18.11.2013

И.А. Панин

$X*Y$ = джоин X и Y

$X=S^0,\ Y=S^0 \rightsquigarrow X*Y=S^1$

$X \hookrightarrow X*Y$

$Y \hookrightarrow X*Y$

$(S^0*S^0)*S^0 = S^1*S^0 = S^2$

$S^n*S^0 = S^{n+1}$

Теперь пусть σ — инволюция, $\sigma \curvearrowright X$, $\sigma \curvearrowright Y \Rightarrow \sigma*\sigma \curvearrowright X*Y$

(вообще, джоин — бифунктор)

В примере $X=S^0,\ Y=S^0$ получаем станд. инволюцию на S^1

На $S^0*S^0*\dots*S^0$ инволюция $\sigma*\dots*\sigma$ имеет вид $x\mapsto -x$

$$S^0*S^0*S^0*\dots = \bigcup_{n\geq 1} \underbrace{S^0*\dots*S^0}_{n} = S^\infty$$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ действует на $S^\infty \rightsquigarrow$ есть $\left(\bigcup_{n\geq 1} S^0*\dots*S^0\right)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

$$\mathbb{RP}^\infty = \bigcup_{n\geq 1}\mathbb{RP}^n$$

$$\|$$

$B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ — конструкция Милнора

$\rightsquigarrow$ конструкция Сигала

$\rightsquigarrow$ конструкция Вальдхаузена

$S^1*S^1 = S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$

$S^1*S^1*S^1 = S^5$

$\dots$

$$\bigcup_{n\geq 1}\underbrace{S_1*\dots*S_1}_{n} = \bigcup_{n\geq 1} S^{2n-1} = S^\infty$$

$\forall z \in S^1$

$$\begin{tikzcd} S^1*S^1 \arrow[r, "z*z"] \arrow[d, "\cong S^3"'] & S^1*S^1 \arrow[d, "S^3\cong"] \\ \mathbb{C}^2 \arrow[r, "m_z"] & \mathbb{C}^2 \end{tikzcd}$$

$(a,b) \mapsto (za, zb)$

$$\bigcup_{n\geq 1}\left(\underbrace{(S_1 * \dots * S_1)}_{n} \Big/ \begin{pmatrix}\text{диаг.}\\ \text{действие}\\ S^1\end{pmatrix}\right) = \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{C}P^{n-1} = \mathbb{C}P^{\infty}$$

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d] & S^{\infty} \arrow[d] \\ * \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \mathbb{C}P^{\infty} \end{tikzcd}$$

— это конструкция Милнора для S^1 пространства BS^1

Здесь S^{∞} стягиваемо, S^1 действует на S^{∞} свободно. Фактор-пространство S^{∞} по действию S^1 — это BS^1

Вопрос: что такое BG для хорошей топологической группы G?

Ответ: $BG = EG/_{G}$, где EG стягиваемо и G свободно действует на EG

Замечание: G и BG связаны следующим образом: $G = \Omega^1(BG)$. $\rightsquigarrow \pi_i(G) = \pi_{i+1}(BG)$

Конструкция (Серра) гомотоп. слоя отображения: Каждое отображение CW пространств можно заменить на „эквивалентное" ему расслоение Серра

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & Y^{new} \arrow[dl, "f^{new}"] \\ X & \end{tikzcd}$$

1. f^{new} — расслоение Серра
2. i — гомотоп. эквивалентность

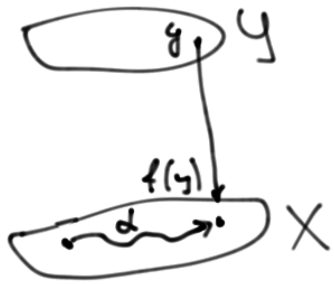
$F^{new} := (f^{new})^{-1}(x_0)$ — гомотопический слой $\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} & \pi_i F \arrow[d] & & \pi_{i-1} F \arrow[d] \\ \dots \arrow[ur] & \pi_i Y^{new} = \pi_i Y \arrow[d] & & \pi_{i-1} Y^{new} \arrow[d] \\ & \pi_i X \arrow[uurr] & & \pi_{i-1} X \end{tikzcd}$$

