$\boxed{25.11.2013}$

И.А. Панин

Пусть A — симпл. мн-во. Поговорим про PA — симпл. мн-во путей в A. $(PA)_n := A_{n+1}$

$$P: \Delta \longrightarrow \Delta$$

$$\begin{tikzcd} {[n]} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\theta"'] & {[n+1]} \arrow[d, "\varphi"] \\ {[m]} \arrow[r, mapsto] & {[m+1]} \end{tikzcd}$$

$\varphi(0)=0$

$\varphi(i)=\theta(i-1)+1$

$$\begin{tikzcd} (PA)_n \arrow[r, equal] \arrow[d, "p"'] & A_{n+1} \arrow[d, "\partial_0"] \\ A_n \arrow[r, equal] & A_n \end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow \begin{tikzcd} \Delta^{op} \arrow[r, "P"] \arrow[rr, bend right, "PA"'] & \Delta^{op} \arrow[r, "A"] & Sets \end{tikzcd}$$

Если X — симпл. множество, то есть $X_0 \longrightarrow |X|$

$$\rightsquigarrow \begin{tikzcd} A_1 = (PA)_0 \arrow[r] \arrow[d, "\partial_0"'] & {|PA|} \arrow[d, "|p|"] \\ A_0 \arrow[r] & {|A|} \end{tikzcd}$$

„$\boxed{\text{Утв.}}$" PA стягиваемо на A_0 как симпл. мн-во

Y — CW-комплекс, $Sing(Y)$ — симпл. мн-во:

$$(Sing(Y))_n = Map(\Delta^n, Y)$$

$PY = Map(I, Y) \rightsquigarrow$ есть $Sing(PY)$

$$(Sing\, PY)_0 = Map(I, Y)^{дискр}$$

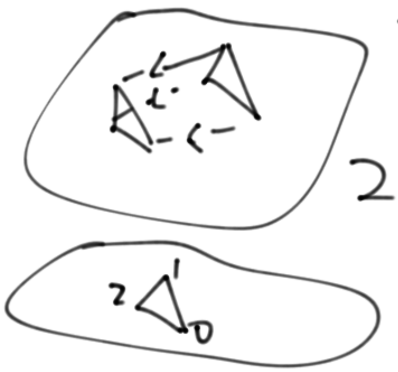
$$(Sing\, PY)_n = Map(\Delta^n, Map(I, Y))$$

$$Y^{дискр} \longrightarrow Sing(PY)_0 = Map(I, Y)$$

$$\ni y \longmapsto \text{пост. путь}$$

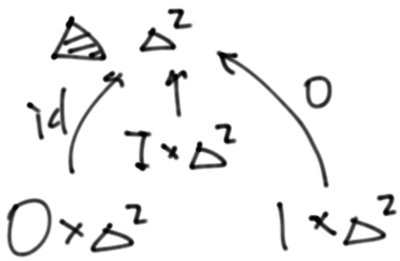
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sing}(PY) \arrow[d] & \sigma : \Delta^n \arrow[r] & \mathrm{Map}(I, Y) \arrow[d] \\
\mathrm{Sing}(Y) & & \mathrm{Map}(\{0\}, Y) \\
& & Y \arrow[u, phantom, "\shortparallel"]
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Утв.}}$ $\mathrm{Sing}(PY)$ стягивается на $Y^{\text{дискр.}}$



2 симплекс $\downarrow$ 2 симплекс, пост. по I

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d] & {|PA|} \arrow[d] \arrow[d, phantom, shift left=6ex, "(*)"] \\
A_0 \arrow[r] & {|A|}
\end{tikzcd}$$



$$\begin{tikzcd}
\varphi \\
\mathrm{Map}(I, Y)^{\text{дискр}} \arrow[u, phantom, "\in"] \\
\mathrm{Sing}(PY)_0 \arrow[u, phantom, "\shortparallel"] \arrow[r] \arrow[d] & {|\mathrm{Sing}(PY)|} \arrow[d] \\
Y^{\text{дискр}} \arrow[r] & {|\mathrm{Sing}(Y)|} \\
\varphi(0)
\end{tikzcd}$$

Еще одна „модель" для квадратика $(*)$:

