$\boxed{11.11.2013}$

А.Л. Смирнов

① X — многообразие

хотим параметризовать пары (X, L)

$$\begin{array}{ccc} L_M & & m\in M \rightsquigarrow (X, L_m) \\ \downarrow & & (X, L_t) \\ M\times X & & \end{array}$$

пр-во модулей

$$t\in T \overset{\exists! u}{\dashrightarrow} M \ni m$$

$$\begin{tikzcd} L_T \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & L_M \arrow[d] \\ T\times X \arrow[r, "u\times 1"] & M\times X \end{tikzcd}$$

② Хотим описать все полные гладкие кривые рода g над полем F: построить M т.ч. $m\in M \rightsquigarrow$ кривая X_m

$$\begin{array}{c} X_M \\ \downarrow \\ M \end{array}$$ — относительная кривая

т.ч. для T и X_t $\forall t\in T$

$$\begin{tikzcd} X_T \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X_M \arrow[d] \\ T \arrow[r, "\exists!\varphi"] & M \end{tikzcd}$$

Обе эти задачи не имеют решения (в таком виде)

Но жизнь на этом не кончается.

Формы

$E_1 \quad y^2 = x^3 - x$

$E_2 \quad v^2 = u^3 - 2u$

изоморфны над $\mathbb{C}$:

$x = 2^{-1/2} u,\ y = 2^{-3/4} v$

Над $\mathbb{Q}$ они не изоморфны: у E_1 есть 4 точки порядка 2, а у E_2 — только две.

E_1, E_2 — формы друг друга

Что-угодно/F

Формы чего угодно $= H^1(\operatorname{Spec} F, \operatorname{Aut}(\text{чего угодно}))$

Принцип (Д. Орлов): если хотя бы у одного (что нибудь) есть нетрив. автоморфизм, то не $\exists$ пр-ва модулей (как схемы)

Принцип (А. Смирнов): дело не в автоморфизмах, а в формах, т.е., если есть нетрив. форма, то ...

У лин. расслоений и у элл. кривых есть автоморфизмы, а у подпр-ва нет ($\Rightarrow$ грасманиан $\exists$)

Нужно подправить задачу: добавить жесткости

Раньше: $(\operatorname{Pic} X)(T) =$ кл. изо. лин. рассл. на $X \times T$

с т эк = пучок категорий

$$\begin{array}{c} L \\ \downarrow \\ X \times T \end{array}$$

Выберем $x_0 \in X$ и фиксируем тривиализацию $L|_{x_0 \times T}$

Пусть X — кривая над F, L - лин. рассл. над X
$\to$ есть $\deg L \in \mathbb{Z}$
степень $\forall$ сечения

$\to \operatorname{Pic} X = \bigsqcup \operatorname{Pic}_n(X)$
Нас будет интересовать $\operatorname{Pic}_0 X$
Если X более общее, фиксируем L_0/X
хотим взять компоненту $\operatorname{Pic}(X)$, содержащую L_0
т.е. L, дивизор которых алг. эквивалентен дивизору L_0
В качестве L_0 м. взять тривиальное расслоение
Z_0, Z_1 — циклы на X. Когда они алг. эквивалентны?
Z — цикл в $T \times X$, $t_0, t_1 \in T$, $Z|_{t_0 \times X} = Z_0$,
$Z|_{t_1 \times X} = Z_1$

Пусть X — кривая, D — дивизор степени 0 на X
$L|_D \to \operatorname{Det}(L|_D)$ над F

$D = \sum n_i P_i \rightsquigarrow (n_i, L|_{P_i})$
одномерное в.п.
$\to$ какое-то в.п над F
$\to$ его Det - одномерное над F

зафиксируем его тривиализацию
— что-то не так!
Лекции Мамфорда: $\operatorname{Pic}_X^{\xi}(T)$ = кл. изо лин. рассл. на $T \times X$
т.ч. $\forall t$ L_t имеет числ. класс ξ

Для кривых: над $\mathbb{Q}$ $\quad X_1: \ y^2 = x^5 - 1$

$X_2: \ y^2 = x^5 - 2$

если $\exists$ пр-во модулей $\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[d] \\ M \end{tikzcd}$$

— унив. кривая на нем

$$X_1 \otimes \overline{\mathbb{Q}} = X_2 \otimes \overline{\mathbb{Q}}$$

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} \mathbb{Q} \arrow[r, shift left, "x_1"] \arrow[r, shift right, "x_2"'] & M \\ \operatorname{Spec} \overline{\mathbb{Q}} \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

— склеились 2 рац. точки: такого не бывает

Пусть теперь M — многообр. модулей лин. рассл.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[d] \arrow[drr] & & L_M \arrow[d] \\ & & M \times X \arrow[d] \\ T \arrow[rr, shift left, "\varphi_1"] \arrow[rr, shift right, "\varphi_2"'] & & M \end{tikzcd}$$

$\exists$ тривиализация $\longrightarrow \mathcal{U}$

$(T = X)$

$\exists$ нетрив. L

$$\mathcal{U} = \bigsqcup \mathcal{U}_i \longrightarrow X \text{ — покрытие}$$

На $T \times X$: $L_0 = \mathcal{O}$, $L_1 = p_T^* L$