$\boxed{04.11.2013}$

А.Л. Смирнов

$\mathcal{E}$ — топос; $G \in \mathcal{E}$ — групповой объект, $X \in \mathcal{E}$

$G \times X \longrightarrow X$ — действие, $X \times X \longrightarrow G$ — разность

↳ формальный торсер

В $\mathcal{E} = \mathrm{Sets}$ проблема: $X = \varnothing$ подходит

Поэтому доп. условие: $X \longrightarrow 1$ — эпиморфизм

локальная тривиальность:

$$\exists V \xrightarrow{\text{эпи}} 1$$

$$\begin{array}{c} X \times V \\ \downarrow \\ V \end{array} \quad \text{— тривиальный}$$

Для торсора в качестве V можно взять X:

$$\begin{tikzcd} X \times V \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, dashed] \\ V \arrow[r] \arrow[u, bend left] & 1 \end{tikzcd}$$

Пример: F — поле, $(Sm/F)_{Zar}$ — сайт, O_n — орт. группа

X — алг. многообразие с действием O_n, не изом. O_n

но это не торсер: $X \longrightarrow \mathrm{Spec}\,F$ — не эпиморфизм

X — кривая над F, $g(X) = 1$

$$C_0 = \{2y^2 = x^4 - 17\} \qquad 2t_0^2 t_2^2 = t_1^4 - 17t_0^4$$

$$\overline{C_0} \subset \mathbb{P}^2$$

$$\begin{array}{ccc} C_0 & & (x,y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^1 & & x \end{array}$$

$t_0 = 0 \rightsquigarrow t_1^4 = 0$

$\rightsquigarrow$ точка $[0:0:1]$

$\rightsquigarrow u = t_0/t_2 = 1/y$

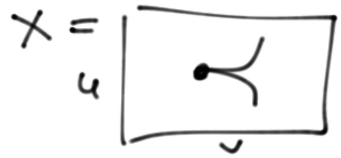
$v = t_1/t_2 = x/y$

$$2u^2 = v^4 - 17u^4$$

$$C_0 \subseteq \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$
$$(x, y) \qquad [t_0 : t_1], [s_0 : s_1]$$

$$2\left(\frac{s_1}{s_0}\right)^2 = \left(\frac{t_1}{t_0}\right)^4 - 17 \rightsquigarrow 2 s_1^2 t_0^4 = s_0^2 t_1^4 - 17 s_0^2 t_0^4$$

На бесконечности опять одна точка



Давайте тогда разрешим особенность у $2u^2 = v^4 - 17u^4$

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \arrow[d] & \hat{\mathbb{A}}_2 \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "\sigma\text{-процесс}"] \\
X \arrow[r, hook] & \mathbb{A}^2 &
\end{tikzcd}$$
$$\hat{\mathbb{A}}_2 = \{tu - sv = 0\}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} tu - sv = 0 \\ 2u^2 = v^4 - 17u^4 \end{cases} \text{ задает } \widetilde{X} \cup \mathbb{P}^1$$

$u = 0, v = 0$ – плохая точка

$\rightsquigarrow [t : s] = [1 : 0]$ для ее прообраза

$\rightsquigarrow \frac{s}{t} = z$ дает нам $\quad u = zv$

$$\rightarrow 2z^2v^2 = v^4 - 17z^4v^4$$

$$\rightarrow 2z^2 = v^2 - 17z^4v^2$$

кас. конус: $2z^2 = v^2$

$$2y^2 = x^4 - 17, \quad g(X) = 1$$

Как там устроены точки?

там было $v^2 = 2z^2 \rightsquigarrow$ на ∞ точки не рациональные

Посчитаем $\mathcal{J}(X)$

По X можно построить абелевы многообразия $\mathrm{Pic}(X)$, $\mathrm{Alb}(X)$. Для кривой они совпадают

Забудем про $\mathrm{Alb}(X)$

$\mathrm{Pic}(X)$ = группа (классов изо.) лин. рассл. на X

$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n/_F) = \mathbb{Z}$, $\mathcal{O}(-1) \longleftrightarrow 1$

На самом деле $\mathrm{Pic}(X)$ = рац. точки некоторого многообразия

Оно тоже обозначается через $\mathrm{Pic}(X)$

Проблема: таких слишком много (ну, или вообще нет)

Допустим, P кандидат на такое многообразие

Рассмотрим функтор $T \longmapsto P(T)$

$$\begin{tikzcd} P_T \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[d] \\ T \arrow[r] & * \end{tikzcd}$$

P = {лин. рассл на X}

$\rightsquigarrow P(T)$ = {лин. рассл. на $T \times X$}

получили функтор

он не представим:

это даже не пучок в топ. Зарисского:

$X = pt$; $U_0 \cup U_1 = \mathbb{P}^1$

$$\begin{tikzcd} P(\mathbb{P}^1) \arrow[r] & P(U_0) \times P(U_1) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & P(U_{01}) \\ \mathbb{Z} \arrow[r, dotted] & * & \end{tikzcd}$$

не мономорфизм

Мы хотим построить многообразие P:
$\forall p \in P$ должно быть лин. рассл. L_p на X $\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d] \\ P \times X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \forall L_T \arrow[d] & & L \arrow[d] \\ T \times X \arrow[rr, dashed] & & P \times X \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ мы получили, что такого не бывает

Еще пример:

отн. кривая рода g

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[d] & & X \arrow[d] \\ T \arrow[rr, dashed, "\exists!"'] & & M_g \end{tikzcd}$$

Это тоже пр-во модулей