$\mathcal{C}$ — категория $\rightsquigarrow$ построим $P\mathcal{C}$

$\{0<1\} = I : \mathrm{Ob}(I) = \{0; 1\}$, $\mathrm{Mor}(0,0) = \{id_0\}$, $\mathrm{Mor}(1,1) = \{id_1\}$, $\mathrm{Mor}(0,1) = \{h : 0 \to 1\}$, $\mathrm{Mor}(1,0) = \varnothing$

Свойство: Если $\mathcal{A} \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} \mathcal{B}$ — функторы; $\alpha : G \to F$ — ест. преобр. $\rightsquigarrow$ $\exists!$ функтор

$$\begin{tikzcd}
\{1\} \times \mathcal{A} \arrow[dr] \arrow[rrr, bend left, "F"] & & & \\
& I \times \mathcal{A} \arrow[rr, "H"] & & \mathcal{B} \\
\{0\} \times \mathcal{A} \arrow[ur] \arrow[rrru, bend right, "G"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Обратно:

$$\begin{tikzcd}
\{1\}\times A \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "F"] & & \\
& I\times A \arrow[r, "H"] & B \\
\{0\}\times A \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "G"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(1,a) \\
(0,a) \arrow[u, "{(h,id_a)}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{aligned}
&H(1,a) = F(a)\\
&\uparrow H((h,id_a)) =: \alpha(a)\\
&H(0,a) = G(a)
\end{aligned}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(a) \arrow[r, "F(\varphi)"] & F(a') \\
G(a) \arrow[u, "\alpha(a)"] \arrow[r, "G(\varphi)"] & G(a') \arrow[u, "\alpha(a')"'] \\
a \arrow[r, "\varphi"] & a'
\end{tikzcd}$$

правило $a \longmapsto \{\alpha(a): G(a) \longrightarrow F(a)\}$

задает преобразование $\alpha: G \longrightarrow F$

Как построить H?

$$H(1,a) = F(a)$$

$$H(0,a) = G(a) \qquad H((h,\varphi))$$

$$\varphi: a \longrightarrow b$$

$$\begin{tikzcd}
F(a) \arrow[r, "F(\varphi)"] & F(b) \\
G(a) \arrow[u, "\alpha(a)"] \arrow[r, "G(\varphi)"'] & G(b) \arrow[u, "\alpha(b)"']
\end{tikzcd}$$

Построим категорию PC:

$$Ob(PC) = Funct(\{0<1\}, C)$$

$$Mor(F_1, F_2) = \begin{cases} \varnothing, \text{ если } F_1(0) \neq F_2(0) \\ F_1(0) = F_2(0) \end{cases}$$

$\ni \alpha$

$$\boxed{\begin{matrix}\alpha(0)\\ \shortparallel \\ id\end{matrix}} \qquad C \qquad \begin{tikzcd} & F_1(1) \arrow[dl, "\alpha(1)"] \\ F_2(1) & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\{0<1\} \arrow[r, bend left, "F_2"] \arrow[r, bend right, "F_1"'] & C
\end{tikzcd} \quad \Uparrow\alpha$$

Почему так? $(PC)_n = C_{n+1}$

$\boxed{\text{Утв.}}$ $|N(PC)|$ „стягиваем" к множеству $Ob(C) = C_0$

$$\begin{tikzcd} PC \arrow[rr, "id=F"] \arrow[rr, bend right, "G"'] \arrow[dr] & & PC \\ & C_0 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$f \in PC \mapsto f(0) \in C_0$, $a \in C_0 \mapsto (a \xrightarrow{id} a) \in PC$

C_0 — дискр.категория

т.е. есть преобр. $G \to F$

→ получим

$$\begin{tikzcd} Ob(PC) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\partial_0"'] & (NC)_1 \arrow[r, hook] \arrow[d] & PC \arrow[d] \\ Ob(C) \arrow[r, equal] & (NC)_0 \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

Предъявим $\alpha : G \to F = id$

$$\begin{tikzcd} & (a_0 \xrightarrow{f} a_1) \\ (a_0 \xrightarrow{f} a_1) \arrow[ur, mapsto, "F"] \arrow[dr, mapsto, "G"'] & \\ & (a_0 \xrightarrow{id} a_0) \arrow[uu, "{(id,f)}"'] \end{tikzcd}$$

