

Новое определение мотивного пространства

Shv - категория пучков множеств на $(Sm/k)_{\text{lis}}$

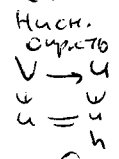
$\Delta^{op} Shv \quad (\Delta^{op} \longrightarrow Shv)$

Опр. Пусть $f: X \longrightarrow Y$ - морфизм в $\Delta^{op} Shv$

① f называется слабой эфф-стью (W_s) - симплициальной схем

$\Leftrightarrow \forall U \in Sm/k \quad \forall \mathcal{U} \in \mathcal{U}$
морфизм $f_{\mathcal{U}}: X(\mathcal{U}_i^h) \longrightarrow Y(\mathcal{U}_i^h)$ - слабая эфф-ентность

$\mathcal{U}_i^h = \varprojlim V$ где $\mathcal{U}_i^h = \text{Spec}(C_{\mathcal{U}_i^h})$

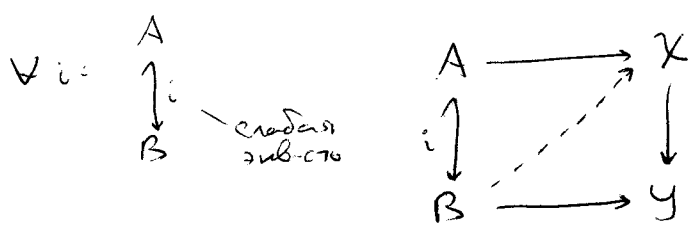


т.е. $C_{\mathcal{U}_i^h} = \varprojlim k[V]$

и $X(\mathcal{U}_i^h) := \text{colim} X(V)$

② f - корасслоение \Leftrightarrow мономорфизм

③ f - расслоение $\Leftrightarrow f$ обладает right lifting property по отношению к корасслоениям слабой эфф.



Теорема (W_s, C, F_s) задает на $\Delta^{op} Shv$ структуру модельной категории (симплициальная модельная структура)

$H_s(k) := \Delta^{op} Shv[W_s^{-1}]$

в адельском контексте - аналог $D^-(Shv_{ab})$

Дальнейшая локализация:

Опр. $X \in \Delta^{op} Shv$ называется A^1 -локальным, если

\forall симплициального пучка $\mathcal{U} \in \Delta^{op} Shv$ отображение

$\text{Hom}_{H_s(k)}(\mathcal{U}, X) \longrightarrow \text{Hom}_{H_s(k)}(\mathcal{U} \times A^1, X),$

индуцированное проекцией $\mathcal{U} \times A^1 \longrightarrow \mathcal{U}$, биективно.

Морфизм $f: X \rightarrow Y$ называется \mathbb{A}^1 -эквивалентностью, если $\forall \mathbb{A}^1$ -локального симплициально расслоенного Z отображение

$$S(Y, Z) \longrightarrow S(X, Z) \text{ — слабая эквивалентность симплициальных множеств}$$

Опр. $S(A, B)_n := \text{Hom}_{\Delta^{\text{op}} \text{Shv}}(A \times \Delta^n, B)$

$$\text{Sm}/k \hookrightarrow \text{Shv} \hookrightarrow \Delta^{\text{op}} \text{Shv}$$

↙ постоянные в симплициальном направлении функции
 $F \longmapsto ([n] \rightarrow F)$

$U \in \text{Sm}/k$. Чему равно $S(U, B)$? Ответ: $\mathcal{B}(U)$ (лемма Йондаи)

В частности, для \mathbb{A}^1 -~~эквивалентности~~ ~~...~~

Морфизм $f: X \rightarrow Y$ называется \mathbb{A}^1 -расслоением, если f обладает right lifting property по отношению к $i: A \rightarrow B$ таким, что i — мономорфизм и \mathbb{A}^1 -слабая эквивалентность.

