$\boxed{21.10.2013}$

И.А. Панин

Γ — категория:

$Ob(\Gamma) =$ кон. мн-ва,

$$Mor(X,Y) = \{ X \xrightarrow{\theta} \mathcal{P}(Y) \mid x_1 \neq x_2 \Rightarrow \theta(x_1) \cap \theta(x_2) = \varnothing \}$$

$$Mor(X,Y) \times Mor(Y,Z) \longrightarrow Mor(X,Z)$$

$$X \xrightarrow{\theta} \mathcal{P}(Y) \qquad Y \xrightarrow{\eta} \mathcal{P}(Z)$$

$$x \longmapsto \theta(x) \subset Y$$

$$x \longmapsto \bigcup_{y \in \theta(x)} \eta(y)$$

$$id_X : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

$$x \longmapsto \{x\}$$

FinSets. $Ob = \{(X,x)\}$, $Mor((X,x),(Y,y)) = \{ f : X \to Y \mid f(x) = y \}$

$\boxed{\text{Утв.}}$ FinSets. эквивалентна Γ^{op}

$$\begin{array}{ccccc}
(X,x) & \longmapsto & X \setminus \{x\} & \mathcal{P}(X \setminus \{x\}) & f^{-1}(y') \\
\downarrow f & & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
(Y,y) & \longmapsto & Y \setminus \{y\} & Y - \{y\} & \ni y'
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\{+\} \sqcup \underset{x}{\overset{\cup}{X}} = X_+ & \longleftarrow\!\!| & X & X & x' \neq x'' \\
 & & \downarrow g & \downarrow \theta_g & \Downarrow \\
\theta_g(x) \quad Y_+ & \longleftarrow\!\!| & Y & \mathcal{P}(Y) & \theta_g(x') \cap \theta_g(x'') = \varnothing
\end{array}$$

$$y \notin \bigcup \theta_g(x)$$

$\boxed{\text{Замечание}}$ A — аб. группа $\rightsquigarrow$ $\Gamma^{op} \xrightarrow{\underline{A}} \mathrm{Sets}$

$(n) = \{1, 2, \dots, n\} \in \Gamma$

$[n] = \{+, 1, \dots, n\} \in \mathrm{FinSets}.$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d] & X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\theta"] & A^X = \mathrm{Map}(X, A) \\ \theta(x) \subseteq & Y \arrow[r, mapsto] & A^Y = \mathrm{Map}(Y, A) \arrow[u, dashed] \\ & (a_y)_{y \in Y} \arrow[r, mapsto] & \left(\sum_{y \in \theta(x)} a_y\right)_{x \in X} \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Γ-пространство — это функтор $\Gamma^{op} \xrightarrow{A} \mathrm{SSets}$:

1. $A((0))$ стягиваемо (связно и $\pi_i(-) = 0$)
2. $\rho_n : A((n)) \longrightarrow A((1)) \times \dots \times A((1))$ — гомотоп. экв-сть

индуцировано $i_k : (1) \longrightarrow (n)$

$1 \longmapsto \{k\}$

$\boxed{\text{Пример}}$ A — аб. группа $\rightsquigarrow$ $A((n)) = A^n$, $A((1)) = A$,

$A((n)) \xrightarrow{i_k^*} A((1))$ $\rightsquigarrow$ $\rho_n : A^n \xrightarrow[\parallel]{} A \times \dots \times A$

$i_k^* = pr_k$

$(pr_1, \dots, pr_n) = id$

т.е. (2) — ослабление св-ва изоморфности

$\boxed{\text{Замечание}}$ $\forall X \in \Gamma$ X изоморфно (n), где $n = \#(X)$

$$\begin{tikzcd} A((2)) \arrow[r, "(i_1^*, i_2^*)"] \arrow[d, "m_2^*"] & A((1)) \times A((1)) \\ A((1)) & \end{tikzcd}$$

$A((1))$ — подлежащее пр-во A

$$\begin{tikzcd} ((2)) & \{1, 2\} \\ ((1)) \arrow[u, "m_2"] & 1 \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Пример}}$ A — аб. группа $\rightsquigarrow$ $A((2)) = A^2 \xrightarrow[m_2^*]{+ \, = } A = A((1))$

Следствие: если мы перейдем в гомотопическую категорию, то

$$\begin{tikzcd} A((2)) \arrow[r, "\sim"', "\text{в Ho}"'] \arrow[d] & A((1)) \times A((1)) \arrow[dl, "\text{"+"}"] \\ A((1)) & \end{tikzcd}$$

задает структуру аб. моноида

Далее:

изоморфизм в Ho

$$\begin{array}{ccc} A((1)) & \longleftarrow A((n)) \longrightarrow & A((1)) \times \dots \times A((1)) \\ (1) & \longrightarrow ((n)) & \\ 1 & \longmapsto \{1, \dots, n\} & \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ в Ho есть морфизм $A((1)) \times \dots \times A((1)) \xrightarrow{\text{"}+_n\text{"}} A((1))$

Для аб. группы A мы умеем строить симпл. мн-во BA:

① BA связно; ② $\pi_i(BA) = \begin{cases} A, & i = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$BA : \Delta^{op} \longrightarrow Ab$ — симпл. абелева группа

$\rightsquigarrow BBA : \Delta^{op} \times \Delta^{op} \longrightarrow Ab \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow B^n(A)$

