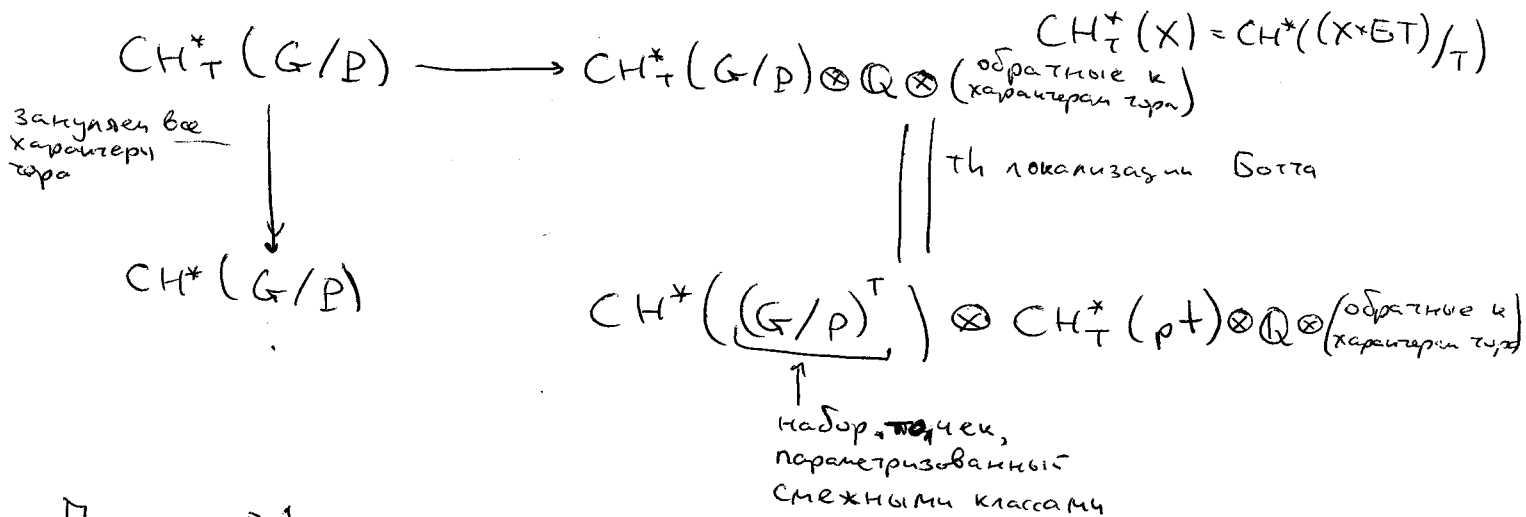


Мы хотим посчитать умножение в $CH^*(G/P)$



Пример \mathbb{P}^1

$$CH^*(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}[x] / (x^2)$$

$$CH_T^*(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}[x, y] / (x^2 - y^2) \quad y - \text{характер } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

$\gcd(x-y, x+y) = 1$, если $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ обратим
 \rightarrow надо обратить \mathbb{Z} и y

$$\rightarrow CH_T^*(\mathbb{P}^1) \left[\frac{1}{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \right] \cong \mathbb{Z} \left[\frac{1}{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \right] \oplus \mathbb{Z} \left[\frac{1}{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \right]$$

На \mathbb{P}^1 2 неподвижные точки: $[0:1]$ и $[1:0]$.

