16.04.2012

Мы хотим посчитать умножение в $CH^*(G/P)$

$$CH^*_T(X) = CH^*((X \times ET)/_T)$$

$$\begin{array}{ccc} CH^*_T(G/P) & \longrightarrow & CH^*_T(G/P)\otimes \mathbb{Q} \otimes \binom{\text{обратные к}}{\text{характерам тора}} \\ \downarrow & & \| \text{ th локализации Ботта} \\ CH^*(G/P) & & CH^*(\underbrace{(G/P)^T}) \otimes CH^*_T(pt) \otimes \mathbb{Q} \otimes \binom{\text{обратные к}}{\text{характерам тора}} \end{array}$$

зануляем все характеры тора

набор точек, параметризованный смежными классами

<u>Пример</u> $\mathbb{P}^1$

$$CH^*(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}[x]/_{(x^2)}$$

$$CH^*_T(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}[x,y]/_{(x^2-y^2)} \qquad y \text{ — характер } \mathbb{G}_m$$

$$x^2-y^2 = (x-y)(x+y)$$

$\gcd(x-y, x+y) = 1$, если $2y$ обратим

$\rightsquigarrow$ надо обратить 2 и y

$$\rightsquigarrow CH^*_T(\mathbb{P}^1)\left[\frac{1}{2y}\right] \simeq \mathbb{Z}[y, {}^1/_{2y}] \oplus \mathbb{Z}[y, {}^1/_{2y}]$$

На $\mathbb{P}^1$ 2 неподвижные точки: $[0:1]$ и $[1:0]$.

$X_w = [BwP/P] \in CH^*_{\ell(w)}(G/P)$

клетки Шуберта

w_0 — элемент максимальной длины в W $\qquad w_0^2 = 1$

w_0^P — — // — // — // — // — // — // — W_P

$Z_w = X_{w_0 w w_0^P}$ — совместимо с коразмерностью:

$$CH^{\ell(w)}(G/P)$$

$X_u \cdot Z_w = \delta_{u,w}[pt]$ — если $\ell(u) = \ell(w)$, т.е. это „двойственный базис"

<u>двойственность Пуанкаре</u>

Более того, Z_w совместимо с заменой параболической подгруппы:

$$G/Q \longrightarrow G/P \qquad Q \leq P$$

$$\rightsquigarrow CH^*(G/P) \xrightarrow[\text{pull-back}]{} CH^*(G/Q) \qquad CH_*(G/Q) \xrightarrow[\text{push-forward}]{} CH_*(G/P)$$

$$Z_w \longmapsto Z_w \qquad X_w \longmapsto \begin{cases} X_w, & \text{если } w\text{ — мин. представитель } W/W_P \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

До локализации:

$$i: CH^*_T(G/P) \xrightarrow{\oplus(i_w)} \bigoplus_{w\in W/W_P} CH^*_T(pt)$$

$$\downarrow \qquad\qquad w \longmapsto wP/P \quad \cong (G/P)^T \qquad t_w P/P = w(t^w)P/P, \ t^w \in P$$

$CH^*(G/P)$ прямая сумма пуллбэков на неподвижные точки, i_w

Th локализации Ботта:

i становится изоморфизмом после обращения целых чисел и характеров тора

Наша первая цель — понять, куда переходит клетка Шуберта (поднятая) то есть, T-эквивариантная клетка Шуберта Z_w^T

$\boxed{\text{Лемма}}$

① $i_u(Z_w^T) = 0$, если $u \not\geq w$ в сильном порядке Брюа

② $i_w(Z_w^T) = \prod_{\{\alpha\in\Phi^+ \mid w^{-1}(\alpha)\in\Phi^-\}} \alpha \qquad (\alpha \in CH^*_T(pt))$

мощность этого множества равна $\ell(w)$

③ Если есть $x \in CH^*_T(G/P)$ такой, что $i_u(Z_w^T)=0$ для $u \not\geq w$, то $i_w(x)$ делится на $i_w(Z_w^T)$ как многочлен.

Предположим, что мы уже знаем, чему равны $i_u(Z_w^T)$.

Как тогда перемножить $x := Z_v^T \cdot Z_w^T$?

„Метод Гаусса"

Ответ: 1) смотрим на $i_u(Z_v^T Z_w^T) = i_u(Z_v^T)\cdot i_u(Z_w^T)$

2) берем минимальный элемент w' в порядке Брюа такой, что $i_{w'}(Z_v^T Z_w^T) \neq 0$

Тогда выполняется ③ в Лемме $\rightsquigarrow$ $i_{w'}(x)$ делится на $i_{w'}(Z_{w'}^T)$

