}$ $|BBA| = K(A,2)$, $|BBBA| = K(A,3)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] & \pi_n(A) \arrow[d] \\ EA \arrow[d] & \pi_n(EA)=0 \arrow[d] \\ BA & \pi_n(BA) \end{tikzcd}$$

EA стяг. $\longrightarrow$ $\pi_n(EA)=0$ $\longrightarrow$ $\pi_1(BA) \xrightarrow[\sim]{\partial} \pi_0(A)$

$\pi_2(BA) \xrightarrow[\sim]{\partial} \pi_1(A)$

$$\begin{tikzcd} BA \arrow[d] \\ E(BA) \arrow[d] \\ B(BA) \end{tikzcd} \qquad E(BA) = \Delta\left(\begin{tikzcd} BA\times BA\times BA \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \\ BA\times BA \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ BA \end{tikzcd}\right) \text{ – стягиваемо}$$

Пусть $X_\bullet$ — произвольное связное симпл. мн-во.

Тогда
$$\Delta\left(\begin{tikzcd} X_\bullet\times X_\bullet\times X_\bullet \arrow[d, shift left=2, "p_{23}"] \arrow[d, "p_{13}"] \arrow[d, shift right=2, "p_{12}"'] \\ X_\bullet\times X_\bullet \arrow[d, shift left, "p_2"] \arrow[d, shift right, "p_1"'] \\ X_\bullet \end{tikzcd}\right)$$
стягиваемо

фактор по диаг. действию BA

$$\begin{tikzcd} BA\times BA\times BA \arrow[r] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & BA\times BA \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \\ BA\times BA \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & BA \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ BA \arrow[r] & B(0) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {|BA|} \arrow[d] \\ {|E(BA)|} \arrow[d] \\ {|B(BA)|} \end{tikzcd}$$

расслоение Серра

$\rightsquigarrow$ есть длинная точная посл-сть групп

$\rightsquigarrow \pi_2(|BBA|) = \pi_1(|BA|) = A, \quad \pi_1(|BBA|) = 0$

Аналогично $|BBA| \longrightarrow |EBBA| \longrightarrow |BBBA|$ — рассл. Серра

$X_\bullet \downarrow f$, $Y_\bullet$ — <u>расслоение</u> симпл. мн-в, если для любой диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r] \arrow[d, hook] & X_\bullet \arrow[d, "f"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y_\bullet \end{tikzcd} \quad \exists\, l$$

если $X_\bullet \longrightarrow \Delta^0$ — расслоение, то $X_\bullet$ называется <u>фибрантным</u> (= <u>мн-во Кана</u>). Все симпл. группы — мн-ва Кана

$$\begin{array}{cccc} A & BA & BBA & BBBA \\ K(A,0) & K(A,1) & K(A,2) & K(A,3) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} \Sigma^1_s BA \arrow[r] & BBA \\ S^1_A \wedge BA \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\underbrace{S^1_s}_{\substack{\parallel \\ \Delta^1/\partial(\Delta^1)}} \wedge A$

$(X, x) \wedge S^0 = (X, x)$

$((X, x) \vee (Y, y)) \wedge S^0 = (X, x) \vee (Y, y)$

A - дискретное симпл. мн-во: $A = \bigvee_{a \neq 0} S^0$

$\boxed{\text{Утв.}}$ $S^1_s \wedge (\bigvee S^0) = \bigvee_{a \neq 0} S^1_s$ (по дистрибутивности)

Хотим отобразить это в BA:

$$\begin{tikzcd} \coprod_{a \neq 0} \Delta^1 \arrow[d] \\ \bigvee_{a \neq 0} S^1_s \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \left(\coprod_{a \neq 0} \Delta^1\right)_1 = A - 0 \arrow[d, hook] \\ (BA)_1 = A \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} \bigvee_{a \neq 0} S^1_s \arrow[d] \\ BA \end{tikzcd}$$

Итог: набор $(A, BA, BBA, \ldots)$ вместе со стрелками $S^1_s \wedge A \to BA, \ldots, S^1_s \wedge B^n A \longrightarrow B^{n+1} A$ — спектр $H(A)$ Эйленберга–Маклейна

Более того, $\Omega(B^{n+1}A) \leftarrow B^n A$ — слабая эквивалентность, то есть, это Ω-спектр.

