

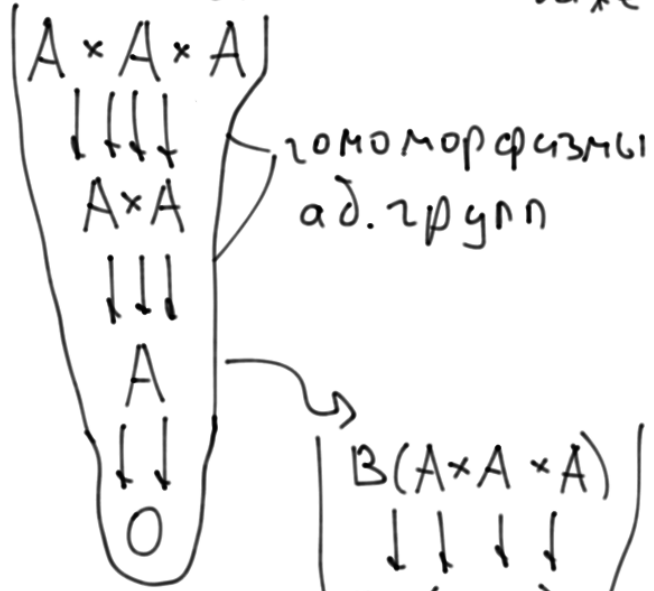
A - ад. группа



BA - симп-мн-во:  $\pi_i(BA) = A, \pi_i(BA) = 0, i > 0$

связное

даже симп.ад. группа



гомоморфизмы ад. групп

BA симп.



B(BA) Би симп.

$$A' \xrightarrow{\varphi} A$$



$$BA' \xrightarrow{B\varphi} BA$$

гомоморфизм симп.ад. групп

$$B(A_1 \times A_2) = BA_1 \times BA_2$$

$$BA \times BA \times BA$$

$$\downarrow \downarrow \downarrow$$

$$BA \times BA$$

$$\downarrow \downarrow$$

$$BA$$

$$\downarrow \downarrow$$

$$B(0)$$

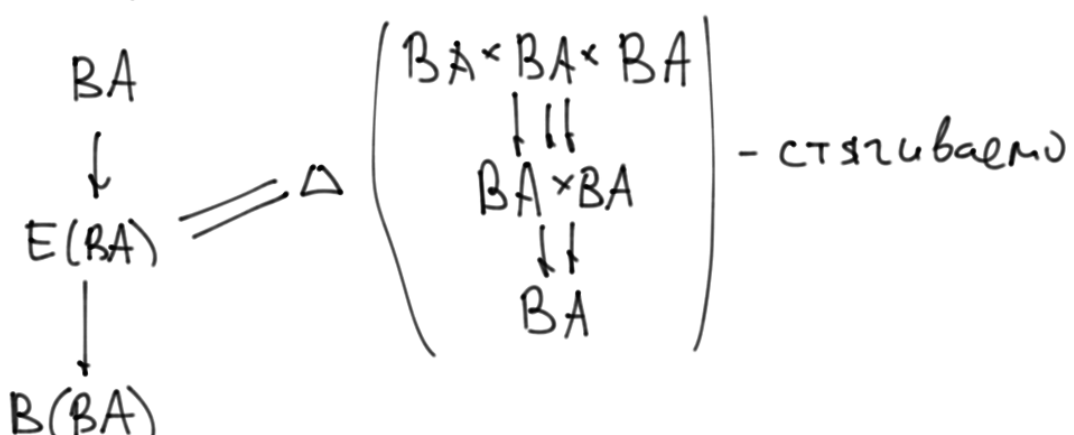
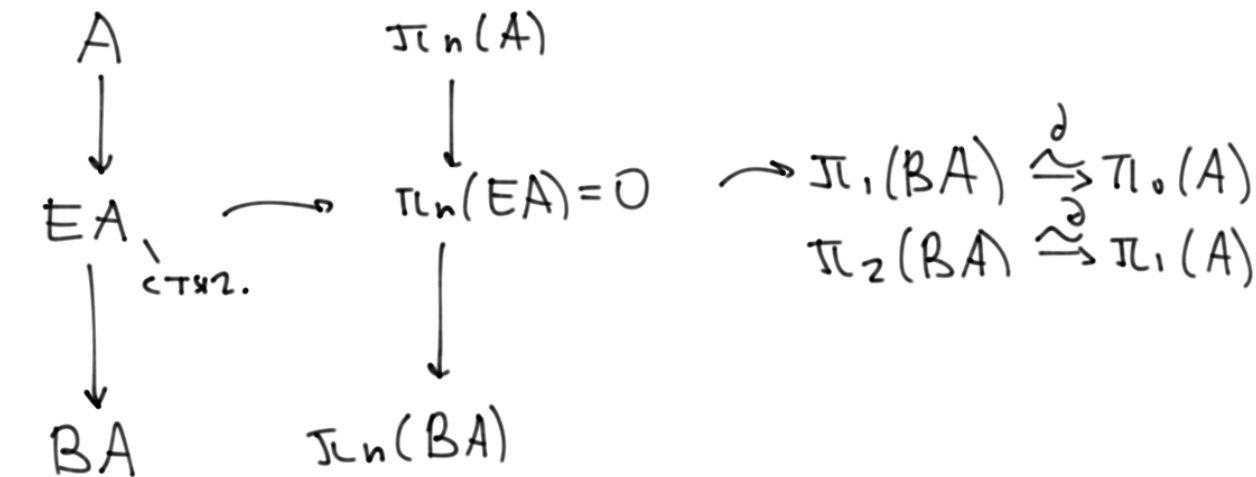
**Опр.** Бисимплициальное мн-во = функтор  $\Delta^{op} \times \Delta^{op} \rightarrow Sets$

