$\boxed{04.11.2013}$

И.А. Панин

$\boxed{\text{Конструкция}}$ Пусть $\begin{pmatrix} \dots \\ X_2 \\ \downarrow\downarrow\downarrow \\ X_1 \\ \downarrow\downarrow \\ X_0 \end{pmatrix}$ — бисимплициальное мн-во

Желаем: $X_n\times\Delta[n] \xrightarrow{can_n} diag\begin{pmatrix} \dots \\ X_2 \\ X_1 \\ X_0 \end{pmatrix}$

Рассмотрим бисимпл. мн-во $\underbrace{X_n\times\Delta[n]}_{\text{(как симпл. мн-во)}} \xrightarrow{ev_n} \begin{pmatrix} \dots \\ X_2 \\ X_1 \\ X_0 \end{pmatrix}$

и зададим морфизм симпл. множеств

$$X_n\times\Delta[n] = \begin{pmatrix} \dots \\ X_n\times\Delta[n]_2 \\ X_n\times\Delta[n]_1 \\ X_n\times\Delta[n]_0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \dots \\ X_2 \\ X_1 \\ X_0 \end{pmatrix}$$

$$(X_{n,\varphi}=X_n) \quad \coprod_{[2]\xrightarrow{\varphi}[n]} \boxed{X_{n,\varphi}} = X_n\times\Delta[n]_2$$

$$X_n \xrightarrow{\varphi^*} X_2$$

Применим к ev_n диагональ

$$diag(X_n\times\Delta[n]) \underset{\substack{\| \\ can_n}}{\xrightarrow{diag(ev_n)}} diag\begin{pmatrix} \dots \\ X_2 \\ X_1 \\ X_0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Лемма}}$ (специальная) Если $\begin{pmatrix} \dots \\ X_2 \\ X_1 \\ X_0 \end{pmatrix}$ — симпл. пр-во и $X_0=\Delta[0]$,

то $can_1\colon X_1\times\Delta[1] \longrightarrow diag\begin{pmatrix} \dots \\ X_2 \\ X_1 \\ X_0 \end{pmatrix}$ пропускается

однозначно через $X_1\wedge S^1$:

$$\begin{tikzcd} X_1\times\Delta[1] \arrow[rr] \arrow[dr] & & diag\begin{pmatrix} \dots \\ X_2 \\ X_1 \\ X_0 \end{pmatrix} \\ & X_1\wedge S^1 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Лемма}}$ (общая) Пусть $\begin{pmatrix} \cdots \\ X_2 \\ X_1 \\ X_0 \end{pmatrix}$ — симпл. пр-во

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times \Delta[1] \arrow[r, "can_1"] & \mathrm{diag}\begin{pmatrix} \cdots \\ X_2 \\ X_1 \\ X_0 \end{pmatrix} \\
X_1 \times \Delta[0] \arrow[u, shift left, "id\times\partial^0"] \arrow[u, shift right, "id\times\partial^1"'] \arrow[r] & \mathrm{diag}\begin{pmatrix} \cdots \\ X_0 \\ X_0 \\ X_0 \end{pmatrix} = X_0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X_1\times\Delta[1])_k = \coprod\limits_{[k]\xrightarrow{\varphi}[1]} X_{1,\varphi} \ni X_{1,\partial_0\circ\psi} \\
(X_1\times\Delta[0])_k = \coprod\limits_{[k]\xrightarrow{\psi}[0]} X_{1,\psi} \arrow[u, "id\times\partial^0"] \arrow[u, bend right, "id"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X_0\times\Delta[1])_k = \coprod\limits_{[k]\xrightarrow{\varphi}[1]} X_{0,\varphi} = X_0 \arrow[d, "s_1"] \\
(X_1\times\Delta[1])_k = \coprod\limits_{[k]\xrightarrow{\varphi}[1]} X_{1,\varphi} = X_1
\end{tikzcd}$$

б. симпл. мн-ва

$$\begin{tikzcd}
X_0\times\Delta[1] \arrow[r] \arrow[d, "s_1^*\times id"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & \begin{pmatrix} \cdots \\ X_0 \\ X_0 \\ X_0 \end{pmatrix} \arrow[d] \\
X_1\times\Delta[1] \arrow[r, "ev_1"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & \begin{pmatrix} \cdots \\ X_2 \\ X_1 \\ X_0 \end{pmatrix} \\
X_1\times\Delta[0] \arrow[u, shift left] \arrow[u, shift right] \arrow[r] & \begin{pmatrix} \cdots \\ X_0 \\ X_0 \\ X_0 \end{pmatrix} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Почему из общей Леммы следует специальная?

