

Γ - категория:

$Ob(\Gamma) = \text{кон. мн-ва}$,

$$\text{Mor}(X, Y) = \{ X \xrightarrow{\theta} \mathcal{P}(Y) \mid x_1 \neq x_2 \Rightarrow \theta(x_1) \cap \theta(x_2) = \emptyset \}$$

$$\text{Mor}(X, Y) \times \text{Mor}(Y, Z) \longrightarrow \text{Mor}(X, Z)$$

$$X \xrightarrow{\theta} \mathcal{P}(Y) \quad Y \xrightarrow{\eta} \mathcal{P}(Z)$$

$$x \longmapsto \theta(x) \subset Y$$

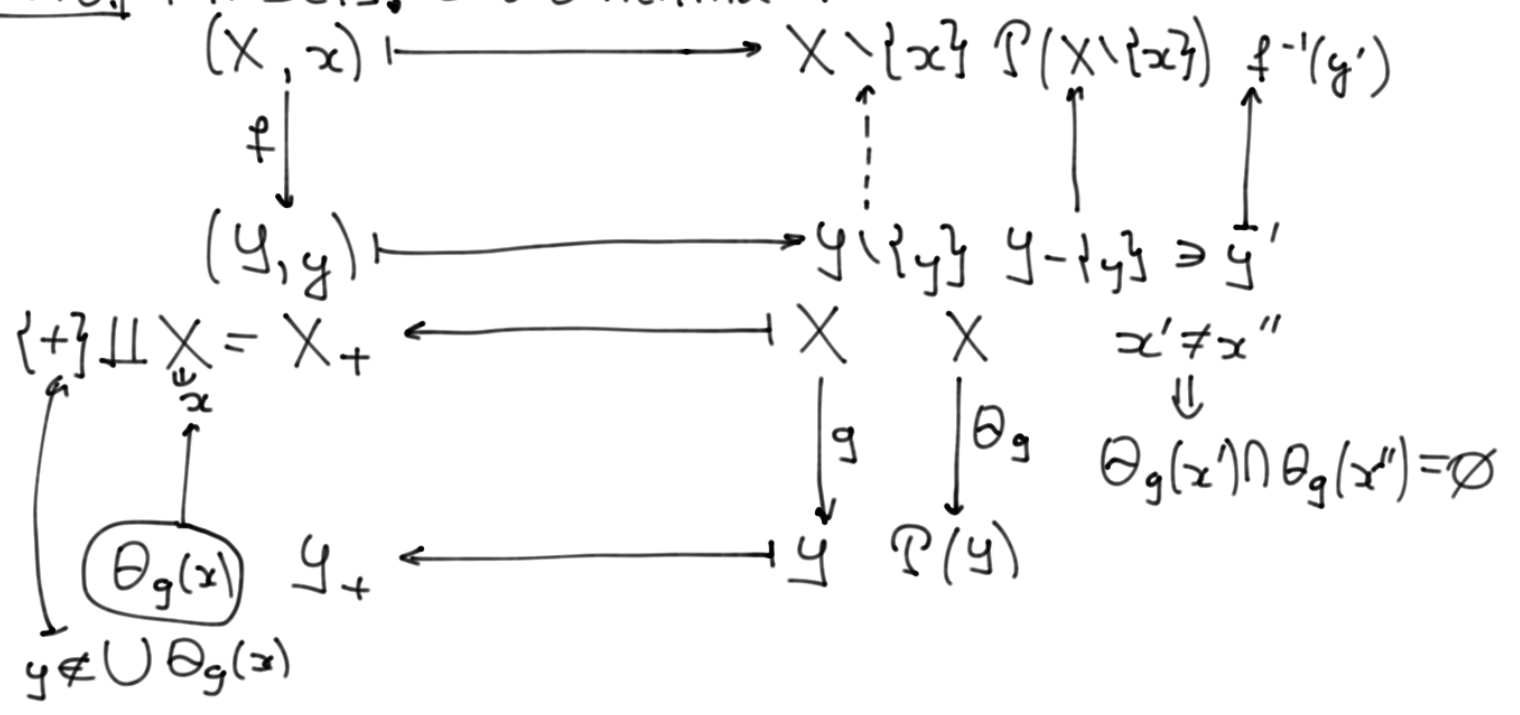
$$x \longmapsto \bigcup_{y \in \theta(x)} \eta(y)$$

