25.11.2013

А. Л. Смирнов

$$P_X : T \longmapsto \mathrm{Pic}(X \times T)$$

$$\rightsquigarrow \check{H}^0(T, P_X) = \mathrm{Pic}(X \times T)/\mathrm{Pic}(T)$$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d] \\ T \end{tikzcd}$$

строго плоский

$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} & & P_X(S) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, equal] & P_X(S \times_T S) \\ \mathrm{Pic}(T) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Pic}(S \times X) & \\ & \mathrm{Pic}(S) \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Подбираем $S$: для $L \in \mathrm{Pic}(T)$ берем то $S$, на котором он тривиализуется $\rightsquigarrow$ $L$ уходит в $0 \in P_X(S)$

---

над $K$

Пусть $X$ — кривая рода 1. Есть ли на ней точки?

$X \rightsquigarrow E = \mathrm{Jac}\, X = \mathrm{Pic}\, X$

$E \times X \longrightarrow X$, $X \times X \longrightarrow E$ $\rightsquigarrow$ торсор

$G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \rightsquigarrow H^1(G, E)$

$[X] \in H^1(G, E)$ 1-коцикл = функция на $G$

$$\sigma \longmapsto p^\sigma - p \quad \text{для } p \in X(\overline{K})$$

есть точки $\longleftrightarrow$ коцикл тривиален

$p \in X(\overline{K})$ на самом деле лежит в $X(L)$, где $L/K$ конечно

В примере $2y^2 = x^4 - 17$ можно взять $x=2,\ y=\sqrt{-1/2}$

$$
\begin{tikzcd}
\rightsquigarrow [X] \in H^1(G,E) \arrow[d] & = H^1(K,E) \arrow[d, "i^*"'] \\
0 & H^1(L,E) \arrow[u, bend right, "tr = i_* = i_!"']
\end{tikzcd}
$$

композиция ↻
$\parallel$
умножение на степень

$$
\begin{tikzcd}
\bar{K} \arrow[d, dash, "H"'] \arrow[dd, dash, bend right, "G"'] \\
L \arrow[d, dash] \\
K
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
BH \arrow[d, "i"'] \\
BG
\end{tikzcd}
$$

$\rightsquigarrow [X] \in H^1(G,E)_n$
$(n = [L:K]$

$\mathcal{F}$ - пучок на $X$, $\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \\ Y \end{tikzcd}$

$$
\begin{aligned}
&H^i(X,\mathcal{F}) \\
&\parallel \\
&\mathrm{Hom}_{D_X}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F}[i]) \\
&\parallel \qquad \mathbb{Z}_X = Lf^*\mathbb{Z}_Y \\
&\mathrm{Hom}_{D_Y}(\mathbb{Z}_Y, Rf_*\mathcal{F}[i])
\end{aligned}
$$

Для трансфера ($tr$) нужно накладывать условия на $f$

$(f^*, f_*, f_!, \ldots)$ $\qquad Rf_*\mathcal{F} \xrightarrow{?} \mathcal{E}$ $\qquad \mathcal{F} = f^*\mathcal{E}$

Итак, $[X] \in H^1(K,E)_n$, где $n = [L:K]$ (в примере $n=2$)

$$0 \longrightarrow E_n \longrightarrow E \xrightarrow{\cdot n} E \longrightarrow 0$$

— т. посл-сть (считаем, что $\mathrm{char}\, K = 0$)

$$0 \to H^0(K,E_n) \to H^0(K,E) \xrightarrow{n} H^0(K,E) \to \underset{[X]}{H^1(K,E_n)} \to H^1(K,E) \xrightarrow{n}$$

кон. пор.: $[K:\mathbb{Q}] < \infty$

$$0 \to E(K)/n \to H^1(K,E_n) \to \overset{\ni}{H^1(K,E)_n} \to 0$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & E(K)/n \arrow[r] & H^1(K,E_n) \arrow[r] & H^1(K,E)_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & & \bigoplus_v H^1(K_v,E)_n &
\end{tikzcd}$$

считается „легко"

$$\begin{tikzcd}
Ш(K,E) \arrow[d] \\
H^1(K,E) \arrow[d] \\
\bigoplus_v H^1(K_v,E)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
G = Gal(\overline{K}/K) \\
G_v = Gal(\overline{K_v}/K_v) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{matrix} K & \subset & \overline{K} \\ \cap & & \\ K_v & & \end{matrix}$$

Гипотеза: $Ш(K,E)$ конечна

$\wr$ гр. Брауэра

(Tate, Geom. analogue of BSD)

Spec $\mathbb{Z}$ 

группа Зельмера

$$0 \to E(K)/n \to S_n(K,E) \to Ш(K,E)_n \to 0$$

считается „легко"

Предположим, что $E_n(\overline{K}) = E_n(K)$ и что $\mu_n \subset K$

$\rightsquigarrow$ надо считать $H^1(K,\mu_n) = K^*/(K^*)^n$

($n=2$, $K=\mathbb{Q}$ $\rightsquigarrow$ это огромная группа)

Сложно увидеть образ $E(K)/n$ в группе Зельмера

Пусть теперь $n \mid N$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^2 \arrow[r] \arrow[dr, bend right] & E(K)/N \arrow[r] \arrow[d] & S_N(K,E) \arrow[r] \arrow[d] & \text{Ш}(K,E)_N \arrow[d] \\
& E(K)/n \arrow[r] & S_n(K,E) \arrow[r] & \text{Ш}(K,E)_n \\
E_N \arrow[ur, bend right] \arrow[d, "\cdot (N/n)"] & & & \\
E_n & & &
\end{tikzcd}$$

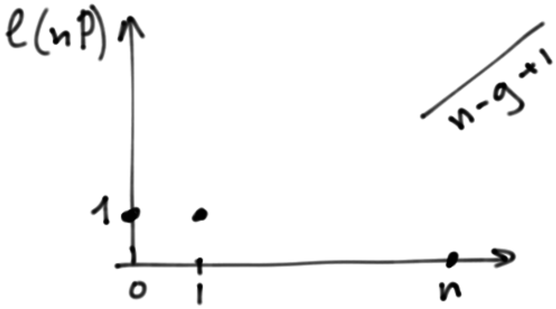
$$E(K) = E(K)_{tor} \oplus \mathbb{Z}^2$$

## Якобианы кривых рода 2

Кривые над $\mathbb{C}$ $\qquad X/\mathbb{C},\ g(X)=g$

• Точки Вейерштрасса

$P \in X$. Рассмотрим дивизоры $0, 2P, 3P, 4P, \ldots$ и посчитаем $\ell(nP) = \dim H^0(X, \mathcal{O}(nP))$




$\ell(P) = 1$, если $g>1$

$\ell(nP) = n-g+1$ при $n \gg 0$

$\ell(nP)$ – неубывающая,

$\ell((n+1)P) - \ell(nP) \leq 1$