$\boxed{11.11.2013}$

И.А. Панин

Δ: объекты — $[n]=\{0,1,\dots,n\}$, морфизмы — неуб. отображения

$\underline{\underline{C}}$ — категория $\rightsquigarrow$ функтор $\Delta^{op} \xrightarrow{X_\bullet} \underline{\underline{C}}$ — симпл. объект в $\underline{\underline{C}}$

морфизм из $X_\bullet$ в $Y_\bullet$ — ест. преобр. функторов

$\underline{\underline{C}} = Sets \rightarrow$ симпл. множество; $\Delta^{op} Sets = sSets$

$$X = \begin{pmatrix} \dots \\ X_2 \\ \downarrow\downarrow\downarrow \\ X_1 \\ \downarrow\downarrow \\ X_0 \end{pmatrix}$$

$\Delta^{op} \longrightarrow sSets$ — симпл. пр-ва

$\updownarrow$ $(\Delta^{op} \longrightarrow Sets)$

$\Delta^{op} \times \Delta^{op} \longrightarrow Sets$ = бисимпл. мн-ва

Симплициальное топологическое пр-во: $\Delta^{op} \xrightarrow{X_\bullet} CW$

Рассмотрим $\|\cdot\| : \Delta^{op}\text{-}Sets \longrightarrow CW$

$$\Delta^{op}\text{-}Sets \ni X_\bullet$$

$$X_n \times \Delta^n = \coprod_{x \in X_n} \Delta^n \rightsquigarrow \coprod_{n \geq 0} X_n \times \Delta_n$$

$x \in X_n,\ y \in \Delta^k$

$$\Delta^k \xrightarrow{\varphi} \Delta^n \qquad \underbrace{(x, \varphi_* y)}_{X_n \times \Delta^n} \sim \underbrace{(\varphi^* x, y)}_{\cap\ X_k \times \Delta^k}$$

Натянем на него отн-е экв-сти $\overset{\text{ин}}{\sim}$

$\boxed{\text{Опр}}$ $\|\cdot\| = \left(\coprod_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n\right) \Big/ \overset{\text{ин}}{\sim}$

$\boxed{\text{Замечание}}$ $X_n \times \Delta^n \xrightarrow{can_n} \|X_\bullet\|$

Обозначение:

$sk_n(\|X_\bullet\|) = \operatorname{Im}(can_n)$

$$\mathrm{ske}_0(\|X_\bullet\|) = X_0 \times \Delta^0 = X_0$$

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times \partial(\Delta^1) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\widetilde{can}|_{X_1\times\partial(\Delta^1)}"] & X_1 \times \Delta^1 \arrow[d, "\widetilde{can}_1"] \arrow[ddr, bend left] & \\
X_0 = \mathrm{ske}_0(\|X_\bullet\|) \arrow[r, "in_0"] \arrow[drr, bend right] & \mathrm{ske}_1(\|X_\bullet\|) \arrow[dr, dashed, "\exists!"] & \\
 & & A
\end{tikzcd}$$

Утв.: имеется включение in_0 и этот квадрат кодекартов

$$\begin{tikzcd}
(\overbrace{s^*(x)}^{x'}, \partial_*(y)) & \\
X_n \times \Delta^n \arrow[r, "\widetilde{can}_n"] & \|X_\bullet\| \\
X_{n-1} \times \Delta^{n-1} \arrow[ur, "\widetilde{can}_{n-1}"'] & \\
(\partial^* x', y) &
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ есть $\mathrm{ske}_{n-1}(\|X_\bullet\|) \underset{in_{n-1}}{\hookrightarrow} \mathrm{ske}_n(\|X_\bullet\|)$

$$\begin{tikzcd}
X_n \times \Delta^{n-1} \arrow[d, phantom, "\wr\ id\times\partial^i_*"] & \\
X_n \times \partial(\Delta^n) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\widetilde{can}_n|_{X_n\times\partial(\Delta^n)}"] & X_n \times \Delta^n \arrow[d, "\widetilde{can}_n"] \\
\mathrm{ske}_{n-1}(\|X_\bullet\|) \arrow[r, hook, "in_{n-1}"'] & \mathrm{ske}_n(\|X_\bullet\|)
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Утв.}}$ Это кодекартов квадрат

Кроме того,
$$\|X_\bullet\| = \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{ske}_n(\|X_\bullet\|)$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть $Y_\bullet : \Delta^{op} \to CW$ — симпл. топ. пр-во

$$\|Y_\bullet\| := \coprod_{n\geq 0} Y_n \times \Delta^n \Big/ \overset{\text{ин}}{\text{"}\sim\text{"}}$$

$(y, \partial_* a) \sim (\partial^* y, a)$ для $[k] \overset{\partial}{\hookrightarrow} [n]$

