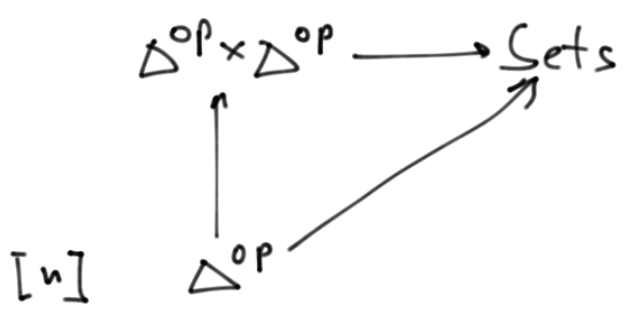
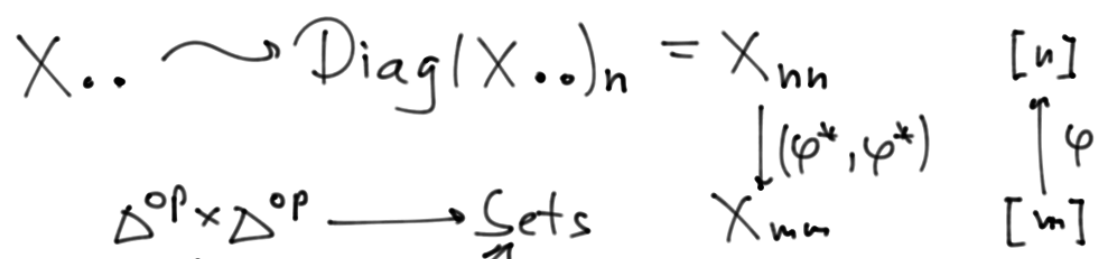
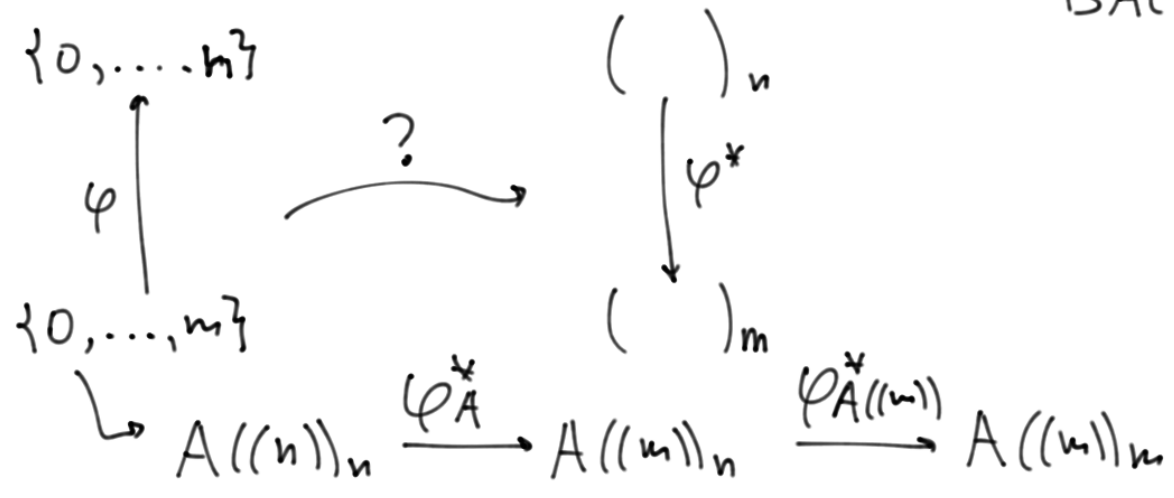
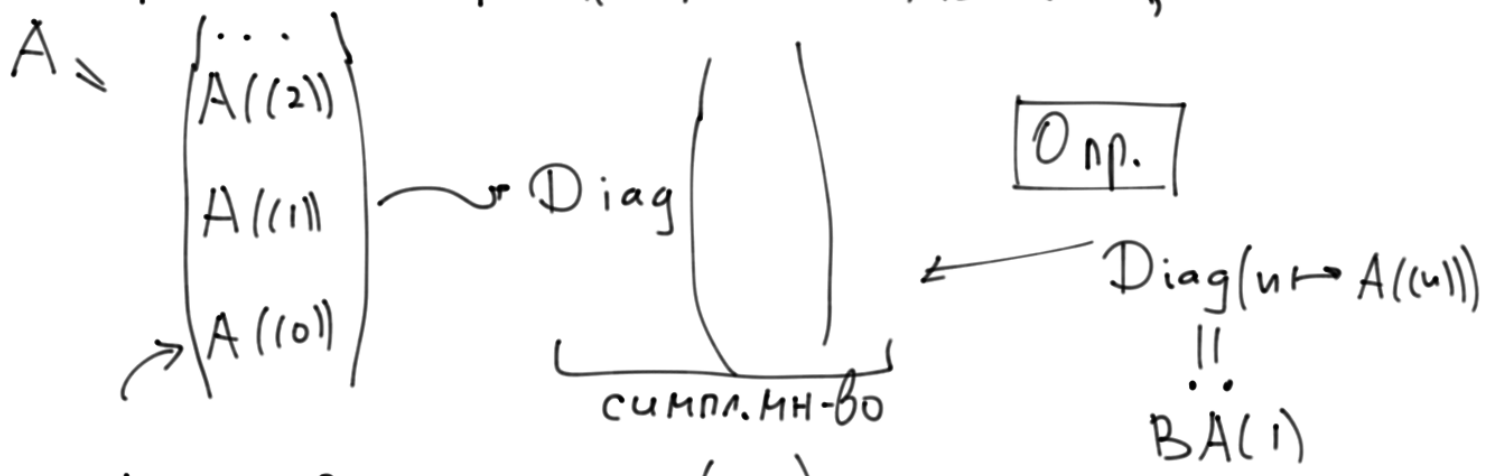