Сама конструкция:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "f"] & Y^{new} \arrow[dl] \\
x_0 \in X &
\end{tikzcd}
\qquad Y^{new} = \{(y, \alpha : I \to X) \mid \alpha(1) = f(y)\} \subset Y \times Map(I, X)$$

$$f^{new} : (y, \alpha) \mapsto \alpha(0)$$



$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "i"] \arrow[drr, "\text{пост.путь в } f(y)"] \arrow[ddr, bend right, "id"'] & & \\
& Y^{new} \arrow[r] \arrow[d, "p_Y"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Map(I, X) \ni \alpha \arrow[d] \\
& Y \arrow[r, "f"] & X \ni \alpha(0)
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ введем на Y^{new} топологию расслоенного произведения

$$f^{new} = f \circ p_Y$$

Частный случай: $Y = \{y\}$, $f(y) = x \rightsquigarrow Y^{new} = \{\alpha : I \to X \mid \alpha(1) = x\}$

Слой $F^{new} \to Y^{new} \to X$

$$\begin{array}{l}
F^{new} \\
\quad \parallel \\
\{\alpha : I \to X \mid \alpha(1) = \alpha(0) = x\} \\
\quad \parallel \\
\Omega^1(X, x) \hookrightarrow Map_\bullet((I, 1), (X, x)) \to X
\end{array}$$

$Map_\bullet((I,1),(X,x)) = Y^{new}$ — стягиваемо

$$\rightsquigarrow \pi_i(X, x) \cong \pi_{i-1}(\Omega(X, x), \bullet)$$

Функториальность конструкции Серра:

$$\begin{tikzcd}
'Y \arrow[rr, "'i"] \arrow[ddr, bend right, "'f"'] & & 'Y^{new} \ni (g(y), \alpha) \arrow[ddl] & \\
& Y \arrow[ul] \arrow[rr, "i"] \arrow[d, "f"] & & Y^{new} \ni (y, \alpha) \arrow[ul, dashed] \arrow[dll] \\
& X & &
\end{tikzcd}$$

Следствие: если g — гомотоп. экв-сть, то и g^{new} — тоже.

$$\begin{tikzcd}
F = p^{-1}(x) \arrow[d] \\
E \text{ — стягиваемо} \arrow[d, "p"', "\text{— рассл. Серра}"] \\
X
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ F гомотопически эквивалентно пространству $\Omega(X,x)$.

<u>Док-во:</u>

$$\begin{tikzcd}
\Omega'(X,x) \arrow[r] \arrow[d] & F = p^{-1}(x) \arrow[d] \\
\mathrm{Map}_\bullet(I,X) \arrow[r, "g"] \arrow[dr] & E \arrow[d] \\
& X
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow \pi_i(\Omega'(X,x)) \cong \pi_i(F)$

$\rightsquigarrow g|_{\Omega'(X,x)}$ — гомот. экв-сть

$$\begin{tikzcd}
& F = p^{-1}(x) \arrow[d] & \\
pt \arrow[r] \arrow[d] & E \ni e \arrow[d, "p"] & e \arrow[d, mapsto] \\
\mathrm{Map}_\bullet(I,X) \arrow[r, "i"] \arrow[ur, dashed, "\exists g"] & X \ni x & x \\
\alpha \arrow[r, mapsto] & \alpha(0) & \\
\Omega(X,x) \ni \alpha \arrow[u] \arrow[ur, mapsto] \arrow[uuuur, bend left] & &
\end{tikzcd}$$

Еще одна конструкция: любое $A \xrightarrow{g} B$ можно заменить на корасслоение

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d] & A \times I \arrow[d] & A \arrow[l, hook', "i_0"'] \arrow[dl, dashed, "g^{new}"] \\
B \arrow[r] & \mathrm{Cyl}(g) \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start] &
\end{tikzcd}$$