Напомним, что $Map(Y,X)$ (в топологии) можно наделить компактно открытой топологией, и $Map(Y, \underline{Map}(Z,X)) = Map(Y \times Z, X)$

У нас: $(\underline{Hom}(Y_\bullet, X_\bullet))_n = Hom(\Delta^n, \underline{Hom}(Y_\bullet, X_\bullet))$
$$\begin{tikzcd} & \\ & \arrow[u, phantom, "\parallel"] \end{tikzcd}$$
$$Hom(\Delta^n \times Y_\bullet, X_\bullet)$$

кон. мн-ва

$$\begin{tikzcd} FSets \arrow[r] & Sets \\ Y \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & A^Y = \bigoplus_{y \in Y} A \arrow[d, dashed] \\ X \arrow[r, mapsto] & A^X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A^{\varphi^{-1}(x)} \arrow[d, "+"'] \\ A[x] \end{tikzcd}$$

Γ — категория: $Ob(\Gamma) =$ кон. мн-ва;

$Mor(S,T) = Map(S, \mathcal{P}(T))$

$\qquad \parallel$

$\{\theta : S \to \mathcal{P}(T) \mid \theta(s_1) \cap \theta(s_2) = \varnothing$ при $s_1 \neq s_2\}$

$\boxed{\text{Замечание}}$ $FSets_\bullet^{op} \simeq \Gamma$ — экв-сть категорий (упр.!)

$$\begin{tikzcd} (X,x) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & X - x & (f|_{X-x})^{-1}(y') \arrow[r, hook] & \mathcal{P}(X-x) \\ (Y,y) \arrow[r, mapsto] & Y - y \arrow[u, dashed] & y' \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Построим теперь по A функтор $FSets_\bullet = \Gamma^{op} \xrightarrow{F_A} Sets$

$$\begin{tikzcd} (X,x) \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & A^{X-x} \arrow[d] \\ (Y,y) \arrow[r, mapsto] & A^{Y-y} \end{tikzcd}$$

Кроме того, $\Delta^{op} \hookrightarrow \Gamma^{op}$:

$$\begin{tikzcd} \Delta \arrow[r, hook] & \Gamma \arrow[r, "\sim"] & FSets^{op} \\ {[m]} \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & \{1,\dots,m\} \ni i \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (\{0,\dots,m\}, 0) \\ {[n]} & \{1,\dots,n\} \quad \{j \in \{1,\dots,n\} \mid f(i-1) < j \leq f(i)\} & \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ <u>Γ-пространство</u> = функтор $A : \Gamma^{op} \longrightarrow SSets$ такой, что:

① $\Gamma([0])$ стягиваемо;

② $A([n]) \xrightarrow{P_n} A([1]) \times \cdots \times A([1])$ — слабая эквивалентность

где P_n задается такими отображениями:

$$[1] \xrightarrow{i_k} [n]$$
$$1 \longmapsto \{k\}$$

$$\begin{array}{ccc} A([2]) & \xrightarrow{\sim} & A([1]) \times A([1]) \\ \downarrow & & \\ A([1]) & & \end{array} \qquad \{1,2\} \leftarrow 1$$

$\rightsquigarrow$ $|A([1])| \times |A([1])| \longrightarrow |A([1])|$ в Ho

(По групповому объекту в Ho спектр не написать, а по Γ-пр-ву – можно)

$\underline{A}$ – аддитивна $\rightsquigarrow$ A — Γ-пр-во $\rightsquigarrow$ $(A, BA, BBA, \ldots)$ — спектр

$\pi_i(\ldots) = K_i(\underline{A}) = K_i^Q(\underline{A})$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть A — Γ-пр-во; определим BA

$$\begin{tikzcd} \Delta^{op} \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right] & \Gamma^{op} \arrow[r] & SSets \end{tikzcd}$$

симпл. пр-во:

$\cdots A[2] \rightrightarrows A[1] \rightrightarrows A[0]$ — его диагональ назовем BA

бисимпл. мн-во

$\boxed{\text{Факт}}$ BA — Γ-пр-во