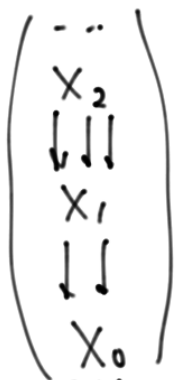


Конструкция

Пусть

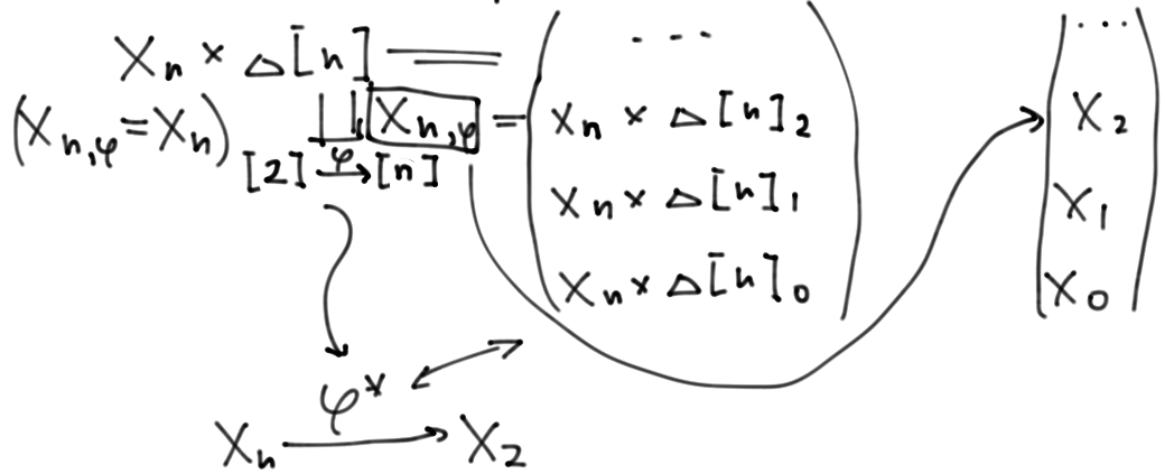
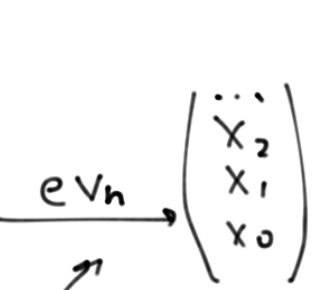


— диссимплициальное мн-во

Желаем:

$$X_n \times \Delta[n] \xrightarrow{\text{can}_n} \text{diag} \begin{pmatrix} \dots \\ X_2 \\ X_1 \\ X_0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим диссимпл. мн-во $X_n \times \Delta[n]$ (как симп. мн-во) и зададим морфизм симп. множеств



Применим к ev_n диагональ

$$\text{diag}(X_n \times \Delta[n]) \xrightarrow{\text{diag}(\text{ev}_n)} \text{diag} \begin{pmatrix} \dots \\ X_2 \\ X_1 \\ X_0 \end{pmatrix}$$

can_n

Лемма

(специальная)

Если $\begin{pmatrix} \dots \\ X_2 \\ X_1 \\ X_0 \end{pmatrix}$ — симп. пр-во и $X_0 = \Delta[0]$,

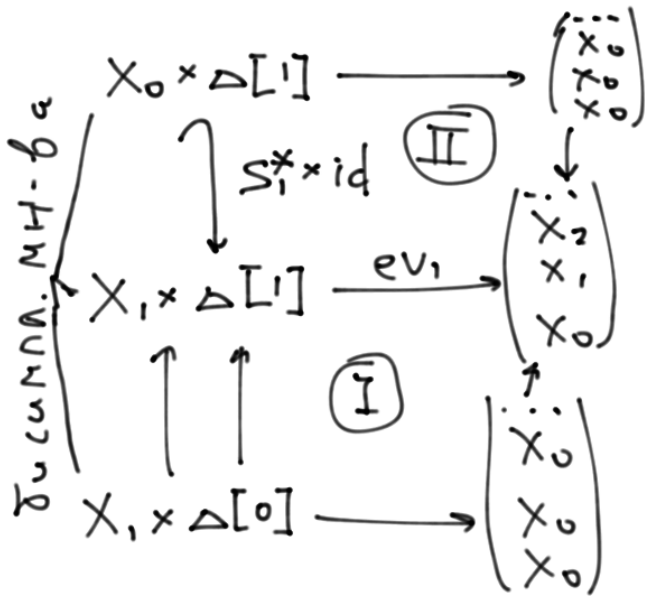
то $\text{can}_i: X_i \times \Delta[i] \rightarrow \text{diag} \begin{pmatrix} \dots \\ X_2 \\ X_1 \\ X_0 \end{pmatrix}$ пропускается однозначно через $X_i \wedge S^1$.