Трисимплициальное мн-во = функтор  $\Delta^{op} \times \Delta^{op} \times \Delta^{op} \rightarrow Sets$

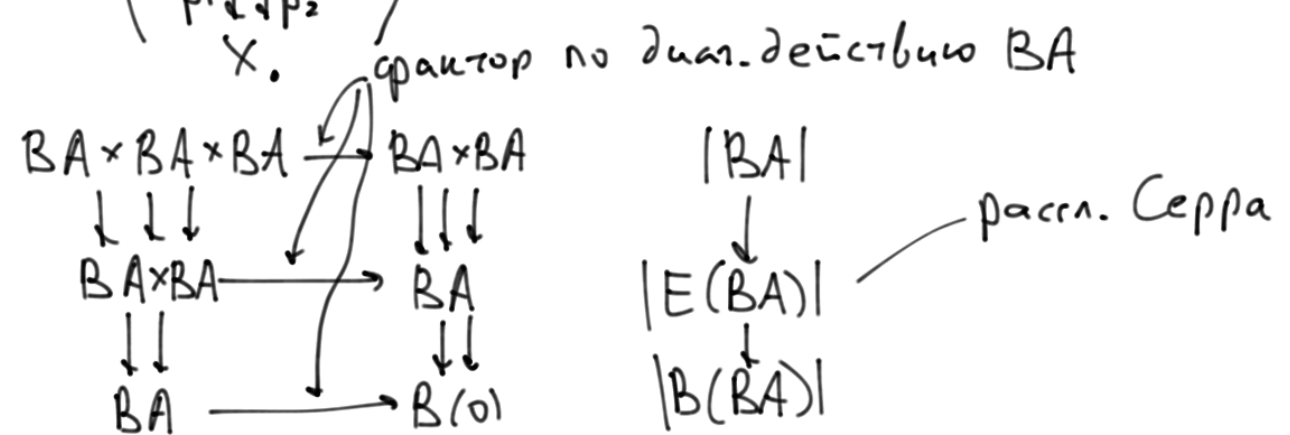
$$\begin{array}{ccc} \Delta \times \Delta & \xrightarrow{X_{..}} & Sets \\ \uparrow & \searrow \Delta(X_{..}) & \\ \Delta & & \end{array} \quad (\Delta(X_{..}))_n = X_{nn}$$

Опр.  $|X_{..}| := |\Delta(X_{..})|$

$\square \gamma + \beta. |BBA| = K(A, 2), |BBBA| = K(A, 3)$



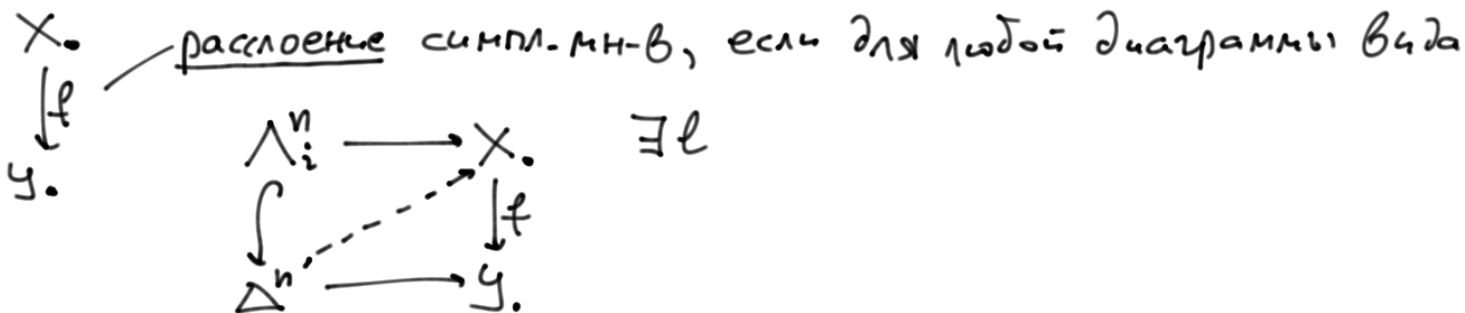
Пусть  $X_0$  — произвольное связанное симп. мн-во.  
Тогда  $\Delta$   $\left( \begin{array}{c} X_0 \times X_0 \times X_0 \\ \rho_{12} \downarrow \downarrow \downarrow \rho_{13} \\ X_0 \times X_0 \\ \rho_1 \downarrow \downarrow \rho_2 \\ X_0 \end{array} \right)$  стягиваемо