Общая конструкция

$A \in sSets \rightsquigarrow PA \in sSets$

$$\Delta \xrightarrow{P} \Delta$$

$$[n] \longmapsto [n+1]$$

$$(\theta : [m] \to [n]) \longmapsto (\varnothing : [m+1] \longrightarrow [n+1])$$

$$0 \longmapsto 0$$

$$i \underset{(i>0)}{\longmapsto} \theta(i-1)+1$$

$$\begin{tikzcd} \Delta^{op} \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "PA"'] & \Delta^{op} \arrow[d, "A"] \\ & Sets \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccccc} A: & A_0 & A_1 & A_2 & \dots \\ \uparrow & \uparrow \partial_0 & \uparrow \partial_0 & \uparrow \partial_0 & \\ PA: & A_1 & A_2 & A_3 & \dots \end{array}$$

$$\partial_0 : [n] \longrightarrow [n+1]$$

$$i \longmapsto i+1$$

$\boxed{\text{Утв.}}$ $|PA|$ стягиваемо, если $A_0 = \Delta[0]$

$$\begin{tikzcd} A \times \Delta[0] \arrow[r] \arrow[d, "id \times \partial^0"] & A_0 \arrow[d] \\ A \times \Delta[1] \arrow[r] & A \\ A \times \Delta[0] \arrow[u, "id \times \partial^1"] \arrow[r, "id"] & A \arrow[u, "id"] \end{tikzcd}$$

$\Delta[1]_n = Map([n],[1])$

$n+2$ штуки

$$(A \times \Delta[1])_n = \coprod_{i=1}^{n+2} A_n \longrightarrow A_n$$

(0) $id : A_n \to A_n$

(1) $A_n \xrightarrow{\partial^0} A_{n-1} \xrightarrow{s_0} A_n$

(2) $A_n \xrightarrow{\partial^0} A_{n-1} \xrightarrow{\partial^0} A_{n-2} \xrightarrow{s^0} A_{n-1} \xrightarrow{s^0} A_n$

...

$$(PA)_0 = A_1 \times \Delta[0] = \coprod_{a \in A_1} \Delta[0]$$

$$A_1 \times \Delta[0] \longrightarrow PA \rightsquigarrow |A_1 \times \Delta[0]| \longrightarrow |PA|$$

$$A_1 = |A_1 \times \Delta[0]|$$

$$\begin{tikzcd} {|A_1 \times \Delta[0]|} \arrow[r] \arrow[d] & {|PA|} \arrow[d] \\ pt \arrow[r] & {|A|} \end{tikzcd}$$

Если $A_\bullet$ — симпл. пр-во, то все можно повторить:

$A_\bullet : \Delta^{op} \longrightarrow Top$

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d] & \|PA\| \arrow[d] \\
pt \arrow[r] & \|A\|
\end{tikzcd}$$

<u>Теорема</u> Если $A : \Gamma^{op} \longrightarrow Top$ — тополог. Γ-пространство, причем $\pi_0(A_1)$ — группа, то

$$\begin{tikzcd}
A((1)) \arrow[r] \arrow[d] & \|PA\| \arrow[d] \\
pt \arrow[r] & \|A((\bullet))\|
\end{tikzcd}$$

— <u>гомотопически расслоенный квадрат</u>

$A((1)) \simeq \Omega(\|A(\cdot)\|)$

$$\begin{tikzcd}
 & & F(p^{new}) \arrow[d] \\
 & & E^{new} \arrow[dl, "p^{new}"] \\
F \arrow[r] \arrow[d] \arrow[uurr, bend left] & E \arrow[ur] \arrow[d, "p"'] & \\
* \arrow[r] & B &
\end{tikzcd}$$

т.е. $F \longrightarrow F(p^{new})$ — гомот. экв-сть

Иначе говоря:

$$\begin{tikzcd}
X[F] \arrow[r] \arrow[d] & X[E] \arrow[d] \\
pt = [X, pt] \arrow[r] & X[B]
\end{tikzcd}$$

декартов $\forall X \in CW$

т.е. $[X, F] = p(X)^{-1}(pt)$