$\boxed{28.10.2013}$

И.А. Панин

Сегодня постараемся по Γ-пространству

$A: \Gamma^{op} \longrightarrow Sets.$

построить спектр $A((1)), BA((1)), B^2A((1)), \dots$

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \dots \\ A((2)) \\ A((1)) \\ A((0)) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathrm{Diag}\underbrace{\left(\quad \right)}_{\text{симпл. мн-во}}$$

$\boxed{\text{Опр.}}$

$\mathrm{Diag}(n \mapsto A((n))) \overset{..}{=} BA(1)$

$$\begin{tikzcd} \{0,\dots,n\} & (\quad)_n \arrow[d, "\varphi^*"] \\ \{0,\dots,m\} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, bend left, "?"] & (\quad)_m \end{tikzcd}$$

$\{0,\dots,m\} \mapsto A((n))_n \xrightarrow{\varphi^*_A} A((m))_n \xrightarrow{\varphi^*_{A((m))}} A((m))_m$

$X_{\cdot\cdot} \rightsquigarrow \mathrm{Diag}(X_{\cdot\cdot})_n = X_{nn}$

$$\begin{tikzcd} X_{nn} \arrow[d, "(\varphi^*, \varphi^*)"] & {[n]} \\ X_{mm} & {[m]} \arrow[u, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \Delta^{op} \times \Delta^{op} \arrow[r] & Sets \\ \Delta^{op} \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$[n]$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Если $A: \Gamma^{op} \longrightarrow SSets$ — Γ-пространство, то определим новое Γ-пространство

$$\mathbb{B}A : \Gamma^{op} \longrightarrow SSets$$

$$S \in \Gamma \longmapsto \mathbb{B}A(S)$$

$\boxed{\text{Замечание}}$ Правило $\Gamma \times \Gamma \xrightarrow{\otimes} \Gamma$ — функтор:

$$\begin{tikzcd}
(s,t) \arrow[d, mapsto] & (S,T) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{(\theta,\eta)}"'] & S \times T \arrow[d, "?"] & (s,t) \arrow[d, mapsto] \\
(\theta(s), \eta(t)) & (S',T') \arrow[r, mapsto] & S' \times T' \ni (\theta(s), \eta(t)) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A: \Gamma^{op} \longrightarrow SSets \arrow[r, leftrightarrow] & A: \Gamma^{op} \times \Delta^{op} \longrightarrow Sets \\
& \Gamma^{op} \times \Gamma^{op} \times \Delta^{op} \arrow[u] \\
& \Gamma^{op} \times \Delta^{op} \times \Delta^{op} \arrow[u] \\
& \Gamma^{op} \times \Delta^{op} \arrow[u] \arrow[uuu, bend right, "\mathbb{B}A"']
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{B}A((2))$ $\quad A((2))$

$\mathbb{B}A((1))$ $\quad A((1))$

$\mathbb{B}A((0))$ $\quad A((0))$

$S \longmapsto A((2) \otimes S)$

— Γ-пр-во:

его подлежащее пр-во — $A((2))$

$\mathbb{B}A : \Gamma^{op} \longrightarrow SSets$

$A: \Gamma^{op} \to SSets$

итого

$$\mathbb{B}A(T)_n = A(T \otimes (n))_n$$

$\boxed{\text{Замечание}}$ $\mathbb{B}\mathbb{B}A(T)_{(n)} = \mathbb{B}A(T \otimes (n))_n = A(T \otimes (n) \otimes (n))_n$

$\rightsquigarrow$ из $A: \Gamma^{op} \longrightarrow SSets$ мы получили $A, \mathbb{B}A, \mathbb{B}\mathbb{B}A, \ldots$

Пока это только функторы $\Gamma^{op} \longrightarrow SSets$

Проверим, что $\mathbb{B}A$ это Γ-пр-во (удовл. условию Сигала):

$\mathbb{B}A((0))$ стягиваемо, $\mathbb{B}A((n)) \longrightarrow \mathbb{B}A((1)) \times \ldots \times \mathbb{B}A((1))$ – сл. экв.