→ есть длинная точная послед-сть групп

$$\rightarrow \pi_2(|BVA|) = \pi_1(|BA|) = A, \quad \pi_1(|BVA|) = 0$$

Аналогично  $|BVA| \rightarrow |EVA| \rightarrow |BBVA|$  — рассл. Серра



если  $X_0 \rightarrow \Delta^0$  — расслоение, то  $X_0$  называется фридрантным (= мн-во Кана). Все симп. группы — мн-ва Кана

$A \quad BA \quad BBA \quad BBVA$

$K(A,0) \quad K(A,1) \quad K(A,2) \quad K(A,3)$

$$\Sigma'_s BA \longrightarrow BBA$$

$$S'_A \wedge BA \nearrow$$

$$S'_s \wedge A$$

$$(X, x) \wedge S^0 = (X, x)$$

$$((X, x) \vee (Y, y)) \wedge S^0 = (X, x) \vee (Y, y)$$

$$\Delta^1 / \partial(\Delta^1)$$

$A$  — дискретное симп. мн-во:  $A = \bigvee_{\alpha \neq 0} S^0$

$$\boxed{Y \vee \partial} \quad S'_s \wedge (\bigvee_{\alpha \neq 0} S^0) = \bigvee_{\alpha \neq 0} S'_s \quad (\text{по дистрибутивности})$$

Хотим отобразить это в  $BA$ :

$$\prod_{\alpha \neq 0} \Delta^1$$

$$(\prod_{\alpha \neq 0} \Delta^1)_1 = A - 0$$

$$\bigvee_{\alpha \neq 0} S'_s$$

$$\downarrow$$

$$\bigvee_{\alpha \neq 0} S'_s$$

$$\downarrow$$

$$(BA)_1 = A$$

$$\downarrow$$

$$BA$$

Итого: набор  $(A, BA, BBA, \dots)$  вместе со стрелками

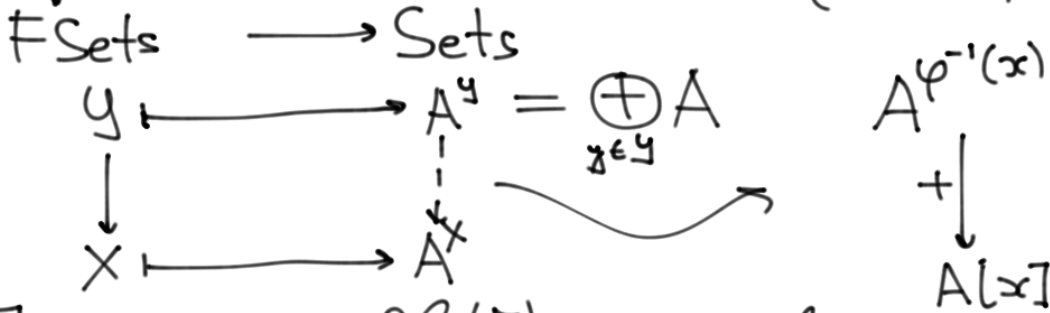
$$S'_s \wedge A \rightarrow BA, \dots, S'_s \wedge B^n A \rightarrow B^{n+1} A$$

— спектр  $H(A)$  Эilenберга — Майлента

Более того,  $\mathcal{L}(B^{n+1}A) \leftarrow B^n A$  — слабая эквивалентность, то есть, это  $\mathcal{L}$ -спектр.