Вычитаем из x $Z_{w'}^T$ с коэффициентом $\dfrac{i_{w'}(x)}{i_{w'}(Z_{w'}^T)}$

Повторяем

$\rightsquigarrow$ получим выражение для x

Как посчитать $i_u(Z_w^T)$? Вспомним про W-инвариантные многочлены:

$$(CH^*_T(pt)\otimes\mathbb{Q})^{W_P} \simeq CH^*_P(pt)\otimes\mathbb{Q}$$

$$c: \underset{\substack{\| \\ pt/\!/P}}{CH^*_P(pt)} \simeq \underset{\substack{\| \\ (G/P)/\!/G}}{CH^*_G(G/P)} \longrightarrow CH^*_T(G/P)$$

уменьшение группы

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\quad f \in (CH^*_T(P)\otimes\mathbb{Q})^{W_P}$

Тогда $i_w(c(f)) = w_0 w w_0^P(f)$

группа W действует на f

Как мы уже видели в теореме Бореля, в $CH^*(G/P)$ есть два базиса:

① Z_w — клетки Шуберта

② Из т. Бореля: берем базис из инвариантных многочленов f, считаем $c(f)$ и берем его образ в $CH^*(G/P)$

Теперь индукцией по коразмерности с использованием „метода Гаусса" можно выразить $c(f)$ через Z_w^T.

Пусть $\deg(f) = k$, $c(f) = \sum\limits_{\substack{w \in W/W_P \\ \ell(w)=k}} \alpha_w Z_w^T + \sum\limits_{\substack{w' \in W/W_P \\ \ell(w')<k}} \alpha_{w'} \boxed{Z_{w'}^T}$, $\alpha_w \in \mathbb{Q}$

$\alpha_{w'}$ — многочлены степени ≥ 1

получаем делением: $\dfrac{i_w(c(f))}{i_w(Z_w^T)}$

это мы уже знаем по предположению индукции

То есть, индукцией по k переходим от базиса Бореля к базису из $Z_{w'}^T$, и, в частности, узнаем $i_u(Z_w^T)$

$\boxed{\text{Пример}}$ G_2/P_2 

G_2/P_1 — 5-мерная квадрика

G_2/P_1 — 5-мерная не квадрика

Диаграмма Хассе:

$$\begin{array}{cccccc} \circ & \text{—}\circ & \text{—}\circ & \text{—}\circ & \text{—}\circ & \text{—}\circ \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ Z^T_{s_2s_1s_2s_1s_2} & Z^T_{(s_1s_2)^2} & Z^T_{s_2s_1s_2} & Z^T_{s_1s_2} & Z^T_{s_2} & Z^T_{1} \end{array}$$

Базис Бореля:

ω_2 — W_P-инвариантен $\rightsquigarrow$ можно взять базис из его степеней: $1, \omega_2, \omega_2^2, \ldots, \omega_2^5$

$i(c(\omega_2)) = (\omega_2, 3\omega_1 - \omega_2, -3\omega_1 + 2\omega_2, 3\omega_1 - 2\omega_2, -3\omega_1 + \omega_2, -\omega_2)$

— образы ω_2 относительно W

$Z_{s_2}^T = (*, *, *, *, \underbrace{\boxed{-3\omega_1 + 2\omega_2}}_{\alpha_2}, 0)$

$i(c(\omega_2)) + \omega_2 \cdot 1 = (2\omega_2, 3\omega_1, -3\omega_1 + 3\omega_2, 3\omega_1 - \omega_2, \boxed{-3\omega_1 + 2\omega_2}, 0)$

$\to$ это и есть $Z_{s_2}^T$

$(Z_{s_2}^T)^2 = (4\omega_2^2, 9\omega_1^2, 9\omega_1^2 + 9\omega_2^2 - 18\omega_1\omega_2, 9\omega_1^2 + \omega_2^2 - 6\omega_1\omega_2, \underline{9\omega_1^2 + 4\omega_2^2 - 12\omega_1\omega_2}, 0)$

делится на $-3\omega_1 + 2\omega_2$ с коэфф. $-3\omega_1 + 2\omega_2$

$\to (Z_{s_2}^T)^2 = (-3\omega_1 + 2\omega_2) Z_{s_2}^T + \ldots$

$$(3\omega_1-\omega_2)(-3\omega_1+2\omega_2)$$

$$18\omega_1^2-15\omega_1\omega_2+3\omega_2^2 = 3(6\omega_1^2-5\omega_1\omega_2+\omega_2^2)$$

Поэтому

$$(Z^T_{s_2})^2 = (-3\omega_1+2\omega_2)Z^T_{s_2} + 3Z^T_{s_1s_2}$$

а в обычном $CH^*(G_2/B_2)$ получаем

$$Z_{s_2}^2 = 3Z_{s_1s_2}$$

Аналогично можно посчитать и операцию Стинрода

$$S_q = \sum_{i\geq 0} t^i S_q^i$$

$$S_q(ab) = S_q(a)S_q(b)$$

$$i: CH^*_T(G/B) \longrightarrow \bigoplus_{W/W_B} CH^*_T(pt)$$

Справа S_q выглядит просто:

$$\omega_i \longmapsto \omega_i + t\omega_i^p$$