Лемма (общая) Пусть $\begin{pmatrix} \ddots \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$ — симп. пр-во

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 \times \Delta[1] & \xrightarrow{\text{can}_1} & \text{diag} \begin{pmatrix} \dots \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} \\
 \uparrow \text{id} \times \partial^0 & \uparrow \text{id} \times \partial^1 & \uparrow \\
 X_1 \times \Delta[0] & \longrightarrow & \text{diag} \begin{pmatrix} \ddots \\ x_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = x_0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (X_1 \times \Delta[1])_k &= \coprod_{[k] \xrightarrow{\varphi} [1]} X_{1,\varphi} \xrightarrow{\text{id}} X_{1,\partial^0 \varphi} \\
 (X_1 \times \Delta[0])_k &= \coprod_{[k] \xrightarrow{\psi} [0]} X_{1,\psi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (X_0 \times \Delta[1])_k &= \coprod_{[k] \xrightarrow{\varphi} [1]} X_{0,\varphi} = x_0 \\
 (X_1 \times \Delta[1])_k &= \coprod_{[k] \xrightarrow{\varphi} [1]} X_{1,\varphi} = x_1
 \end{aligned}$$



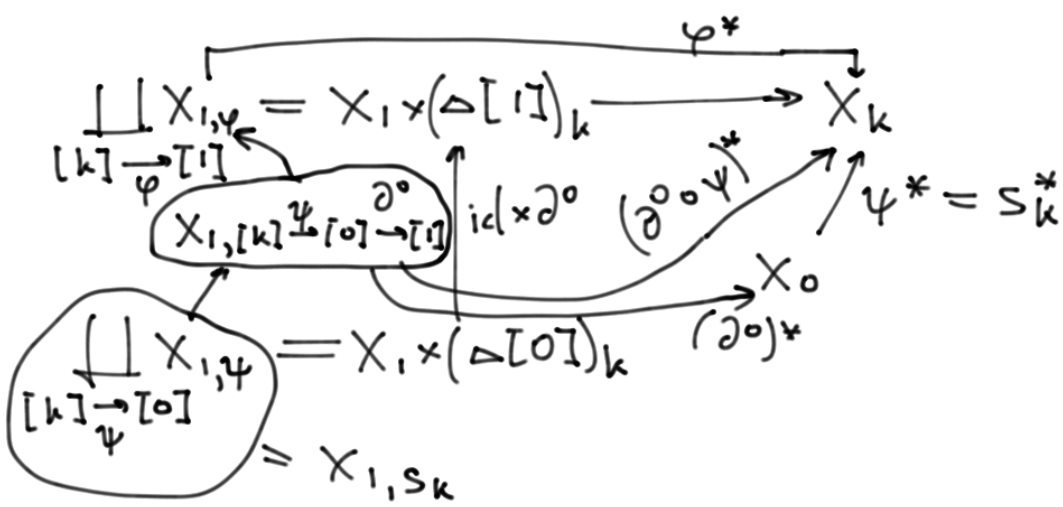
Почему из общей Леммы следует специальная?

Применим к этой диаграмме diag :

$$\begin{array}{ccc}
 X_0 \times \Delta[1] & \longrightarrow & X_0 = \Delta[0] = * \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X_1 \times \Delta[1] & \xrightarrow{\text{can}_1} & \text{diag} \begin{pmatrix} \ddots \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} \\
 \uparrow \uparrow & & \uparrow \\
 X_1 \times \Delta[0] & \longrightarrow & X_0 = \Delta[0] = *
 \end{array}$$