$$\text{id}_X: X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

$$x \longmapsto \{x\}$$

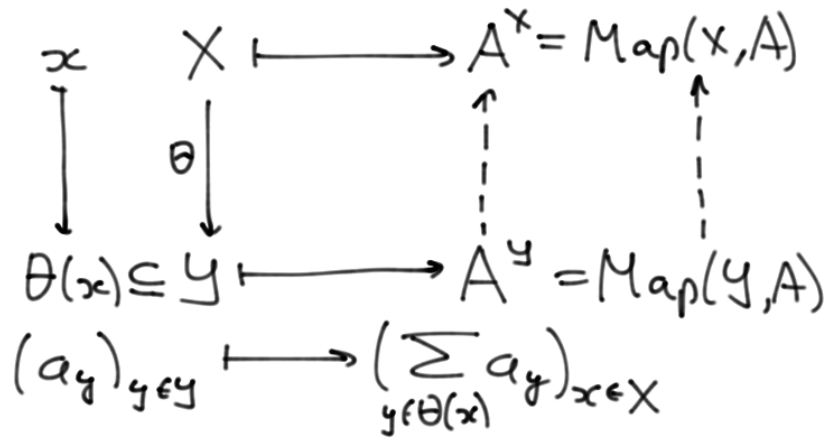
FinSets. $Ob = \{(X, x)\}$, $\text{Mor}((X, x), (Y, y)) = \{f: X \rightarrow Y \mid f(x) = y\}$

$\boxed{Y \text{ т.б.}}$ FinSets. эквивалентна Γ^{op}



Замечание A — ад. группа $\rightsquigarrow \Gamma\text{-op} \xrightarrow{A} \text{Sets}$

$(n) = \{1, 2, \dots, n\} \in \Gamma$
 $[n] = \{+, 1, \dots, n\} \in \text{FinSets}$



Опр. Γ -пространство — это функтор $\Gamma\text{-op} \xrightarrow{A} \text{Sets}$:

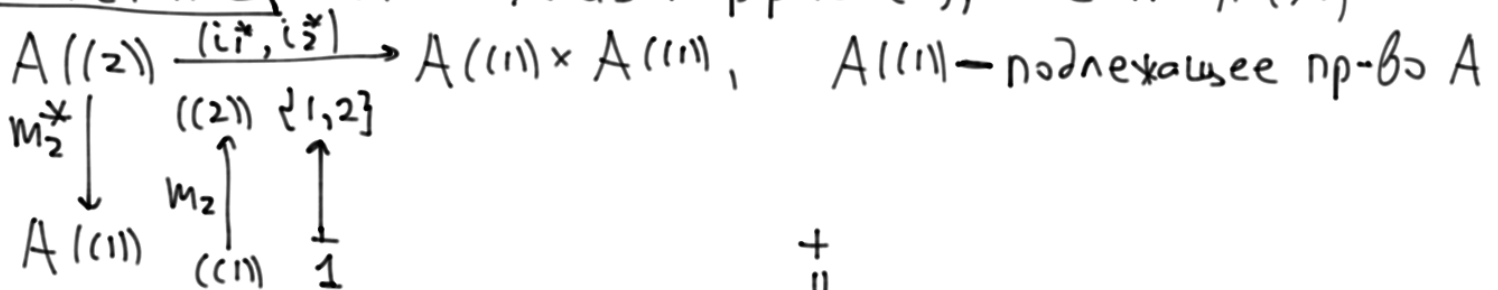
- ① $A((0))$ стягиваемо (связно и $\pi_i(-) = 0$)
- ② $\varrho_n: A((n)) \rightarrow A((1)) \times \dots \times A((1))$ — гомотоп. экв-сть индуцировано $i_k: (1) \rightarrow (n)$
 $1 \mapsto \{k\}$

Пример A — ад. группа $\rightsquigarrow A((n)) = A^n, A((1)) = A,$

$$\begin{array}{ccc}
 A((n)) & \xrightarrow{i_k} & A((1)) \\
 \parallel & & \uparrow \\
 \rho_{2k} & & \varrho_n: A^n \xrightarrow{\quad} A \times \dots \times A \\
 & & (\rho_{21}, \dots, \rho_{2n}) = \text{id}
 \end{array}$$