Напомним, что  $\text{Map}(Y, X)$  можно наделить компактно открытой топологией, и  $\text{Map}(Y, \text{Map}(Z, X)) = \text{Map}(Y \times Z, X)$

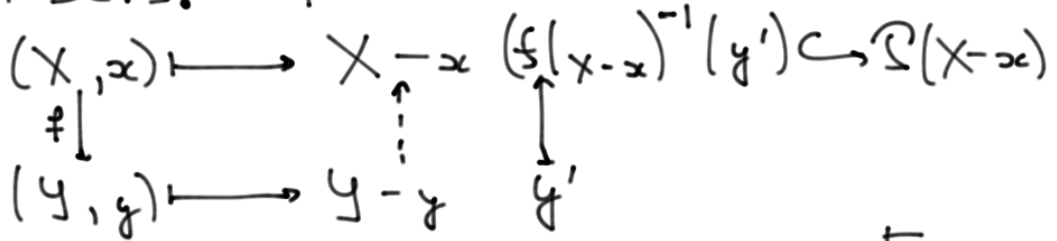
У нас:  $(\text{Hom}(Y_\bullet, X_\bullet))_n = \text{Hom}(\Delta^n, \text{Hom}(Y_\bullet, X_\bullet))$   
 $\text{Hom}(\Delta^n \times Y_\bullet, X_\bullet)$



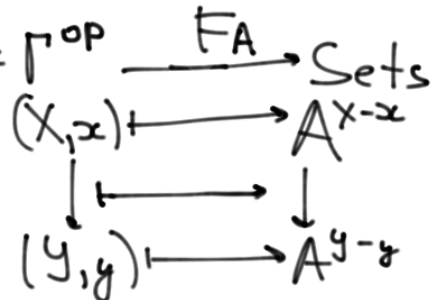
$\Gamma$ -категория:  $\mathcal{O}b(\Gamma) = \text{кон. мн-ва}$ ;  
 $\text{Mor}(S, T) \subseteq \text{Map}(S, \mathcal{P}(T))$

$$\{ \theta : S \rightarrow \mathcal{P}(T) \mid \theta(s_1) \cap \theta(s_2) = \emptyset \text{ при } s_1 \neq s_2 \}$$

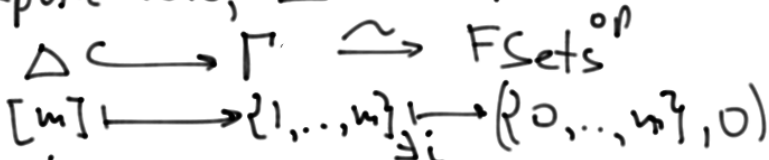
**Замечание**  $\text{FSets}^{\text{op}} \simeq \Gamma$  — экв-сть категорий (унр.!).



Построим теперь по  $A$  функтор  $\text{FSets}_\bullet = \Gamma^{\text{op}} \xrightarrow{FA} \text{Sets}$



Кроме того,  $\Delta^{\text{op}} \hookrightarrow \Gamma^{\text{op}}$ :



$$[n] \quad \{1, \dots, n\} \quad \{j \in \{1, \dots, n\} \mid \neq(i-1) < j \leq \neq(i)\}$$

**Опр.**  $\Gamma$ -пространство = функтор  $A: \Gamma^{op} \rightarrow \mathcal{S}Sets$  такой, что:

①  $\Gamma([0])$  стягиваемо;

②  $A([n]) \xrightarrow{P_n} A([1]) \times \dots \times A([1])$  — слабая эквивалентность  
 где  $P_n$  задается такими отображениями:

$$\begin{array}{ccc} [1] & \xrightarrow{i_k} & [n] \\ 1 & \longrightarrow & \{k\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A([2]) & \xrightarrow{\sim} & A([1]) \times A([1]) & & |A([1])| \times |A([1])| & \longrightarrow & |A([1])| \\ \uparrow \{1,2\} & & & \rightsquigarrow & & & \text{в } Ho \\ \downarrow & & & & & & \\ A([1]) & & & & & & \end{array}$$

(По групповому объекту в  $Ho$  спектр не написать, а по  $\Gamma$ -пр-во — можно)

$\underline{A}$  — аддитивна  $\rightsquigarrow A$  —  $\Gamma$ -пр-во  $\rightsquigarrow (A, BA, BBA, \dots)$  — спектр  
 $\pi_i(\dots) = K_i(\underline{A}) = K_i^Q(\underline{A})$

**Опр.** Пусть  $A$  —  $\Gamma$ -пр-во; определим  $BA$

$$\Delta^{op} \hookrightarrow \Gamma^{op} \longrightarrow \mathcal{S}Sets$$

↑  
 {симпл. пр-во:

$\cong A[2] \cong A[1] \cong A[0] \rightarrow$  его диагональ назовем  $BA$   
 ↓ {симпл. мн-во

**Факт**  $BA$  —  $\Gamma$ -пр-во