28.10.2013

А.Л. Смирнов

$g=0$, X/F

$X \cong \mathbb{P}^1$ или кривая второй степени в $\mathbb{P}^2$

$\ell(-K)=3$

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & P(H^0(X,L)^*) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ x & \longmapsto & \{s \in H^0(X,L) \mid s(x)=0\} \end{array}$$

$\dim = d+1$, $s_0,\dots,s_d$ - базис

x - плохая, если все сечения в ней зануляются

$$x \longmapsto [s_0(x) : \dots : s_d(x)]$$

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{P}^2 \quad P\left(\begin{array}{c} H^0(X,-K) \\ \shortparallel \\ (\Omega^1)^* \end{array}\right) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ P & & \end{array}$$

как понять, что оно определено в P?

$$\begin{array}{ll} L(-K) & 3 \\ & \vee \quad \Rightarrow \text{ok} \\ L(-K-P) & 2 \end{array}$$

Почему второй степени? $[s_0 : s_1 : s_2]$

$s_0^2, s_0s_1, s_0s_2, s_1^2, s_1s_2, s_2^2$

$H^0(X,-2K)$, сколько сечений?
$L^{\otimes 2}$

$h^0 = 4-0+1 = 5 < 6$ есть соотношение.

Пусть X/F — многообразие (проективное)

L — лин. расслоение на X

$Z = X - U$, $U \subseteq X$ открыто

Z = общие нули всех сечений $\Gamma(X, L)$

Хотим построить $X \dashrightarrow \operatorname{Proj} \operatorname{Sym}(\Gamma(X,L)^*) = P$

эл-ты степени 1: $\Gamma(X,L)^* \ni \varphi$

$\varphi : \Gamma(X, L) \longrightarrow F$

афф. кусок: $P_\varphi \rightsquigarrow$ строим $U_\varphi \longrightarrow P_\varphi$ и склеиваем

Хотим доказать, что $U = X$ для кривой

$p \in X \overset{?}{\rightsquigarrow} \exists$ сечение $s \in \Gamma(X, L) : s(p) \neq 0$. $\quad (L = (\Omega^1)^*)$

$\{(x,p)\}$

$$\begin{tikzcd} \Delta \subseteq X \times X \arrow[d] \\ X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} p_2^* L & \\ \Delta \subseteq X \times X \arrow[r] \arrow[d] & X \\ X & \end{tikzcd}$$

т. Римана-Роха на поверхности

$D = p_2^* K - \Delta$

Теперь X — кривая рода $g=1$

① Есть точка $P_0 \in X(F)$

$P_0, 2P_0, 3P_0, \dots$

$\ell(0 P_0)=1$;

$\ell(P_0)=1$

т. Римана–Роха:

$$\ell(P_0)\underbrace{-\ell(-P_0)}_{\overset{\shortparallel}{0}}=1-1+1=1$$

$\ell(2P_0)=2 \leftarrow$ ф-ция x имеет полюс 2-го порядка на

$1, x$

$\ell(3P_0)=3$ $\quad y^2=x^3+ax+b$

$1, x, y$

$\ell(6P_0)=6 \quad 1, x, y, x^2, x^3, y^2, xy \rightsquigarrow$ есть соотношение

$$y^2+a_1xy+a_3y=x^3+a_2x^2+a_4x+a_6$$

$\operatorname{char} F\neq 2 \rightsquigarrow$ м. считать $a_1=a_3=0$

после замены $y \longmapsto y+\lambda x+\mu$

$\operatorname{char} F\neq 3 \rightsquigarrow$ м. считать $a_2=0$

$\operatorname{char} F=2 \rightsquigarrow y^2=x^3+ax+b$ особая

$\rightsquigarrow t_0t_2^2=t_1^3+at_1t_0^2+bt_0^3$

$t_0=0 \rightsquigarrow t_1^3=0 \rightsquigarrow [0:0:1]=P_0\in\mathbb{P}^2$

X — алг. группа! $\rightsquigarrow X(\mathbb{Q})$ — группа

<u>т. Морделла</u> (гипотеза Пуанкаре)

Группа $X(\mathbb{Q})$ конечно порождена. (см. Мамфорд, Abelian Varieties)

Пусть K — числовое поле $\rightsquigarrow X(K)$ тоже кон. порожд.

$K=\mathbb{F}_q(C) \rightsquigarrow$ тоже верно

C кривая над $\mathbb{F}_q$

$K = \mathbb{C}(C)$, где C — кривая над $\mathbb{C}$

Верно ли это? Например, $K = \mathbb{C}(t)$

Даже $X(\mathbb{C})$ не кон. пор.

$\mathbb{A}^1$ ——— $\underset{C(t)}{\circledcirc}$ → семейство кривых над $\mathbb{C}$ постоянно

а если не постоянна? почти верно: бывает изотрив.

если не изотрив., то кон. порожд.

Алгоритм нахождения точек $X(\mathbb{Q})$ работает, если $Ш(X)$ конечна

Если точки нет:

бывает, что локально точки есть, а глобально нет:

$$3t_0^3 + 4t_1^3 + 5t_2^3 = 0 \quad (\text{Selmer})$$

$X \rightsquigarrow \mathrm{Jac}(X)$ — абелево многообразие

$\|$ якобиан (если X — кривая)

$\mathrm{Pic}(X)$

двойственны $(\mathrm{Pic}_0(X))$ совпадают для кривой

$\mathrm{Alb}(X)$

$F = \bar{F} \rightsquigarrow \mathrm{Jac}(X) = X$ для $g(X) = 1$

$F \neq \bar{F}$ (например, $F = \mathbb{Q}$) $\rightsquigarrow$ это не так!

тогда $\mathrm{Jac}(X)$ — эллипт. кривая; X — торсер над $\mathrm{Jac}(X)$:

G — алг.гр.; G действует на X, $\forall x, y \in X \, \exists! g \in G : gx = y$

т.е. $\exists\, \delta : X \times X \longrightarrow G$:

$G \times X \xrightarrow{\alpha} X$ - действие

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[d, "\delta \times p_1"', "\wr"] \arrow[dr, "p_2"] & \\ G \times X \arrow[r, "\alpha"] & X \end{tikzcd}$$

Правильное опр. торсера

топ.пр-во → сайт → топос → ∞-топос (Лури)

сайт ||

категория +
топ. Гротендика

Ob = открытые подмн-ва
Mor = вложения

кат. $\mathcal{E}$ пучков
мн-в