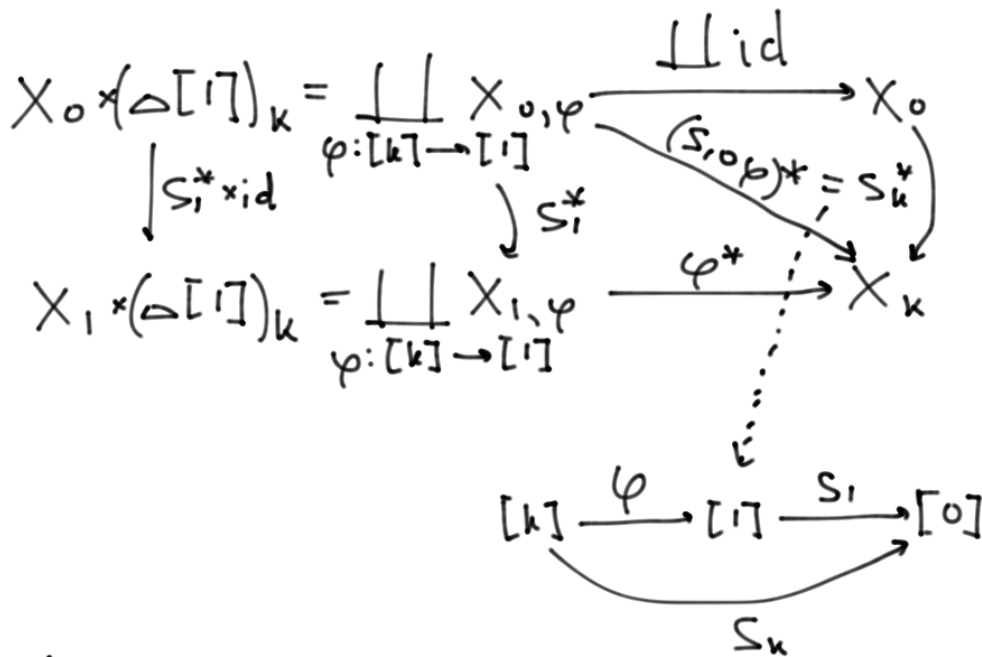
$$\begin{array}{ccc}
 X_1 \times \partial(\Delta^1) \cup \overset{*}{\parallel} X_0 \times \Delta[1] & & * \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 X_1 \times \Delta[1] & \longrightarrow & \text{diag} \\
 \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
 X_1 \wedge S^1 & \dashrightarrow & \text{diag}
 \end{array}$$

Видим, что $X_1 \times \partial^1(\Delta[0])$, $X_1 \times \partial^0(\Delta[0])$ и $X_0 \times \Delta[1]$ отображаются посредством can_1 в точку $*$ в $\text{diag}(X_\bullet)$



Аналогично разбирается случай ∂' .

Квадрат II



Лемма (общая) доказана \rightarrow специальная тоже

Итак, если $X_0 = \Delta[0] = *$, то имеет место канонический морфизм $X_1 \wedge S_1 \xrightarrow{\sigma} \text{diag}(X_0)$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 \wedge S_1 & \xrightarrow{\sigma} & \text{diag}(X_0) \\
 \uparrow \rho_1 & & \uparrow \text{can}_1 \\
 X_1 \times \Delta[1] & &
 \end{array}$$

коммукативна

Пусть A — Γ -пространство: $A: \Gamma^{op} \rightarrow S\text{Sets}$.
 такое, что $A(\emptyset) = *$

\leadsto есть цепочка Γ -пространств A, BA, BBA, \dots

Ух подлежащие пр-ва: $A((1))$, $(BA)((1))$, $(B^2A)((1))$

мы построили

$$A((1)) \wedge S^1 \xrightarrow{\sigma} \text{diag} \begin{pmatrix} \dots \\ A((2)) \\ A((1)) \\ A((0)) \end{pmatrix} \xrightarrow{\cong} \text{diag} \begin{pmatrix} \dots \\ BA((1) \times (2)) \\ BA((1) \times (1)) \\ BA((1) \times (0)) \end{pmatrix}$$

Построим аналогично $(BA)((1)) \wedge S^1 \rightarrow (B^2A)((1))$

$$\text{diag} \begin{pmatrix} A((0)) \\ A((1)) \\ A((0)) \end{pmatrix} = BA((0))$$

$$BA((1) \times (1)) = BA((1))$$

\leadsto по лемме есть нужное отображение

\leadsto мы построили спектр

$\boxed{\text{Упр.}}$ $\begin{pmatrix} \dots \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \dots \\ \mathbb{Z}[x_2] \\ \mathbb{Z}[x_1] \\ \mathbb{Z}[x_0] \end{pmatrix} \sim \text{Tot } \mathbb{Z}[x_{\bullet}]$

