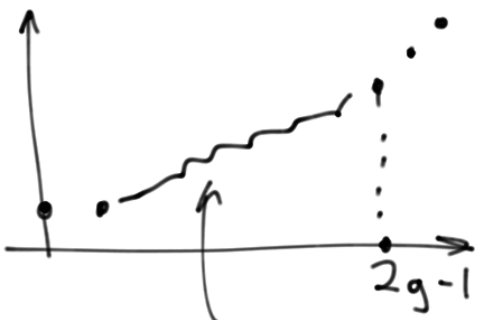
02.12.2013

А.Л. Смирнов

Точки Вейерштрасса: X кривая над $\mathbb{C}$, $P \in X$, $g>1$

дивизоры $0P, 1P, 2P, \ldots \rightsquigarrow$ считаем $\ell(kP) = h^0(\mathcal{O}(kP))$



$\ell(kP) = k-g+1$, $k \geq 0$

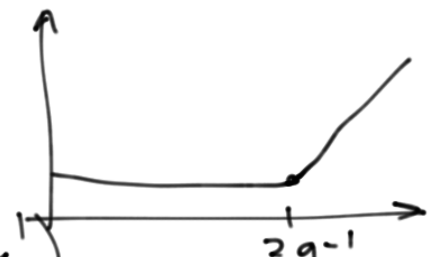
— начиная с $\ell(K-kP)=0$

т.е. например при $k > 2g-2$

ℓ не убывает и $\ell((k+1)P) \leq \ell(kP)+1$

Факты (есть ли хорошее доказательство?):

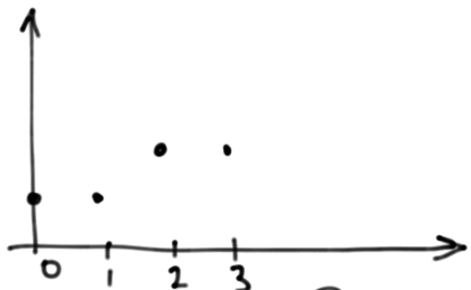
для почти всех P картинка такая:



остальные — точки Вейерштрасса

их $(g-1)g(g+1)$ (с учетом кратности!)

$g=2 \rightsquigarrow 6$ точек:



— есть функция с полюсом порядка 2: $x \in \mathbb{C}(X)$, $v_P(x) = -2$

$$\begin{array}{ccc} X & & Q \\ {\scriptstyle 2}\downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^1 & & x(Q) \end{array}$$

X — гиперэллиптическая; одну точку $\mapsto \infty$

$y^2 = x^5 + \cdots$ + 5 корней

$$\begin{array}{c} J(X) \text{ — ?} \\ \| \\ J \end{array}$$

Опишем Pic_2 (геометрически это то же самое, что Pic_0 — над $\mathbb{C}$)

$J(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2/\Lambda$, $\Lambda \cong \mathbb{Z}^4$ $\rightsquigarrow$ это $(S^1)\times(S^1)\times(S^1)\times(S^1)$

$\mathcal{O}(P)$ — лин. расслоение

$\updownarrow$

$\mathcal{O}(P - P_\infty)$

$P^\infty \longmapsto 0$

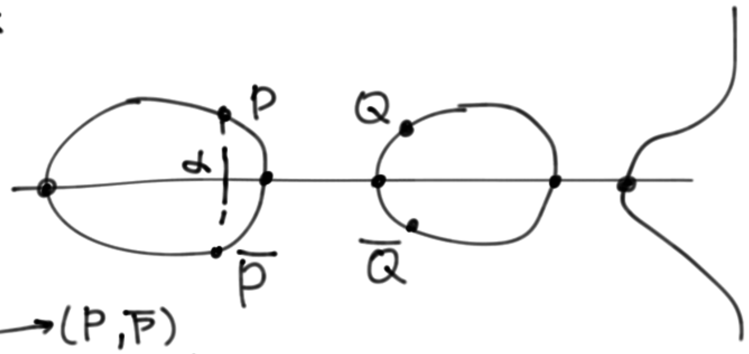
$X \longrightarrow J$

$\rightsquigarrow$ есть $X \times X \longrightarrow J$ — за счет сложения

① это сюръекция (по т. Римана-Роха)

② $S^2 X \longrightarrow J$ — не инъективно

X:



покажем, что

$(P, \bar{P}) \longmapsto 0$

$P + \bar{P} - 2P_\infty \sim 0$

$\text{“}\operatorname{div}(x - \alpha)$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "P \mapsto (P,\bar{P})"] \arrow[r, shift right, "\Delta"'] & X \times X \arrow[d] \arrow[dr] & \\
 & S^2 X \arrow[r] & J
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{P}^1 \subset S^2 X$

Хотим доказать: прообраз $0 \in J$ в S^2X — исключ. кривая $\mathbb{P}^1$, а прообразы остальных точек одноточечны

В общем случае аналогично, $S^g X \longrightarrow J(X)$ — тут искл. дивизор (Θ-дивизор)

$(P, Q) \longmapsto P + Q - 2P_\infty$

$X \times X \longrightarrow J$

Почему это сюръекция? $D - 2P_\infty \in J$, $\deg D = 2$

хотим доказать, что $\exists\, P, Q : D \sim P + Q$ ($\forall$ дивизора степени 2)