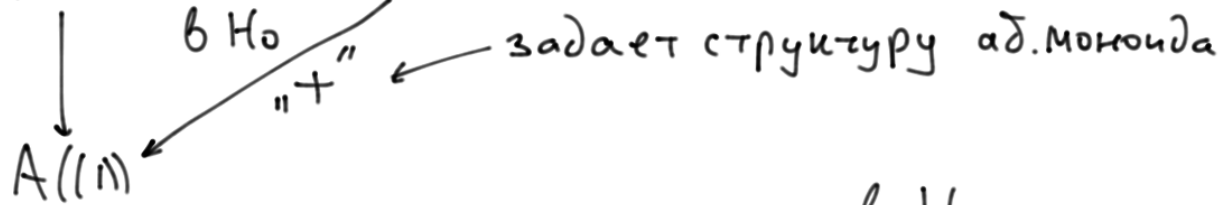
т.е. (2) — ослабление св-ва изоморфности

Замечание $\forall X \in \Gamma$ X изоморфно (n) , где $n = \#(X)$

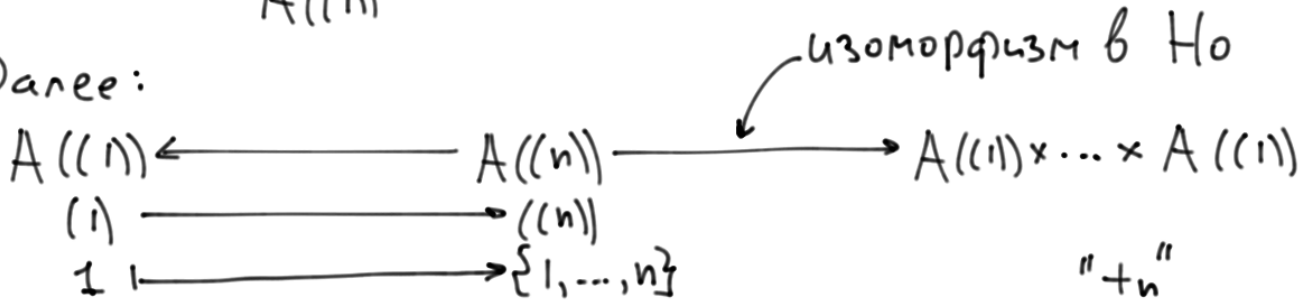


Пример A — ад. группа $\rightsquigarrow A((2)) = A^2 \xrightarrow{M_2^*} A = A((1))$

Следствие: если мы перейдем в гомотопическую категорию, то $A((2)) \xrightarrow{\sim} A((1)) * A((1))$



Далее:



\leadsto в H_0 есть морфизм $A((1)) * \dots * A((1)) \longrightarrow A((1))$

Для ад. группы A мы умеем строить симпл. мн-во BA :

① BA связно; ② $\pi_i(BA) = \begin{cases} A, & i=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$BA: \Delta^{op} \longrightarrow ab$ — симпл. аделева группа

$\leadsto BBA: \Delta^{op} \times \Delta^{op} \longrightarrow Ab \leadsto \dots \leadsto B^n(A)$
 $\uparrow \leftarrow$ диагональ Δ^{op}

① $B^n A$ связно; ② $\pi_i(B^n A) = \begin{cases} A, & i=n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

A^\bullet — симпл. аделева группа $\leadsto BA^\bullet$ — симпл. ад. группа,
 $\pi_{i-1}(BA^\bullet) = \pi_i(A^\bullet)$ т.е. $A((1))$ связно

Цель: по связному Γ -пространству построить пространство $BA((1))$ такое, что

a) $A((1)) \longrightarrow EA((1)) \longrightarrow BA((1))$ — рассл. Серра, $EA((1))$ — ст. 2.

a') $\pi_i(BA((1))) \xrightarrow{\sim} \pi_{i-1}(A((1)))$

Далее: желаем построить $BBA((1)): \pi_i(BBA((1))) \xrightarrow{\sim} \pi_{i-1}(BA((1)))$