$\rightsquigarrow$

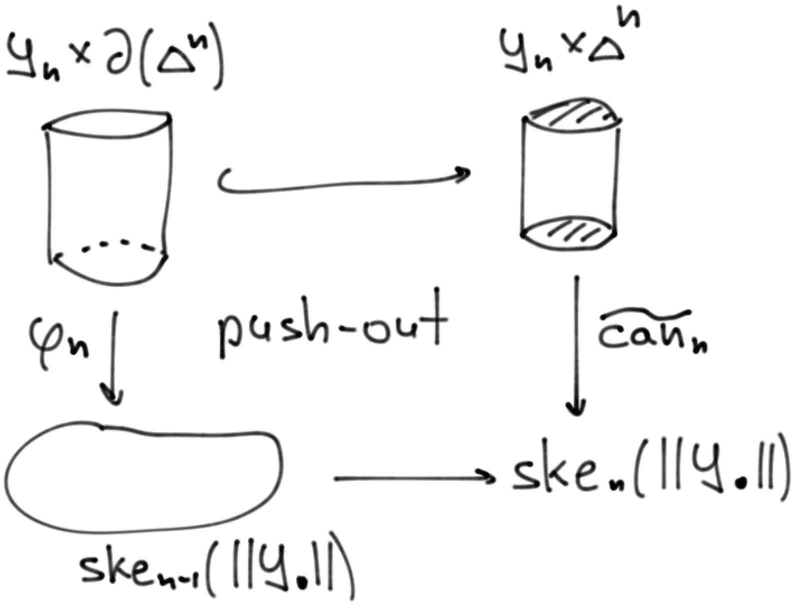
$\boxed{\text{Опр.}}$

$$\begin{tikzcd} Y_n \times \Delta^n \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "\widetilde{can}_n"'] & \coprod\limits_{i\geq 0} Y_i \times \Delta^i \arrow[r] & \|Y_\bullet\| \end{tikzcd}$$

$$ske_n(\|Y_\bullet\|) := \mathrm{Im}(\widetilde{can}_n) \subseteq \|Y_\bullet\|$$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $ske_{n-1}(\|Y_\bullet\|) \overset{}{\underset{in_{n-1}}{\hookrightarrow}} ske_n(\|Y_\bullet\|)$

<u>Д-во</u>: использовать $\partial_0 s = id : [n-1] \longrightarrow [n]$ как выше $\square$



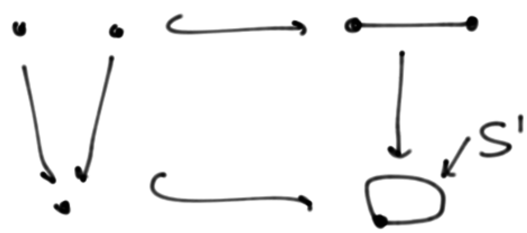
$\boxed{\text{Замечание}}$ По построению $\|Y_\bullet\| = \bigcup\limits_{n\geq 0} ske_n(\|Y_\bullet\|)$

$\boxed{\text{Пример}}$ $\|\Delta[0]\| = \bigcup\limits_{n\geq 0} ske_n(\|\Delta[0]\|)$

$ske_0 = pt$

$$\begin{tikzcd} \partial(\Delta^1) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \Delta^1 \arrow[d] \\ pt = ske_0 \arrow[r, hook] & ske_1 \end{tikzcd}$$

:



$\varphi \sim \mathrm{id}$

$$\begin{tikzcd}
\partial(\Delta^2) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi"'] & \Delta^2 \arrow[d] \\
S^1 \arrow[r, hook] & sk_2
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Упр.}}$ $\varphi' \sim \varphi : A \to B$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i"', "cof"] \arrow[d] & C \arrow[d, "\psi"] \\
B \arrow[r, hook, "j", "cof"'] & D
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i", "cof"'] \arrow[d, "\varphi'"'] & C \arrow[d, "\psi'"] \\
B \arrow[r, hook, "j'"] & D'
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow D \simeq D'$ гомот. экв

$$\begin{tikzcd}
\partial(\Delta^3) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \Delta^3 \arrow[d] \\
\Delta^2 \arrow[r, hook] & sk_3 \simeq S^3
\end{tikzcd}$$

стягиваем $\cong$ pt

$$\rightsquigarrow \Delta^0 \hookrightarrow S^1 \hookrightarrow (\Delta^2)' \hookrightarrow (S^3)' \hookrightarrow (\Delta^4)' \hookrightarrow \dots$$

$\boxed{\text{Предложение}}$ Пусть $A_\bullet : \Delta^{op} \longrightarrow CW$ — симпл. топ. пр-во

Пусть $A_0 = pt$ (или стягиваемо), $p_n : A_n \xrightarrow{\prod i_k^*} A_1 \times \dots \times A_1$ —