① $BA((0))_n = A(\underbrace{(0)\otimes(n)}_{=(0)})_n = A((0))_n \rightsquigarrow BA((0)) = A((0))$

② $\mathbb{B}A((n)) \longrightarrow \mathbb{B}A((1)) \times \ldots \times \mathbb{B}A((1))$

$$(n) \longleftarrow \{1\}$$
$$\{i\} \longleftarrow\!\shortmid 1$$

например: $\mathbb{B}A((2)) \longrightarrow \mathbb{B}A((1)) \times \mathbb{B}A((1))$

$$\begin{pmatrix} A((2)\otimes(2)) \\ A((2)\otimes(1)) \\ A((2)\otimes(0)) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A((2)) \\ A((1)) \\ A((0)) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A((2)) \\ A((1)) \\ A((0)) \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $X_{\bullet\bullet} \xrightarrow{f_{\bullet\bullet}} Y_{\bullet\bullet}$; $\forall n$ $X_{n\bullet} \longrightarrow Y_{n\bullet}$ – слаб. экв.

$\rightsquigarrow \operatorname{diag}(f_{\bullet\bullet})$ – сл. экв.

$$\begin{array}{ccc} A((n)\otimes(n)) & \longrightarrow & A((n)) \times A((n)) \\ \| & & \cong \quad\quad \cong \\ A((2n)) & & A((1))^n \times A((1))^n \\ & \searrow & \cong \\ & & A((1))^{2n} \end{array}$$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $A((n)) \simeq \prod A((1)) \iff \forall S \in \Gamma$ $A(S) \xrightarrow[\sim]{(i_s^*)} \prod_{s\in S} A(\{s\})$

$$S \longleftarrow \{s\}$$
$$\{s\} \longleftarrow\!\shortmid s$$

Получили набор Γ-пространств

$A, \mathbb{B}A, \mathbb{B}\mathbb{B}A, \ldots$

Возьмем подлежащие пр-ва

$A((1)), (\mathbb{B}A)((1)), (\mathbb{B}^2A)((1))$

Лемма Имеются естественные отображения

$$S^1 \wedge (\mathbb{B}^n A)((1)) \xrightarrow{\sigma_n} (\mathbb{B}^{n+1}A)((1)) \quad \rightsquigarrow \quad (\mathbb{B}^n A)((1)) \xrightarrow{g_n} \Omega(\mathbb{B}^{n+1}A((1)))$$

$$\Omega(\mathbb{B}^{n+1}A((1))) = \underline{\mathrm{Hom}_\bullet}(S^1, (\mathbb{B}^{n+1}A)((1)))$$

Теорема Если $A((1))$ связно, то все $(\mathbb{B}^n A)((1))$ связны

На самом деле, $\mathbb{B}^n A((1))$ n-связно; более того, g_n — слабая экв-сть

Напоминание $(X, x) \wedge (Y, y) = X \times Y / X \times y \vee x \times Y$

$$\underline{\mathrm{Hom}_\bullet}((X,x),(Y,y))_n = \mathrm{Hom}_\bullet((\Delta^n_+) \wedge (X,x),(Y,y))$$

и $\mathrm{Hom}_\bullet((Z,z) \wedge (X,x),(Y,y)) = \mathrm{Hom}_\bullet((Z,z), \underline{\mathrm{Hom}_\bullet}((X,x),(Y,y)))$

Таким образом, $(\mathbb{B}^n A)((1))$ — это петли от $(\mathbb{B}^{n+1}A)((1))$

$\rightsquigarrow \pi_i(\mathbb{B}^n A((1))) = \pi_{i+1}(\mathbb{B}^{n+1}A((1)))$

Лемма $\forall\, C : \Gamma \longrightarrow SSets$ имеет место канон. отображение

$S^1 \wedge C((1)) \longrightarrow (\mathbb{B}C)((1))$

Утв.
$$\underbrace{(X([n]) \times \Delta[n])_k}_{\parallel} \xrightarrow{can} \mathrm{diag}\begin{pmatrix} \vdots \\ X([2]) \\ X([1]) \\ X([0]) \end{pmatrix}$$

$$X([n])_k \times \mathrm{Mor}([k],[n])$$

$$\varphi \rightsquigarrow X([n])_k \xrightarrow{\varphi^*} X([k])_k = \mathrm{diag}(X([?]))_k$$

Пусть $X[0] = \Delta[0] \rightsquigarrow X[1] \times \Delta[1] \xrightarrow{can} \mathrm{diag}(X[\bullet])$

пропускается через $X[1] \wedge \left(\Delta[1] / \partial\Delta[1]\right)$