Сегодня постараемся по Γ -пространству $A: \Gamma^{op} \rightarrow \mathcal{S}ets$.

построить спектр $A((1)), BA((1)), B^2A((1)), \dots$

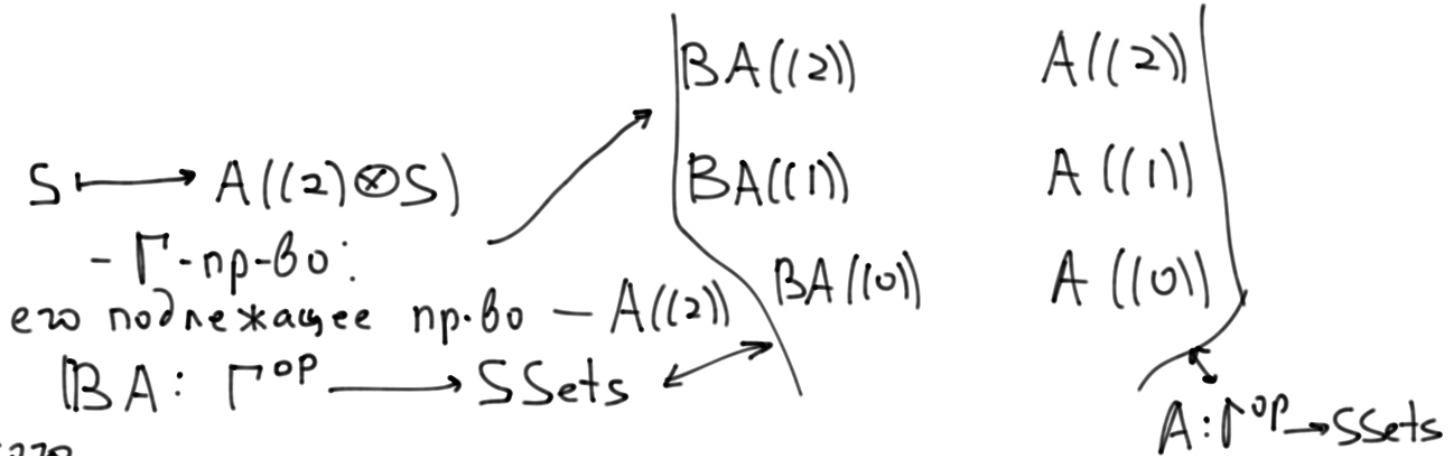
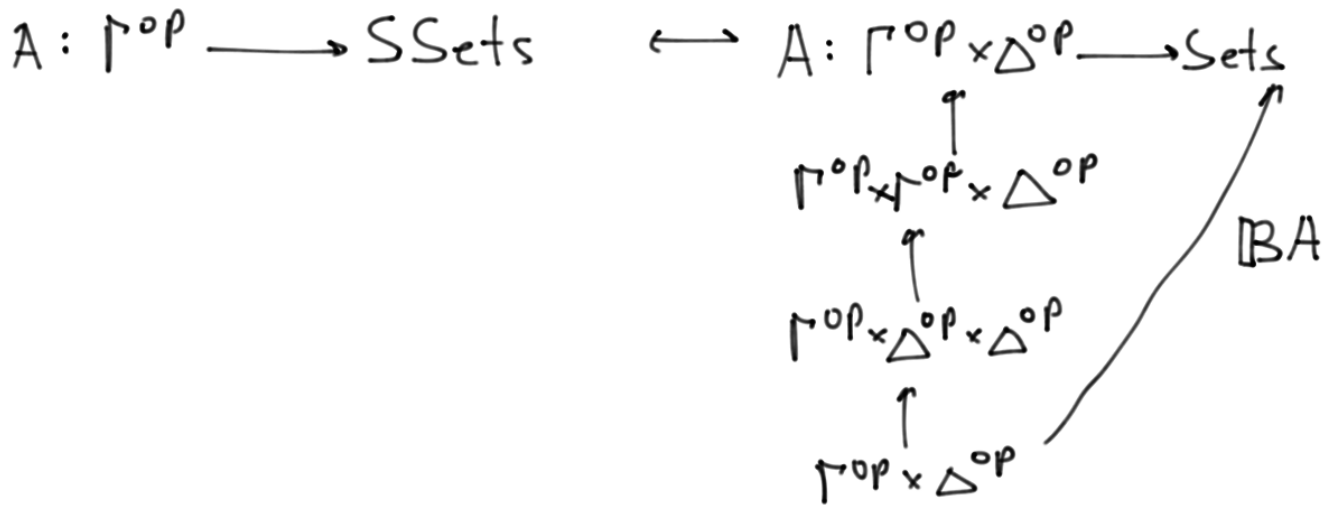


Опр. Если $A: \Gamma^{op} \rightarrow \mathcal{S}Sets$ - Γ -пространство, то определим новое Γ -пространство

$$BA: \Gamma^{op} \rightarrow \mathcal{S}Sets$$

$$S \in \Gamma \longmapsto BA(S)$$

Замечание Правило $\Gamma \times \Gamma \xrightarrow{\otimes} \Gamma$ - функтор:

$$\begin{array}{ccc} (s, t) & (S, T) & (s, t) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (\theta(s), \eta(t)) & (S', T') & (\theta(s), \eta(t)) \end{array}$$


итого

$$BA(T)_n = A(T \otimes (n))_n$$

Замечание $BBA(T)_{(n)} = BA(T \otimes (n))_n = A(T \otimes (n) \otimes (n))_n$

\leadsto из $A: \Gamma^{op} \rightarrow \mathcal{S}Sets$ мы получили A, BA, BBA, \dots

Пока это только функторы $\Gamma^{op} \rightarrow \mathcal{S}Sets$

Проверим, что BA это Γ -пр-во (удовл. условию Сигала):

$BA(10)$ стягиваемо, $BA((n)) \rightarrow BA((1)) \times \dots \times BA((1))$ - сл. экв.