Применим к этой диаграмме diag:

$$\begin{tikzcd}
X_0\times\Delta[1] \arrow[r] \arrow[d] & X_0 = \Delta[0] = * \arrow[d] \\
X_1\times\Delta[1] \arrow[r, "can_1"] & \mathrm{diag}\begin{pmatrix} \cdots \\ X_2 \\ X_1 \\ X_0 \end{pmatrix} \\
X_1\times\Delta[0] \arrow[u, shift left] \arrow[u, shift right] \arrow[r] & X_0 = \Delta[0] = * \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X_1\times\partial(\Delta^1) \cup \overset{* \atop \shortparallel}{\overbrace{X_0\times\Delta[1]}} \arrow[d] \arrow[dr] & * \arrow[d] \\
X_1\times\Delta[1] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{diag} \\
X_1\wedge S^1 \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Видим, что $X_1\times\partial^1(\Delta[0])$, $X_1\times\partial^0(\Delta[0])$ и $X_0\times\Delta[1]$ отображаются посредством can_1 в точку $*$ в $\mathrm{diag}(X_\bullet)$

Квадрат I

$$
\begin{tikzcd}
\coprod\limits_{[k]\xrightarrow{\varphi}[1]} X_{1,\varphi} = X_1\times(\Delta[1])_k \arrow[rr] \arrow[rr, bend left, "\varphi^*"] & & X_k \\
X_{1,[k]\xrightarrow{\psi}[0]\xrightarrow{\partial^0}[1]} \arrow[u] \arrow[urr, bend right, "(\partial^0\circ\psi)^*"'] \arrow[r] & & X_0 \arrow[u, "\psi^* = s_k^*"'] \\
\coprod\limits_{[k]\xrightarrow{\psi}[0]} X_{1,\psi} = X_1\times(\Delta[0])_k \arrow[u] \arrow[uu, "\mathrm{id}\times\partial^0"'] \arrow[urr, "(\partial^0)_*"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$= X_{1,s_k}$

Аналогично разбирается случай ∂'.

Квадрат II

$$
\begin{tikzcd}
X_0\times(\Delta[1])_k = \coprod\limits_{\varphi:[k]\to[1]} X_{0,\varphi} \arrow[r, "\coprod \mathrm{id}"] \arrow[d, "s_1^*\times\mathrm{id}"', "s_1^*"] \arrow[dr, "(s_1\circ\varphi)^* = s_k^*"] & X_0 \arrow[d, bend left] \\
X_1\times(\Delta[1])_k = \coprod\limits_{\varphi:[k]\to[1]} X_{1,\varphi} \arrow[r, "\varphi^*"] & X_k
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{[k]} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "s_k"'] & {[1]} \arrow[r, "s_1"] & {[0]}
\end{tikzcd}
$$

Лемма (общая) доказана $\to$ специальная тоже

Итак, если $X_0 = \Delta[0] = *$, то имеет место канонический морфизм $X_1 \wedge S_1 \xrightarrow{\sigma} \mathrm{diag}(X_\bullet)$ такой, что диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
X_1\wedge S_1 \arrow[rr, "\sigma"] & & \mathrm{diag}(X_\bullet) \\
& X_1\times\Delta[1] \arrow[ul, "pr"] \arrow[ur, "can_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

коммутативна

Пусть A — Γ-пространство: $A\colon \Gamma^{op} \to SSets_\bullet$
такое, что $A(\varnothing) = *$
$\rightsquigarrow$ есть цепочка Γ-пространств $A, \mathbb{B}A, \mathbb{B}\mathbb{B}A, \ldots$

Их подлежащие пр-ва: $A(\langle 1\rangle)$, $(\mathbb{B}A)(\langle 1\rangle)$, $(\mathbb{B}^2A)(\langle 1\rangle)$

мы построили

$$A(\langle 1\rangle)\wedge S^1 \xrightarrow{\sigma} \operatorname{diag}\begin{pmatrix}\ldots\\ A(\langle 2\rangle)\\ A(\langle 1\rangle)\\ A(\langle 0\rangle)\end{pmatrix} = (\mathbb{B}A)(\langle 1\rangle), \qquad (\mathbb{B}^2A)(\langle 1\rangle) = \operatorname{diag}\begin{pmatrix}\ldots\\ \mathbb{B}A(\langle 1\rangle\times\langle 2\rangle)\\ \mathbb{B}A(\langle 1\rangle\times\langle 1\rangle)\\ \mathbb{B}A(\langle 1\rangle\times\langle 0\rangle)\end{pmatrix}$$