Дикомплекс $\mathbb{Z}[x_{\bullet}]$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть $Y = (\dots Y_2 \rightrightarrows Y_1 \rightrightarrows Y_0)$ — симп. множество;

$$\dots \mathbb{Z}[Y_2] \rightrightarrows \mathbb{Z}[Y_1] \xrightleftharpoons[\partial^1]{\partial^0} \mathbb{Z}[Y_0]$$

$\partial^0 - \partial^1 - \partial^2$ $\partial^0 - \partial^1$

Мы построили $X_1 \wedge S^1 \xrightarrow{\sigma} \text{diag}(X_{\bullet})$

Применим к нему $\mathbb{Z}[-]$:

$$\mathbb{Z}[S^1] = [0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \dots]$$

$$\mathbb{Z}[x_1][1] = \mathbb{Z}[x_1] \otimes \mathbb{Z}[S^1]$$

\leftarrow сдвиг

$$\text{Tot}(\mathbb{Z}[(X_n)_j])$$

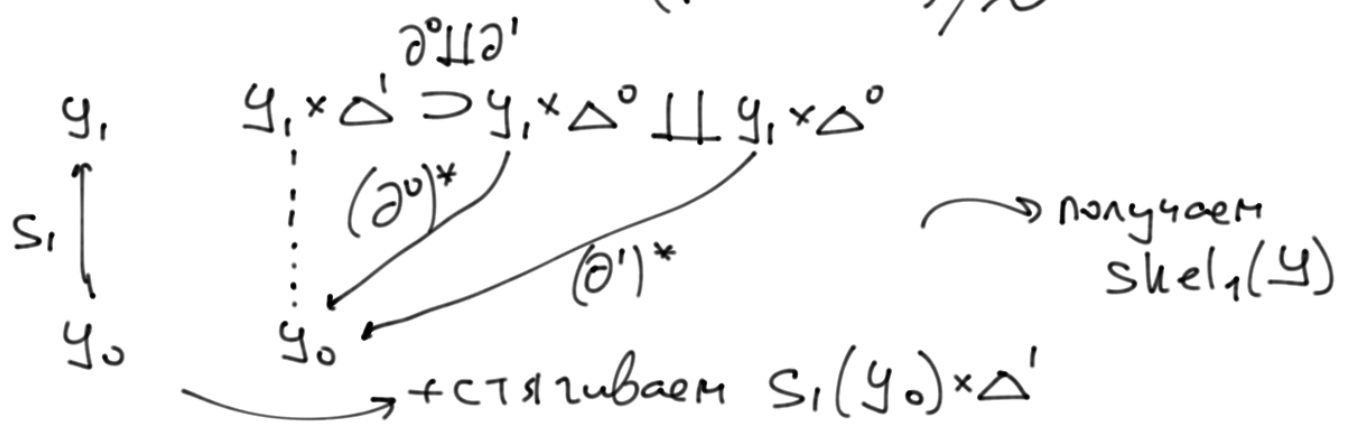
вложение + тотализация

$$\Delta^{op} \xrightarrow{y} CW$$

$$y = \begin{pmatrix} \dots \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} \mapsto |y| - CW\text{-комплекс}$$

$$\parallel$$

$$\left(\coprod y_n \times \Delta^n \right) / \sim$$



$$skel_1(Y) \coprod \left(\coprod_{\substack{\Delta^1 \hookrightarrow \Delta^2 \\ \partial_i}} y_2 \times \Delta^1 \right) \longrightarrow skel_1(Y)$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$skel_1(Y) \coprod (y_2 \times \Delta^2) \longrightarrow skel_2(Y)$$

$$y_0 = * \rightsquigarrow skel_1(Y) = Y_1 \wedge S^1 \hookrightarrow |Y|$$

$S^1 \rightsquigarrow$ хотим построить BS^1

$$\left| \begin{pmatrix} S^1 \times S^1 \times S^1 \\ S^1 \times S^1 \\ S^1 \end{pmatrix} \right| \longrightarrow \left| \begin{pmatrix} S^1 \times S^1 \\ S^1 \\ * \end{pmatrix} \right|$$

S^1 действует диагонально на каждом уровне

расслоение со слоем S^1