$\rightsquigarrow (A((0)), A((1)), BA((1)), B^2A((1)), \dots)$ — спектр

$\Omega^1(X, x) := \text{Map}((S^1, 1), (X, x))$ — пр-во петель

\leftarrow в компактно открытой топологии

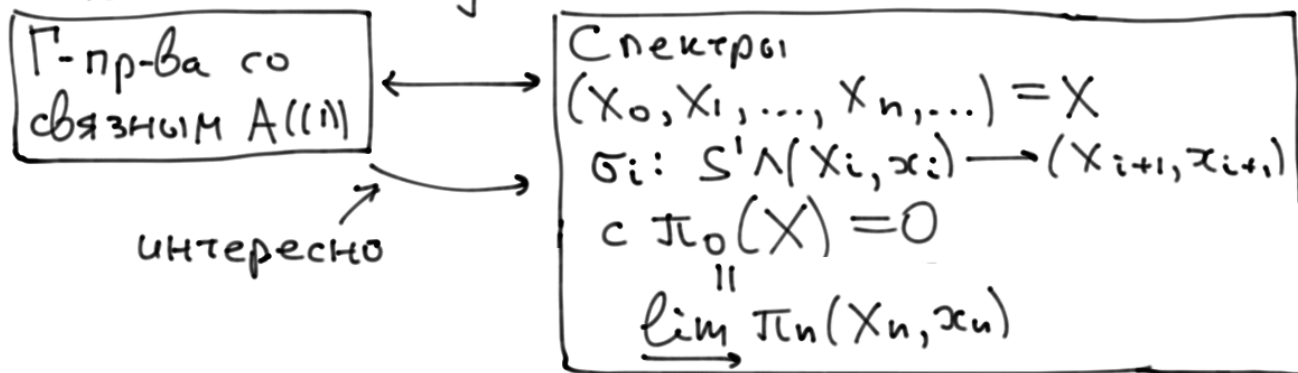
$$(a) \iff A((1)) \xrightarrow{w.e.} \Omega^1(B(A((1)))) \xrightarrow{w.e.} \Omega^1(\Omega^1(BB(A((1))))$$

$$\parallel \qquad \qquad \qquad \parallel$$

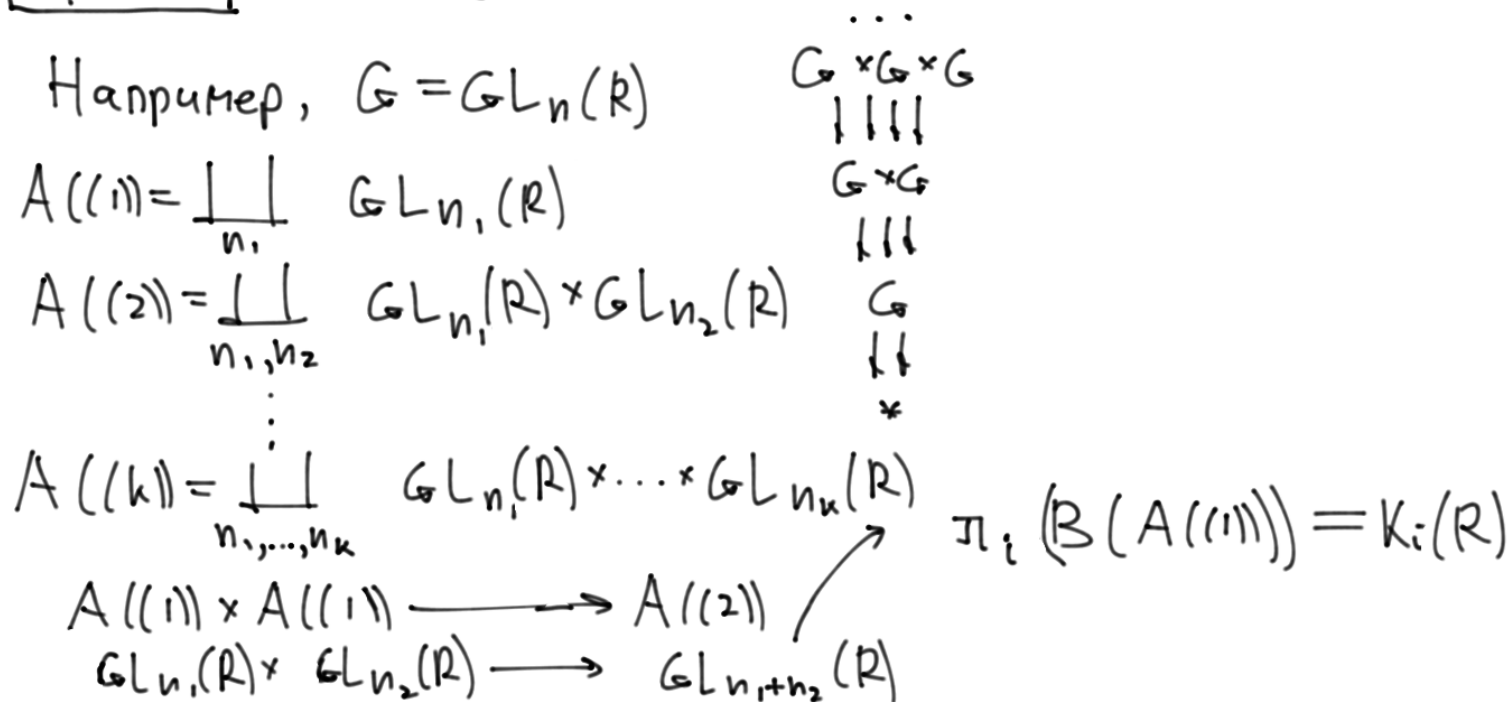
$$\Omega^1(BB(A((1)))) \qquad \qquad \Omega^2(B^2A((1)))$$