Построим аналогично $(\mathbb{B}A)(\langle 1\rangle)\wedge S^1 \to (\mathbb{B}^2A)(\langle 1\rangle)$

$$\mathbb{B}A(\langle 1\rangle\times\langle 0\rangle) = \mathbb{B}A(\langle 0\rangle) = \operatorname{diag}\begin{pmatrix}A(\langle 0\rangle)\\ A(\langle 0\rangle)\\ A(\langle 0\rangle)\end{pmatrix} = *$$

$\mathbb{B}A(\langle 1\rangle\times\langle 1\rangle) = \mathbb{B}A(\langle 1\rangle)$
$\rightsquigarrow$ по лемме есть нужное отображение

$\rightsquigarrow$ мы построили спектр

$\boxed{\text{Упр.}}$

$$\begin{pmatrix}\ldots\\ X_2\\ X_1\\ X_0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\ldots\\ \mathbb{Z}[X_2]\\ \mathbb{Z}[X_1]\\ \mathbb{Z}[X_0]\end{pmatrix} \rightsquigarrow \operatorname{Tot}\mathbb{Z}[X_{\bullet\bullet}]$$

бикомплекс $\mathbb{Z}[X_{\bullet\bullet}]$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть $Y = (\cdots Y_2 \substack{\to\\\to\\\to} Y_1 \substack{\to\\\to} Y_0)$ — симпл. множество;

$$\rightsquigarrow (\cdots \mathbb{Z}[Y_2] \substack{\to\\\to\\\to} \mathbb{Z}[Y_1] \underset{\partial^1}{\overset{\partial^0}{\rightrightarrows}} \mathbb{Z}[Y_0])$$

$$\mathbb{Z}[Y_2] \xrightarrow{\partial^0-\partial^1-\partial^2} \mathbb{Z}[Y_1] \xrightarrow{\partial^0-\partial^1} \mathbb{Z}[Y_0]$$

Мы построили $X_1\wedge S^1 \xrightarrow{\sigma} \operatorname{diag}(X_\bullet)$

Применим к нему $\mathbb{Z}[-]$:

$\mathbb{Z}[S^1] = [0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \cdots]$

$$\mathbb{Z}[X_1][1] \overset{\wr}{=} \mathbb{Z}[X_1]\otimes\mathbb{Z}[S_1] \longrightarrow \operatorname{Tot}(\mathbb{Z}[(X_n)_j])$$

сдвиг

вложение + тотализация

$$\Delta^{op} \xrightarrow{\ Y\ } CW$$

$$Y = \begin{pmatrix} \dots \\ Y_2 \\ Y_1 \\ Y_0 \end{pmatrix} \longmapsto |Y| \text{ — CW-комплекс}$$

$$|Y| = \left(\coprod Y_n \times \Delta^n\right)/\sim$$

$$\begin{tikzcd}
Y_1 & Y_1\times\Delta^1 \arrow[r, phantom, "\overset{\partial^0 \coprod \partial^1}{\supset}"] \arrow[d, dotted, no head] & Y_1\times\Delta^0 \arrow[dl, "(\partial^0)^*"'] & \coprod & Y_1\times\Delta^0 \arrow[dlll, bend left, "(\partial^1)^*"] \\
Y_0 \arrow[u, "s_1"] & Y_0 & & &
\end{tikzcd}$$

получаем $skel_1(Y)$

$+$ стягиваем $s_1(Y_0)\times\Delta^1$

$$\begin{tikzcd}
skel_1(Y) \coprod \Big(\underset{\substack{\Delta^1 \hookrightarrow \Delta^2 \\ \partial^i}}{\coprod} Y_2\times\Delta^1\Big) \arrow[rr] \arrow[d, hook] \arrow[r, dotted, "(\partial^i)^*\times id"] & Y_1\times\Delta^1 \arrow[r] & skel_1(Y) \arrow[d] \\
skel_1(Y) \coprod (Y_2\times\Delta^2) \arrow[rr] & & skel_2(Y)
\end{tikzcd}$$

$$Y_0 = * \rightsquigarrow skel_1(Y) = Y_1 \wedge S^1 \hookrightarrow |Y|$$

$S^1 \rightsquigarrow$ хотим построить BS^1

$$\left|\begin{pmatrix} \dots \\ S^1\times S^1\times S^1 \\ S_1\times S_1 \\ S_1 \end{pmatrix}\right| \longrightarrow BS^1 = \left|\begin{pmatrix} \dots \\ S_1\times S_1 \\ S_1 \\ * \end{pmatrix}\right|$$

S^1 действует диагонально на каждом уровне

расслоение со слоем S^1