18.11.2013

А.Л. Смирнов

Хотим по кривой X построить $\mathrm{Jac}(X)$;
более общо: по многообразию — схему $\mathrm{Pic}\,X$
$\mathrm{Jac}\,X = \mathrm{Pic}_0 X$ (а есть еще $\mathrm{Pic}_1 X$, $\mathrm{Pic}_{-1} X, \ldots$)

Рассмотрим функтор

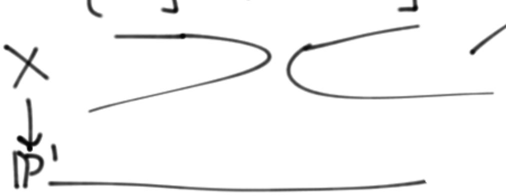
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d] \\ T \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

$T \longmapsto \mathrm{Pic}(X \times T)$
(не представим

$T \longmapsto \mathrm{Pic}(X\times T) / \mathrm{Pic}\,T$

— это уже представимый функтор
(но не обяз. многообразие, если X — многообразие)

X — кривая
$\mathrm{Pic}_0 X$ — абелево многообразие, $\dim \mathrm{Pic}_0 X = g$
$\mathrm{Pic}_0 X$ действует на $\mathrm{Pic}_n X$, и $\mathrm{Pic}_n X$ — торсер
$2y^2 = x^4 - 17$ $\quad 3t_0^3 + 4t_1^3 + 5t_2^3 = 0$ — кривые рода 1
— есть точки над $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{R}$, но не над $\mathbb{Q}$ (?!)
$2t_0^2 t_2^2 = t_1^4 - 17 t_0^4$ — особая!
$\forall$ кривой $\exists!$ гладкая полная комп. модель
$\{2y^2 = x^4 - 17\}$



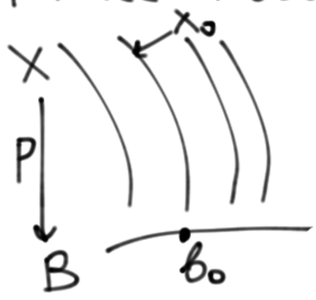
4 точки ветвления

$y^2 = f(x)$ — гиперэллипт. кривая

$$\deg f = \begin{cases} 3,4 \longrightarrow g=1 \\ 5,6 \longrightarrow g=2 \\ \ldots \end{cases}$$

dim пр-ва модулей кривых рода g равна $3g-3$. Почему?

Класс Кодаиры–Спенсера



$$\overset{\cap}{H^1}(X_0, TX_0)$$

Считаем, что X_0 компактно и связно

$$0 \longrightarrow T_B X \longrightarrow TX \longrightarrow p^*TB \longrightarrow 0$$

$$\rightsquigarrow \quad H^0(X, p^*T_B) \longrightarrow H^1(X, T_B X)$$

— отображение Кодаиры–Спенсера

$i: X_0 \hookrightarrow X \rightsquigarrow$ получим

$$\begin{tikzcd} H^0(X_0, i^*p^*TB) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(X_0, TX_0) \\ T_{b_0}B \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

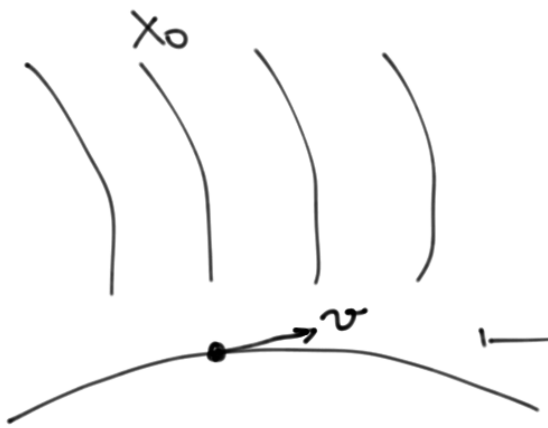
Теперь пусть X – кривая; посчитаем $H^1(X, T_X)$

$\| \leftarrow$ двойств.!

$H^0(X, \underbrace{K^{\otimes 2}})$

$\rightsquigarrow \dim = 2(2g-2)-g+1$

$= 3g-3$



$$\longmapsto ? \in H^1(X_0, TX_0)$$

поднимаем v по кусочкам, на пересечениях не сойдется $\rightsquigarrow$ разность вдоль слоя $\rightsquigarrow$ попали в H^1

Итак, кривых рода g известно сколько.
А сколько гиперэллипт.?

