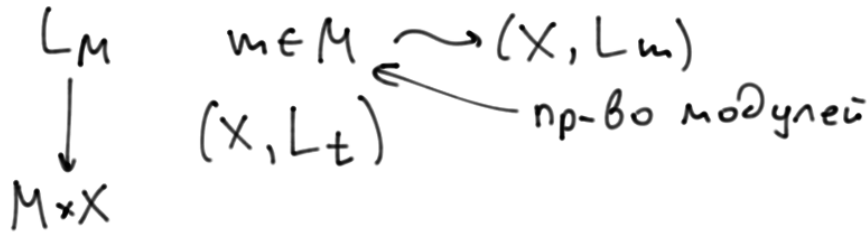


① X — многообразие

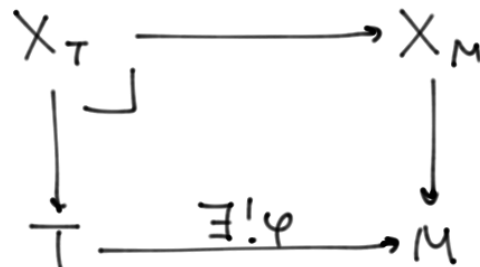
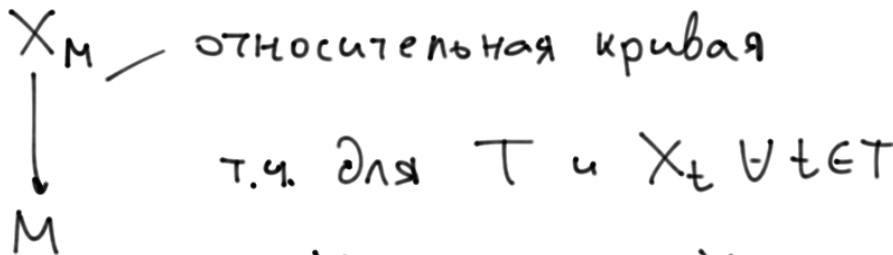
хотим параметризовать пары (X, L)



$$t \in T \xrightarrow{\exists! \eta} M \ni m$$



② Хотим описать все полные гладкие кривые рода g над полем F : построить M т.ч. $m \in M \rightsquigarrow$ кривая X_m



Обе эти задачи не имеют решения (в таком виде)
 Но жизнь на этом не кончается.

Формы

$$\begin{array}{l} E_1 \quad y^2 = x^3 - x \\ E_2 \quad v^2 = u^3 - 2u \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \end{array}} \right\} \text{изоморфны над } \mathbb{C} : \\ x = 2^{-1/2} u, \quad y = 2^{-3/4} v$$

Над \mathbb{Q} они не изоморфны: у E_1 есть 4 точки порядка 2, а у E_2 — только две.

E_1, E_2 — формы друг друга

Что-угодно/ F

Формы чего угодно $= H^1(\text{Spec } F, \text{Aut}(\text{что угодно}))$

Принцип (Ф. Орлов): если хотя бы у одного (что угодно) есть нетрив. автоморфизм, то не \exists пр-ва модулей (как схемы)

Принцип (А. Смирнов): дело не в автоморфизмах, а в формах, т.е., если есть нетрив. форма, то...

У лин. расщеплений и у эллиптических кривых есть автоморфизмы, а у подпр-ва нет (\Rightarrow трансманчант \exists)

Нужно подправить задачу: добавить жесткости

Раньше: $(\text{Pic } X)(T) = \text{кл. изв. лин. рассл. на } X \times T$

стэк = пучок катеторий

$$\begin{array}{c} L \\ \downarrow \\ X \times T \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Выберем } x_0 \in X \text{ и фиксируем тривиализацию} \\ L|_{x_0 \times T} \end{array}$$

Пусть X — кривая над F , L — лчн. рассл. над X
 \rightarrow есть $\deg L \in \mathbb{Z}$
 \hookrightarrow степень \forall сечения

$$\rightarrow \text{Pic } X = \bigsqcup \text{Pic}_n(X)$$

Нам будет интересоваться $\text{Pic}_0 X$

Если X более общее, фиксируем L_0/X

хотим взять компоненту $\text{Pic}(X)$, содержащую L_0
 т.е. L , дивизор которых ал. эквивалентен дивизору L_0

В качестве L_0 м. взять тривиальное расслоение

Z_0, Z_1 — циклы на X . Когда они ал. эквивалентны?

Z — цикл в $T \times X$, $t_0, t_1 \in T$, $Z|_{t_0 \times X} = Z_0$,

$$Z|_{t_1 \times X} = Z_1$$

Пусть X — кривая, D — дивизор степени 0 на X

$$L|_D \rightarrow \text{Det}(L|_D) \text{ над } F$$

$$D = \sum n_i P_i \rightsquigarrow (n_i, L|_{P_i})$$

\hookrightarrow одномерное в.п.

\rightarrow какое-то в.п. над F

\rightarrow это Det — одномерное над F

Зафиксируем эту тривиализацию

— что-то не так!

Лекции Мамфорда: $\text{Pic}_X^{\xi}(T) =$ кл. из лчн. рассл. на $T \times X$

т.ч. $\forall t$ L_t имеет числ. класс ξ

Для кривых: над \mathbb{Q} $X_1: y^2 = x^5 - 1$

$X_2: y^2 = x^5 - 2$

если \exists пр-во модулей \sim

\mathcal{E}

— утв. кривая на нем

\downarrow
 M

$$X_1 \otimes \overline{\mathbb{Q}} = X_2 \otimes \overline{\mathbb{Q}}$$

$$\rightarrow \text{Spec } \mathbb{Q} \begin{array}{c} \xrightarrow{x_1} \\ \xrightarrow{x_2} \end{array} M$$

\uparrow
 $\text{Spec } \overline{\mathbb{Q}}$

— склеились 2 разн. точки: такого не бывает

Пусть теперь M — многообр. модулей лнн. рассл.

\mathcal{E} триви-
ализация \rightarrow

\mathcal{U}

L_M

$\mathcal{U} = \coprod \mathcal{U}_i \rightarrow X$ — покрытие

\downarrow
 $M \times X$

$(T=X)$

\downarrow
 T

$\xrightarrow{\varphi_1}$

\downarrow
 M

$\xrightarrow{\varphi_2}$

\mathcal{E} нетрив. L

\mathcal{E}

$$\text{На } T \times X: L_0 = \mathcal{O}, L_1 = p_T^* L$$