① $BA((0))_n = A(\underbrace{(0) \otimes (n)}_{(0)})_n = A((0))_n \leadsto BA((0)) = A((0))$

② $BA((n)) \rightarrow BA((1)) \times \dots \times BA((1))$
 $(n) \leftarrow \{i\}$
 $\{i\} \leftarrow 1$

Например: $BA((2)) \rightarrow BA((1)) \times BA((1))$
 $\begin{pmatrix} A((2) \otimes (2)) \\ A((2) \otimes (1)) \\ A((2) \otimes (0)) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A((2)) \\ A((1)) \\ A((0)) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A((2)) \\ A((1)) \\ A((0)) \end{pmatrix}$

Лемма $X_{\bullet} \xrightarrow{f_{\bullet}} Y_{\bullet}; \forall n X_n \rightarrow Y_n$ - сл. экв.

$\leadsto \text{diag}(f_{\bullet})$ - сл. экв.

$A((n) \otimes (n)) \rightarrow A((n)) \times A((n))$
 $\parallel \quad \parallel \quad \parallel$
 $A((2n)) \rightarrow A((1))^n \times A((1))^n$
 $\rightarrow A((1))^{2n}$

Лемма $A((n)) \simeq \prod A((1)) \Leftrightarrow \forall S \in \Gamma A(S) \xrightarrow{(i_s^*)} \prod_{s \in S} A(\{s\})$
 $S \leftarrow \{s\}$
 $\{s\} \leftarrow S$

Получили набор Γ -пространств

A, BA, B^2A, \dots

Возьмем подлежащие пр-ва

$A((1)), (BA)((1)), (B^2A)((1))$

$\text{Hom}_*(S^1, (B^{n+1}A)((1)))$

Лемма Имеются естественные отображения

$$S^1 \wedge (B^n A)((1)) \xrightarrow{\partial_n} (B^{n+1} A)((1)) \quad \sim \quad (B^n A)((1)) \xrightarrow{\partial_n} \Omega(B^{n+1} A)((1))$$

Теорема Если $A((1))$ связно, то все $(B^n A)((1))$ связны

На самом деле, $B^n A((1))$ n -связно; более того, ∂_n — слабая экв-сть

Напоминание $(X, x) \wedge (Y, y) = X \times Y / X \times_y \vee_{x \times y}$

$\text{Hom}_*((X, x), (Y, y))_n = \text{Hom}_*((\Delta^n_+) \wedge (X, x), (Y, y))$

и $\text{Hom}_*((Z, z) \wedge (X, x), (Y, y)) = \text{Hom}_*((Z, z), \text{Hom}_*((X, x), (Y, y)))$

Таким образом, $(B^n A)((1))$ — это петли от $(B^{n+1} A)((1))$

$$\sim \pi_i(B^n A((1))) = \pi_{i+1}(B^{n+1} A((1)))$$

Лемма $\forall C: \Gamma \rightarrow \text{Sets}$ имеет место канон. отображение

$S^1 \wedge C((1)) \rightarrow (BC)((1))$

Утв. $(X([n]) \times_{\Delta[n]} \Delta[n]) \xrightarrow{\text{can}} \text{diag} \begin{pmatrix} X([2]) \\ X([1]) \\ X([0]) \end{pmatrix}$

$X([n])_k \times_{\text{Mor}([k], [n])}$

$\xrightarrow{\psi} X([n])_k \xrightarrow{\varphi^*} X([k])_k = \text{diag}(X([?]))_k$

Пусть $X[0] = \Delta[0] \xrightarrow{\sim} X[1] \times_{\Delta[1]} \Delta[1] \xrightarrow{\text{can}} \text{diag}(X[?])$

пропускается через $X[1] \wedge (\Delta[1] / \partial \Delta[1])$