$\uparrow$ диагональ

Δ^{op}

① $B^n A$ связно; ② $\pi_i(B^n A) = \begin{cases} A, & i = n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$A^\bullet$ — симпл. абелева группа $\rightsquigarrow BA^\bullet$ — симпл. аб. группа,

$\pi_{i-1}(BA^\bullet) = \pi_i(A^\bullet)$

т.е. $A((1))$ связно

<u>Цель:</u> по связному Γ-пространству построить пространство $BA((1))$ такое, что

a) $A((1)) \longrightarrow EA((1)) \longrightarrow BA((1))$ — рассл. Серра, $EA((1))$ — стяг.

a') $\pi_i(BA((1))) \xrightarrow{\sim} \pi_{i-1}(A((1)))$

Далее: желаем построить $BBA((1))$: $\pi_i(BBA((1))) \simeq \pi_{i-1}(BA((1)))$

$\rightsquigarrow \left(A(\langle 0\rangle),\ A(\langle 1\rangle),\ BA(\langle 1\rangle),\ B^2A(\langle 1\rangle),\ \dots\right)$ — спектр

$\Omega^1(X,x) := \underline{\mathrm{Map}}((S^1,1),(X,x))$ — пр-во петель

↖ в компактно открытой топологии

$$(a) \iff A(\langle 1\rangle) \xrightarrow{w.e.} \Omega^1(\underline{B(A(\langle 1\rangle))}) \xrightarrow{w.e.} \Omega^1(\Omega^1(BB(A(\langle 1\rangle))))$$

$$\Omega^1(B(A(\langle 1\rangle))) = \Omega^1(BB(A(\langle 1\rangle))), \qquad \Omega^1(\Omega^1(BB(A(\langle 1\rangle)))) = \Omega^2(B^2A(\langle 1\rangle))$$

$$\Omega^2(X,x) := \underline{\mathrm{Map}}((S^2,1),(X,x))$$

Конечный итог будет такой:

$$\boxed{\begin{array}{l}\Gamma\text{-пр-ва со}\\ \text{связным } A(\langle 1\rangle)\end{array}} \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{Спектры}\\ (X_0,X_1,\dots,X_n,\dots)=X\\ \sigma_i:\ S^1\wedge(X_i,x_i)\longrightarrow(X_{i+1},x_{i+1})\\ \text{с } \pi_0(X)=0\\ \qquad \pi_0(X) = \varinjlim \pi_n(X_n,x_n)\end{array}}$$

интересно

$\boxed{\text{Пример}}$ G — группа $\rightsquigarrow$ есть BG: нерв G как категории

$$\begin{array}{c}\dots\\ G\times G\times G\\ \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\\ G\times G\\ \downarrow\downarrow\downarrow\\ G\\ \downarrow\downarrow\\ *\end{array}$$

Например, $G = GL_n(R)$

$$A(\langle 1\rangle) = \coprod_{n_1} GL_{n_1}(R)$$

$$A(\langle 2\rangle) = \coprod_{n_1,n_2} GL_{n_1}(R)\times GL_{n_2}(R)$$

$\vdots$

$$A(\langle k\rangle) = \coprod_{n_1,\dots,n_k} GL_{n_1}(R)\times\dots\times GL_{n_k}(R)$$

$$\pi_i(B(A(\langle 1\rangle))) = K_i(R)$$

$$A(\langle 1\rangle)\times A(\langle 1\rangle) \longrightarrow A(\langle 2\rangle)$$

$$GL_{n_1}(R)\times GL_{n_2}(R) \longrightarrow GL_{n_1+n_2}(R)$$

$$
\begin{tikzcd}
x \in X \arrow[r, mapsto] \arrow[d] \arrow[d, shift left=4ex, "\theta"'] & \coprod\limits_{X \xrightarrow{f} \mathbb{N}} \prod\limits_x GL_{f(x)}(R) & (B_x) \\
\theta(x) \subseteq Y \arrow[r, mapsto] & \coprod\limits_{Y \xrightarrow{g} \mathbb{N}} \prod\limits_y GL_{g(y)}(R) \ni (A_y) \arrow[ru, mapsto] &
\end{tikzcd}
$$

$$B_x = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & A_y & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = \bigoplus_{y \in \theta(x)} A_y \qquad y \in \theta(x)$$

$\rightsquigarrow$ получили Γ-пр-во A_R

$BA_R((1)) =: \mathbb{K}(R)$ — пр-во К-теории кольца R

$K_i(R) := \pi_i(\mathbb{K}(R))$ при $i > 0$

<u>Конструкция</u>: A — Γ-пр-во: $A: \Gamma^{op} \longrightarrow Sets$

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma^{op} \arrow[r] & Sets \\
\Delta^{op} \arrow[u, "\text{ест.}"] \arrow[ru, dashed] &
\end{tikzcd}
$$

$\rightsquigarrow$ в частности, A — бисимпл. мн-во: $\Delta^{op} \times \Delta^{op} \longrightarrow Sets$

$$
\begin{tikzcd}
\Delta^{op} \times \Delta^{op} \arrow[r] & Sets \\
\Delta^{op} \arrow[u, "\text{диагональ}"] \arrow[ru, dashed] &
\end{tikzcd}
$$

$\rightsquigarrow \Delta^{op} \longrightarrow \Delta^{op} \times \Delta^{op} \longrightarrow Sets$ — симпл. мн-во $BA((1))$

т.е. $BA((1)): \left([n] \longmapsto A((n))_n\right)$