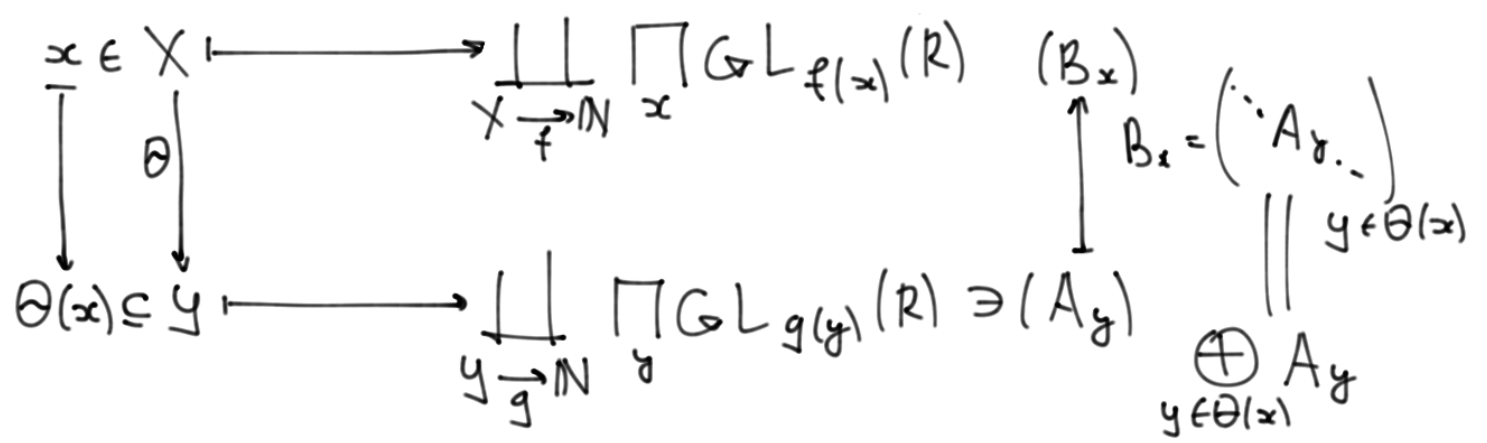
$\Omega^2(X, x) := \text{Map}((S^2, 1), (X, x))$

Конечный итог будет такой:



Пример G — группа \rightsquigarrow есть BG : нерв G как категорию



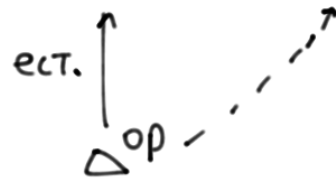


~ получили Γ -пр-во A_R

$BA_R((i)) =: K(R)$ — пр-во K -теорич кольца R

$K_i(R) := \pi_i(K(R))$ при $i > 0$

Конструкция: A — Γ -пр-во: $A: \Gamma^{op} \rightarrow \text{Sets}$



~ в частности, A — симпл. мн-во: $\Delta^{op} \times \Delta^{op} \rightarrow \text{Sets}$

$\Delta^{op} \xrightarrow{\text{диагональ}} \Delta^{op} \times \Delta^{op} \rightarrow \text{Sets}$

~ $\Delta^{op} \rightarrow \Delta^{op} \times \Delta^{op} \rightarrow \text{Sets}$ — симпл. мн-во $BA((i))$

т.е. $BA((i)): ([n] \rightarrow A((n))_n)$