Теорема $(W_{\mathbb{A}^1}, C, F_{\mathbb{A}^1})$ — модельная структура на ~~...~~ $\text{Hs}(k)$

$$\rightsquigarrow H_{\mathbb{A}^1}(k) := \text{Hom}_{\Delta^{\text{op}} \text{Shv}}[W_{\mathbb{A}^1}^{-1}]$$

Теорема

$$\begin{array}{c} \text{Hs}(k) = \{ \text{все симплициально расслоенные объекты в } \Delta^{\text{op}} \text{Shv} \} \\ \downarrow L_{\mathbb{A}^1} \quad \uparrow i \\ \text{H}_{\mathbb{A}^1}(k) = \{ \text{все } \mathbb{A}^1\text{-фрагментные объекты в } \Delta^{\text{op}} \text{Shv} \} \end{array}$$

↗ $[X, Y]_{\text{Hs}(k)} = \text{Hom}_{\Delta^{\text{op}} \text{Shv}}(X, Y) / \sim$ ↖ \uparrow наименьшая гомотопность
↖ \uparrow вложение
↖ \uparrow наименьшая гомотопность

Едва ли не:

$L_{\mathbb{A}^1}$ — функтор \mathbb{A}^1 -локализации,

i — полное вложение (его образ состоит из \mathbb{A}^1 -локальных объектов)

и $L_{\mathbb{A}^1}$ — левый сопряженный к i .

$$\rightsquigarrow \text{Hom}_{H_{\mathbb{A}^1}(k)}(L_{\mathbb{A}^1}(X), Y) = \text{Hom}_{\text{Hs}(k)}(X, i(Y))$$

$$\text{Hom}_{\Delta^{\text{op}} \text{Shv}}(X, Y) / \sim \quad \Delta_s^1 \in \Delta^{\text{op}} \text{Shv}$$

$\Delta^{\text{op}} \text{Sets}$

$X, Y:$ $X \xrightarrow[\beta]{\alpha} Y$ $\alpha \sim \beta$, если $\exists H^i$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y \\ \downarrow \text{injection} & \searrow & \uparrow \\ \Delta_s^1 \times X & \xrightarrow{\alpha} & Y \\ \uparrow \text{injection} & \searrow & \uparrow \\ X & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Если морфизм является симплициальной эквивалентностью, то и A^1 -эквивалентностью:

$$\begin{matrix} (W_S, C, F_S) \\ \downarrow \quad \uparrow \\ (W_{A^1}, C, F_{A^1}) \end{matrix}$$

$$H_S(k) \Leftrightarrow \text{анализ } D^-(Shv_{Ab})$$

$$H_{A^1}(k) \Leftrightarrow \text{полная подкатегория } A^* \in D^-(Shv_{Ab})$$

т.ч. $\forall i$

① $\underline{H}^i(A^*)$ — гом. члв.

② $\forall U \in H^2(U, \underline{h}^i(A^*))$ — гом. члв.

Если X — A^1 -локальный, то

$$\text{Hom}_{H_S(k)}(Y, X) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{H_S(k)}(Y \times A^1, X)$$

$$\begin{matrix} \xrightarrow{\sim} \\ \text{Hom}(Y, \underline{\text{Hom}}(A^1, X)) \\ \xrightarrow{\sim} \text{по л. Юонеду } X \simeq \underline{\text{Hom}}(A^1, X) \end{matrix}$$

Здесь $\underline{\text{Hom}}(A, B)(U)_n = \text{Hom}(A \times U \times \Delta^n, B)$

Связь со старым определением H_{A^1} :
геометрическая реализация

$$\begin{matrix} | - | : \Delta^{op} Shv & \rightleftarrows & Shv & : \text{Sing}_* \\ & & \downarrow \text{ш } \downarrow & \\ & & \text{Sing}_*(\mathbb{F}) & \leftarrow & \mathbb{F} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{Sing}_*(\mathbb{F})_n \\ \parallel \\ \underline{\text{Hom}}_{Shv}(\Delta^n, \mathbb{F}) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} W_{A^1} \subset \text{Mor}(Shv) \\ \downarrow \\ S \Leftrightarrow \text{Sing}_*(\mathbb{F}) \in W_{A^1} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} C_{A^1} - \text{мониторизмы} \\ F_{A^1} \end{matrix}$$

Теорема

$$\Delta^{op} Shv \rightleftarrows Shv \text{ переводят м.е. в м.е.}$$

\Rightarrow и

$$H_{A^1}^{new}(k) \rightleftarrows H_{A^1}^{old}(k) \text{ — взаимно обратные экв-сти}$$