$(id, f) \in Mor(PC)$

→ по G, F и α получаем функтор

$$\{0<1\} \times PC \xrightarrow{H} PC$$

→ применяем геометрическую реализацию

$$\begin{tikzcd} \{1\} \times |N(PC)| \arrow[d] \arrow[dr, "id"] & \\ {[0,1]} \times |N(PC)| \arrow[r] & |N(PC)| \\ \{0\} \times |N(PC)| \arrow[u] \arrow[r] & |N(C_0)| \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$|N(C_0)| = \overset{\text{мн-во}}{C_0} = Ob(C)$

$\boxed{\text{Утв.}}$ В $N(PC)$ есть симпл. подмн-во (дискретное) $Ob\, C = C_0$

Имеется симплициальная ретракция $r : N(PC) \to C_0$

Общая картинка

Пусть $Y: \Delta^{op} \longrightarrow Top$ — симплициальное пр-во

Положим $PY = Y \circ P$, где $P: \Delta \longrightarrow \Delta$ был описан выше
$$[n] \longrightarrow [n+1]$$
$$\dots$$

→ имеется морфизм
$$\begin{tikzcd} PY \arrow[d, "p"'] \\ Y \end{tikzcd} \longleftrightarrow \begin{tikzcd} (PY)_n = Y_{n+1} \arrow[d, "\partial_0"] \\ Y_n \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (PY)_0 = Y_1 \arrow[r] \arrow[d, "\partial_0"'] & {|PY|} \arrow[d, "|p|"] \\ Y_0 \arrow[r] & {|Y|} \end{tikzcd}$$

квадрат коммутативен

Предположим, что $Y_0 = pt$. Хочется иметь критерий того, что этот квадрат гомотопически декартов: $\forall X \in CW$

$$\begin{tikzcd} {[X, A_1]} \arrow[r] \arrow[d] & {[X, B_1]} \arrow[d] \\ {[X, A_2]} \arrow[r] & {[X, B_2]} \end{tikzcd}$$

декартов

$\boxed{\text{Предложение}}$ Пусть $f: A' \longrightarrow A$ — отображение симп. пр-в такое, что $\forall\ [m] \xrightarrow{\theta} [n]$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} A'_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & A'_m \arrow[d, "f_m"] \\ A_n \arrow[r] & A_m \end{tikzcd}$$

гомотопически декартова. Тогда

$$\begin{tikzcd} \Delta^n \times A'_n \arrow[r] \arrow[d] & {|A'|} \arrow[d] \\ \Delta^n \times A_n \arrow[r] & {|A|} \end{tikzcd}$$

гомотопически декартова

В частности (при $n=0$) диаграмма

$$\begin{tikzcd} A_0' \arrow[r] \arrow[d] & {|A'|} \arrow[d] \\ A_0 \arrow[r] & {|A|} \end{tikzcd}$$

гомотопически декартова

$$\Delta^{op} \longrightarrow \Gamma^{op} \xrightarrow{A} Top$$

Пусть $A_0 = \{pt\}$

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d] & {|PA|} \arrow[d, "p"] \\ pt = A_0 \arrow[r] & {|A|} \end{tikzcd}$$

$$(2) \xleftarrow{m_2} (1)$$

$$\{1,2\} \longleftarrow\!\!\shortmid\ 1$$

$$\begin{tikzcd} A((1)) \times A((1)) \arrow[drr, "pr_1"'] & A((2)) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "m_2^*"] \arrow[dr, "\partial_0"] & A_1 = (PA)_0 \arrow[d, "\partial_0"] \\ & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A((1)) \times A((1)) \arrow[dr, "pr_1"'] & A((2)) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "m_2^*"] \arrow[d, "\partial_0"] & A_1 = (PA)_0 \arrow[d, "\partial_0"] \\ & A((1)) \arrow[r, "m_2^*"'] & A_0 = pt \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A((1)) \times A((1)) \arrow[r, "+"'] \arrow[d, "pr_1"'] & A((1)) \arrow[d] \\ A((1)) \arrow[r] & pt \end{tikzcd}$$