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ \mathbb{P}^1 \end{array}$$

$g(X) = g \rightsquigarrow$ точек ветвления $2g+2$

$\mathrm{Aut}\,\mathbb{P}^1 = PGL_2$

$2g+2-3 < 3g-3$ при $g>2$

$g=2$: любая кривая рода 2 гиперэллиптична

$E = \{y^2 = x^3 + ax + b\}$ — всегда есть рац. точка ($[0:0:1]$)

$\to$ j-инвариант

$2y^2 = x^4 - 17$

$$j(E) \overset{?}{=} \frac{4a^3}{4a^3+27b^2} \in \mathbb{A}^1 \subseteq \mathbb{P}^1$$

грубое пр-во модулей (над $\mathbb{C}$)

$v^2 = u^3 + u$

$v^2 = u^3 + 2u$

$v^2 = u^3 + 17u$

все они одинаковы над $\mathbb{C}$;

у них $j=1$

$E \cong E' \Leftrightarrow j(E) = j(E')$

над а.з. полем

Кривая рода 1 над $\mathbb{C}$ совпадает со своим якобианом:

$x_0 \in X(\mathbb{C}) \rightsquigarrow \mathrm{Jac}\,X = (X, x_0)$

$$\mathrm{Div}_0(X) / \mathrm{H.Div}(X) \ni D, \quad \deg D = 0$$

гл. дивизоры

$x - x_0$

X $\quad x$

$\Downarrow ?$

$D \sim [x] - [x_0]$

$D + [x_0]$ — степени 1 $\rightsquigarrow$

$$h^0(D+x_0) - \overbrace{h^1(D+x_0)}^{=0} = 1 - g + 1 = 1$$

Пусть $f \in H^0(\mathcal{D} + x_0)$

$\exists!\, x:\ \operatorname{div} f = [x] - [x_0] - \mathcal{D}$

Что делать с $2y^2 = x^4 - 17$?

Возьмем точку $y=0,\ x = \sqrt[4]{17}$ и построим по X

аб. многообразие E $\quad X = \operatorname{Pic}_1 X$

$\qquad J(X) = \operatorname{Pic}_0 X$

$X \longrightarrow E$ — действие E на X:

$\mathbb{Q}[\sqrt[4]{17}] \longrightarrow X \longrightarrow X$ над $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{17}]$

— оно будет над $\mathbb{Q}$

На X есть точка степени $2 \longrightarrow S^2 X \longrightarrow \operatorname{Pic}_2 X \cong \operatorname{Pic}_0 X$

$X = \{a t_0^3 + b t_1^3 + c t_2^3 = 0\} \xrightarrow{?} \operatorname{Jac}(X) = \{t_0^3 + t_1^3 + abc\, t_2^3 = 0\}$

$$\begin{array}{ccc} X: & 2y^2 = x^4 - 17, & P = (\alpha, 0):\ \alpha^4 = 17 \\ \downarrow & (x,y) \mapsto x & \downarrow \\ \mathbb{P}^1 & x & \alpha \end{array}$$

$x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ — подходит $x \longmapsto \dfrac{1}{x-\alpha} = u$

$\alpha \longmapsto \infty$

$x = \dfrac{1}{u} + \alpha$

$\rightarrow 2y^2 = \left(\dfrac{1}{u} + \alpha\right)^4 - 17$

$2y^2u^4 = (1+\alpha u)^4 - 17u^4 = 4\alpha^3u^3 + 6\alpha^2u^2 + 4\alpha u + 1$

$$2yu^2 =: w$$

$$w^2 = (2du)^3 + 3(2du)^2 + 4(2du) + 2$$

$$t := 2du$$

$$w^2 = t^3 + 3t^2 + 4t + 2$$

$$w^2 = (t+1)^3 + (t+1)$$

Сейчас есть E, X, и X — E-торсор (E-абелево мн-е)

Кроме того, $4[X] = 0$:

$$\begin{tikzcd} H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), E(\overline{\mathbb{Q}})) \arrow[d] & \ni & {[X]} \arrow[d] \\ H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K), E(\overline{\mathbb{Q}})) & & 0 \end{tikzcd}$$

$K = \mathbb{Q}[\sqrt[4]{17}]$

$X \simeq E$ над K

$$0 \longrightarrow E_4(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow E(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow E(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow 0$$