гомотоп. эквивалентность.

$$\begin{pmatrix} [n] & \longleftarrow & [1] \\ k-1 & \longleftarrow & 0 \\ k & \longleftarrow & 1 \end{pmatrix}$$

$m : \{0,1\} \longrightarrow \{0,1,2\}$

$0 \longmapsto 0$

$1 \longmapsto 2$

$$A_1 \xleftarrow{m^*} A_2 \xrightarrow[\sim]{p_2} A_1 \times A_1 \rightsquigarrow A_1 \text{ — комм. моноид в } Ho$$

Пусть моноид $(A_1, m \circ p_2^{-1})$ является групповым объектом

($\Longleftrightarrow \pi_0 A_1$ — группа)

$$\begin{tikzcd}
S^1 \wedge A_1 \arrow[r] & \| A_\bullet \| \\
S^1 \times A_1 \arrow[u] \arrow[ur, bend right] &
\end{tikzcd}$$

Тогда $S^1 \wedge A_1 \longrightarrow \| A_\bullet \|$ $\rightsquigarrow A_1 \xrightarrow[\sim]{} Map_\bullet(S^1, \|A_\bullet\|) = \Omega^1(\|A_\bullet\|)$

гомотоп. экв-сть!

Если Предложение верно и $\widetilde{A}_\bullet$ — Γ-пространство,

$$\begin{tikzcd} \Gamma^{op} \arrow[r, "\widetilde{A}_\bullet"] & CW \\ \Delta^{op} \arrow[u] \arrow[ur, "A_\bullet"'] & \end{tikzcd}$$

$$\mathbb{B}\widetilde{A} := \left(\widetilde{A}((1)), \mathbb{B}\widetilde{A}((1)), \mathbb{B}^2\widetilde{A}((1)), \dots\right)$$

$$S^1 \wedge \widetilde{A}((1)) \to \mathbb{B}\widetilde{A}((1)),\ S^1 \wedge (\mathbb{B}^n\widetilde{A})((1)) \to \mathbb{B}^{n+1}\widetilde{A}((1))$$

легко показать, что $\mathbb{B}^n\widetilde{A}((1))$ связны $(n \geq 1)$ $\rightsquigarrow$ удовлетворяют условиям Предложения $\rightsquigarrow$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $(\mathbb{B}^n\widetilde{A})((1)) \xrightarrow{\sim} \Omega^1(\mathbb{B}^{n+1}\widetilde{A})((1))$ — гомот. экв-сть

$\rightsquigarrow \pi_i(\widetilde{A}((1))) \xrightarrow{\sim} \pi_i(\mathbb{B}\widetilde{A})$

$\underline{\underline{A}}$ — адд. кат. $\rightsquigarrow A : \Gamma^{op} \longrightarrow CW$; $K_i(\underline{\underline{A}}) := \pi_i(A((1)))$

$(K_i^{\oplus})^{Q}(A) = K_i(\underline{\underline{A}})$ — теорема

$\pi_i(A((1))) = \pi_i(\mathbb{B}A)$ — Теорема

Напоминание: $E = (E_0, \dots, E_n, \dots)$ — спектр, $S^1 \wedge E_n \xrightarrow{\sigma_n} E_{n+1}$

E задает теорию когомологий

$X \in CW_\bullet \rightsquigarrow \mathbb{E}^i(X)$: $[X, E_i]_\bullet \longrightarrow [S^1 \wedge X, E_{i+1}]_\bullet \longrightarrow \cdots$

$X \to E_i \rightsquigarrow S^1 \wedge X \longrightarrow S^1 \wedge E_i \longrightarrow E_{i+1}$

при $i \geq 0$ $\mathbb{E}^i(X) = \varinjlim_n [S^n \wedge X, E_{i+n}]_\bullet$

при $i < 0$ — нужно отбросить первые несколько.

Правило $X \longmapsto \mathbb{E}^i(X)$ — теория когомологий на CW

$\mathbb{E}_i(X, Y) := \mathbb{E}^i(X/Y)$

$X \underset{\text{корасс.}}{\supseteq} Y$

Пример: $X = S^0$ и $E_n = \Omega^1(E_{n+1})$

$\rightsquigarrow \mathbb{E}^i(S^0) = [S^0, E_i]_\bullet = \pi_0(E_i)$

В нашем примере при $i>0$ $\mathbb{E}^i(S^0) = 0$

при $i<0$: $\mathbb{E}^i(S^0) = [S^{-i}, E_0]_\bullet$

У нас $E_0 = \tilde{A}((t)) = A((t))$

Спектр топологической K-теории:

$\mathcal{K} = (BU, U, BU, U, \ldots)$, где $BU = Gr(\infty, 2\infty) = \bigcup\limits_{n \geq 0} Gr(n, \mathbb{C}^{2n})$