$$X_w = [B_w P / p] \in CH_{\ell(w)}^*(G/P)$$

— клетки Шуберта

w_0 — элемент максимальной длины в W $w_0^2 = 1$

$$w_0^P \text{ — — — — — } w_0^B$$

$$Z_w = X_{w_0 w w_0^2} \text{ — совместимо с размерностью;}$$

$$\uparrow$$

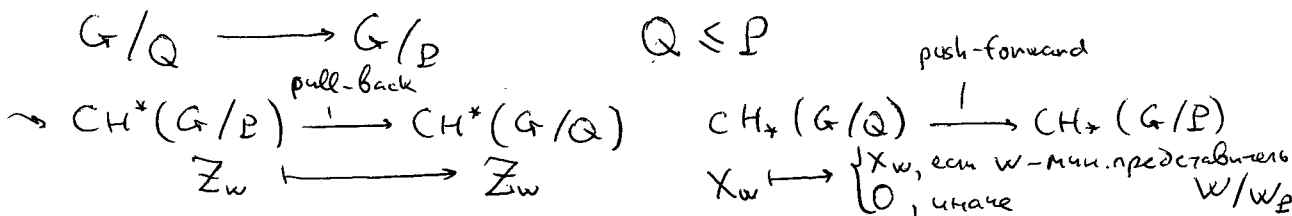
$$CH^{\ell(w)}(G/P)$$

$$X_u \cdot Z_w = \delta_{u,w} [pt] \text{ — если } \ell(u) = \ell(w)$$

, т.е. это "двойственный базис"

двойственность Пуанкаре

Более того, Z_w совместимо с заменой параболической подгруппы:



До локализации:

$$i: CH_T^*(G/P) \xrightarrow{i(w)} \bigoplus_{w \in W/W_P} CH_T^*(p^+) \cong (G/P)^T \text{ т.ч. } P/P = w(t^w)P/P$$

(прямая сумма публьэков на неподвижные точки, i_w

Th локализации Ботта:

i становится изоморфизмом после обращения целых чисел и характеров тора

Наша первая цель — понять, куда переходит клетка Шуберта (поднятая) то есть, T -эquivарантная клетка Шуберта Z_w^T

Лемма

- ① $i_u(Z_w^T) = 0$, если $u \neq w$ в сильном порядке Брюа
- ② $i_w(Z_w^T) = \prod_{\{\alpha \in \Phi^+ \mid w^{-1}(\alpha) \in \Phi^-\}} \alpha$ ($\alpha \in CH_T^*(p^+)$)
↑ мощность этого множества равна $\ell(w)$
- ③ Если есть $x \in CH_T^*(G/P)$ такой, что $i_u(Z_w^T) = 0$ для $u \neq w$, то $i_w(x)$ делится на $i_w(Z_w^T)$ как многочлен.

Предположим, что мы уже знаем, чему равны $i_u(Z_w^T)$.

Как тогда перемножить $x := Z_v^T \cdot Z_w^T$?

"метод Гаусса"

Ответ: 1) посмотрим на $i_u(Z_v^T Z_w^T) = i_u(Z_v^T) \cdot i_u(Z_w^T)$
 2) берем минимальный элемент w' в порядке Брюа такой, что $i_{w'}(Z_v^T Z_w^T) \neq 0$
 Тогда выполняется ③ в Лемме $\rightarrow i_{w'}(x)$ делится на $i_{w'}(Z_{w'}^T)$
 Вычитаем из x $Z_{w'}^T$ с коэффициентом $\frac{i_{w'}(x)}{i_{w'}(Z_{w'}^T)}$

Повторяем \rightarrow получим выражение для x

Как посчитать $i_u(Z_w^T)$? Вспомним про W -инвариантные многочлены:

$$(CH_T^*(p^+) \otimes \mathbb{Q})^{W_P} \cong CH_P^*(p^+) \otimes \mathbb{Q}$$

$$c: CH_P^*(p^+) \cong CH_G^*(G/P) \xrightarrow{\quad} CH_T^*(G/P)$$

$p^+ // P$ $(G/P) // G$ ↑ уменьшение группы

Лемма

$$f \in (CH_T^*(P) \otimes \mathbb{Q})^{W_P}$$

$$\text{Тогда } i_w(c(f)) = w_0 w w_0^P(f)$$

↑ группа W действует на f

Как мы уже видели в теореме Бореля,
в $\mathcal{H}^*(G/P)$ есть два базиса:

① Z_w — клетки Шуберта

② Из т. Бореля: берем базис из инвариантных многочленов f , считаем $c(f)$ и берем его образ в $\mathcal{H}^*(G/P)$

Теперь индукцией по размерности с использованием «метода Гаусса» можно выразить $c(f)$ через Z_w^T .