Кан. класс на X: $\deg K = 2g - 2 = 2$; $K = P + \bar{P}$ $(\forall P)$

$\rightsquigarrow \ell(D) - \ell(2P_\infty - D) = 2 - 2 + 1 = 1$

$2P_\infty - D$ степени 0; $\ell(2P_\infty - D) \neq 0 \leftrightarrow 2P_\infty - D \sim 0$

$\Rightarrow$ либо а) $D \sim 2P_\infty$, $\ell(D) = 2$

либо б) $D \nsim 2P_\infty$, $\ell(D) = 1 \rightsquigarrow D = 2$ точки

Посчитаем слой:

$$P_1 + Q_1 - 2P_\infty \sim P_2 + Q_2 - 2P_\infty$$

$$\rightsquigarrow P_1 + Q_1 - P_2 - Q_2 \sim 0$$

$$\ell(P_2 + Q_2) = \begin{cases} 1 \rightsquigarrow \text{прообраз состоит из одной точки} \\ 2, \text{ если } P_2 + Q_2 \sim 2P_\infty \end{cases}$$

$P_2 + Q_2 \sim 2P_\infty$

— есть 2 функции с полюсом ≥ -2 в ∞: 1 и x

$\rightsquigarrow a + bx$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & X \times X \arrow[d] \\ P \arrow[r, mapsto] \arrow[dr] & (P, \bar{P}) \arrow[d] \\ & \{P, \bar{P}\} \quad S^2 X \end{tikzcd}$$

двулистно, кроме 6 точек $\rightsquigarrow$ образ $= \mathbb{P}^1$

Абелево многообразие:

1. Алг. группа
2. полная
3. Геом. неприводима

Над $\mathbb{C}$ это всегда $\mathbb{C}^g / \Lambda$: $\Lambda \cong \mathbb{Z}^{2g}$

(проективны)

$\mathbb{Z}^g \longrightarrow \mathbb{C}^g \longrightarrow \mathbb{C}^2/\Lambda$ — комплексное аналитич. мн-е

— комплексный тор

1. Начиная с $g=2$ не все компл. торы алгебраичны
2. Начиная с $g=2$, аб. многообразия никогда не являются полными пересечениями

Теорема Лефшеца о гиперплоском сечении:

$X \subseteq \mathbb{P}^n$ — гладкое проективное

H — гиперпл. сечение в $\mathbb{P}^n$

$\rightsquigarrow \quad H^i(X) \xrightarrow{\sim} H^i(X \cap H), \quad i < \frac{1}{2}(\dim_{\mathbb{R}} X)$

Как на это смотреть? Пусть X — кривая: $\dim X = 1$

Выкинем из X точку $\rightsquigarrow$ результат аффинный, и он стянется на одномерный остов

Вообще, если U — афф. d-мерное $\rightsquigarrow$ с гомотопической точки зрения U $\leq d$-мерно (т.е. гомот. экв. CW-комплексу с клетками разм. $\leq d$)

$X \cap V$ ← гиперпов. $\quad X - X \cap V = X - X \cap H$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dr] & \mathbb{P}^n \arrow[d] \\ & \mathbb{P}^N \end{tikzcd}$$

(см. Милнор, Теория Морса)

Двойственное утверждение для гомологий тоже полезно

$$X \cap H = Z \hookrightarrow X \hookleftarrow U = X - Z$$

$$\to H^i(X, Z) \longrightarrow H^i(X) \longrightarrow H^i(Z) \longrightarrow H^{i+1}(X, Z)$$

хотим: $H^i(X, Z) = 0$ при маленьких i

На самом деле $H^i(X, Z) = H^i_c(U)$

— некомпактно

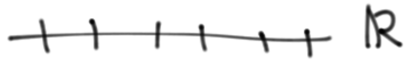
компакт. Александрова

$$H_i^{cl}(X) = H_i^{BM}(X) \leftarrow H_i(X_\bullet)/H_i(pt)$$

здесь портится гомотоп. инвар-сть

$$H_i^{comp}(X) = H_i(X)$$

в BM это умирает, а это появляется



$$H_1(\mathbb{R}) = 0$$

$$H_1^{BM}(\mathbb{R}) \neq 0$$

есть беск. цепь

когомологии $\longrightarrow$ обычные $H^i(X)$

↳ с комп. носителем $H^i_c(X) = H^i_{BM}(X)$

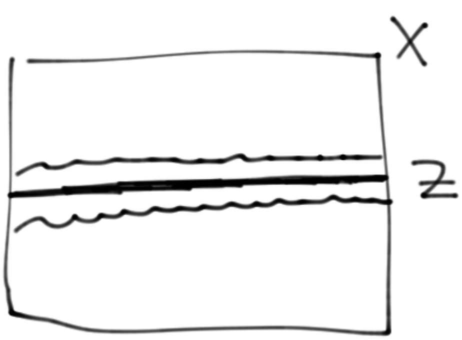
дв-сть Пуанкаре для компактного X: $H_i(X) \cong H^{d-i}(X)$

для некомпактного: $H_i(X) = H^{d-i}_{BM}(X)$, $H_i^{BM}(X) = H^{d-i}(X)$

$H_i(X,Z) = H_i^{BM}(U)$, поскольку $X/Z = U$.

$H^i_c(U) = H_{2d-i}(U)$ — равны 0 при маленьких i ⇝ все

Нам нужно больше: если $\dim Z \geq 2$ и это полное пересечение, то $\pi_1(Z) = 0$



$U = X - Z$ — аффинно

→ U гомотопически трехмерно

приклеиваем к U только четырех- пяти- и шестимерные клетки — на π_1 это не влияет