Пусть $\deg(f) = k$, $c(f) = \sum_{\substack{w \in W/W_P \\ \ell(w) = k}} \alpha_w Z_w^T + \sum_{\substack{w' \in W/W_P \\ \ell(w') < k}} \alpha_{w'} Z_{w'}^T$, $\alpha_w \in \mathbb{Q}$

получаем делением: $\frac{i_w(c(f))}{i_w(Z_w^T)}$

α_w — многочлены степени ≥ 1

это мы уже знаем по предположению индукции

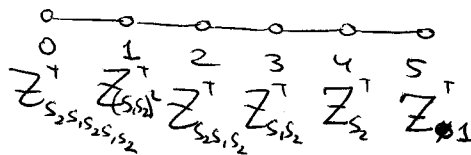
То есть, индукцией по k переходим от базиса Бореля к базису из Z_w^T , и, в частности, узнаем $i_w(Z_w^T)$

Пример G_2/P_2

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ \circ & \circ & \circ \\ 1 & & 2 \end{matrix}$$

G_2/P_1 — 5-мерная кубрица
 G_2/P_2 — 5-мерная не кубрица

Диаграмма Хассе:



Базис Бореля:

ω_2 — W_P -инвариант \leadsto можно взять базис из его степеней:
 $1, \omega_2, \omega_2^2, \dots, \omega_2^5$

$i(c(\omega_2)) = (\omega_2, 3\omega_1 - \omega_2, -3\omega_1 + 2\omega_2, 3\omega_1 - 2\omega_2, -3\omega_1 + \omega_2, -\omega_2)$
— образы ω_2 относительно W

$Z_{S_2}^T = (*, *, *, *, \underbrace{-3\omega_1 + 2\omega_2}_{\omega_2}, 0)$

$i(c(\omega_2)) + \omega_2 \cdot 1 = (2\omega_2, 3\omega_1, -3\omega_1 + 3\omega_2, 3\omega_1 - \omega_2, \underbrace{-3\omega_1 + 2\omega_2}_{\omega_2}, 0)$
 \rightarrow это и есть $Z_{S_2}^T$

$(Z_{S_2}^T)^2 = (4\omega_2^2, 9\omega_1^2, 9\omega_1^2 + 9\omega_2^2 - 18\omega_1\omega_2, 9\omega_1^2 + \omega_2^2 - 6\omega_1\omega_2, \underbrace{9\omega_1^2 + 4\omega_2^2 - 12\omega_1\omega_2}_{\text{делится на } -3\omega_1 + 2\omega_2}, 0)$
с коэф. $-3\omega_1 + 2\omega_2$

$\rightarrow (Z_{S_2}^T)^2 = (-3\omega_1 + 2\omega_2) Z_{S_2}^T + \dots$

$$(3\omega_1 - \omega_2)(-3\omega_1 + 2\omega_2)$$

$$18\omega_1^2 - 15\omega_1\omega_2 + 3\omega_2^2 = 3(6\omega_1^2 - 5\omega_1\omega_2 + \omega_2^2)$$

Поэтому

$$(Z_{S_2}^T)^2 = (-3\omega_1 + 2\omega_2)Z_{S_2}^T + 3Z_{S_1 S_2}^T$$

а в обычном $CH^*(G/P_2)$ получаем

$$Z_{S_2}^2 = 3Z_{S_1 S_2}$$

Аналогично можно посчитать и операцию Стиррода

$$S_q = \sum_{i \geq 0} t^i S_q^i$$

$$S_q(a \cdot b) = S_q(a) S_q(b)$$

$$i: CH_T^*(G/P) \longrightarrow \bigoplus_{W/W_P} CH_T^*(pt)$$

Справа S_q выглядит просто:

$$\omega_i \longmapsto \omega_i + t\omega^!$$