$\boxed{16.12.2013}$

А.Л.Смирнов

$\mathbb{C}^g/\Gamma$ — абелево многообразие

Когда оно проективно?

Пусть X — компл. аналит. многообразие (гладкое, комп.)

Когда X можно вложить в $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$?

Из существования такого вложения сразу следует, что X алгебраическое.

$$\omega \in \Omega^{1,1}(\underbrace{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}_{\text{веществ. } C^\infty\text{-многообразие разм-сти } 2n})$$

$\mathbb{C}P^n =$ ↑

Пусть X — C^∞-многообразие $\rightsquigarrow$ $\Omega^i(X)$ = пр-во C^∞ i-форм,

т.е. $\Omega^1(X)$ — сечения кокасательного расслоения T^*

$\Omega^i = \Lambda^i(T^*)$

$$\Omega^0 \longrightarrow \Omega^1 \longrightarrow \Omega^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^d \longrightarrow 0$$

— комплекс де Рама

Когомологии глобального де Рама $= H^i(X, \mathbb{R})$

$\mathbb{C}P^n$ = прямые в $\mathbb{C}^{n+1}$; координаты: $z_0, z_1, \dots, z_n$

$$\omega = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{dz_0\wedge d\bar{z}_0 + \cdots + dz_n\wedge d\bar{z}_n}{z_0\bar{z}_0 + \cdots + z_n\bar{z}_n}$$

Для вещ. функций df — сечение T^*_X

для комплексных df — сечение $T^*_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$

$\rightsquigarrow$ теперь ω — сечение $(\Lambda^2 T^*_X)\otimes\mathbb{C}$

При этом $d\omega = 0$, ω выдерживает гомотетии $\rightsquigarrow$

есть класс в $H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}) \supset H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) \leftarrow$ даже здесь

Более того, ω — образующая $H^2(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z})$

Рассматриваем $\mathbb{CP}^n$ как C^∞-вещ. многообразие, T — его касательное расслоение, $T_{\mathbb{C}} = T \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd} \Lambda^0 T^*_{\mathbb{C}} \arrow[r, "d"] & \Lambda^1 T^*_{\mathbb{C}} \arrow[r] & \dots \\ \mathbb{C} = \operatorname{Ker}(d) \arrow[u] & & \end{tikzcd}$$

(мягкая) резольвента для $\mathbb{C}$

Пусть теперь X — комплексное, $x \in X \rightsquigarrow T_{compl,x}(X)$ вещ. разм. $2n$

T_x — тоже вещ. разм. $2n$

$v \in T_x$ — дифференцирование вещ. функций

$v \in T_{compl,x}$ — дифференцирование голом. функций

$\rightsquigarrow$ есть отображение $T_x \otimes \mathbb{C} \longrightarrow T_{compl,x}$

$$T_x \otimes \mathbb{C} = T_{compl,x} + \overline{T_{compl,x}}$$

за счет инволюции

ядро $\to K$

$\rightsquigarrow T_x \otimes \mathbb{C} = \overline{K} + K$ и $\overline{K} \xrightarrow{\sim} T_{compl,x}$

Так мы получим

$$\Lambda^m T^*_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i+j=m} \Omega^{i,j}$$

$$\Lambda T^*_{\mathbb{C}} = \underset{dz}{\Omega^{1,0}} + \underset{d\bar{z}}{\Omega^{0,1}}$$

$dz \wedge d\bar{z} \in \Omega^{1,1}$, ω — типа $(1,1)$

$H^i(X, \mathbb{C}) =$ когом. (де Рам) $\otimes\, \mathbb{C}$

$$\Omega^{0,0} \to \begin{matrix} \Omega^{1,0} \\ \Omega^{0,1} \end{matrix} \to \begin{matrix} \Omega^{2,0} \\ \Omega^{1,1} \\ \Omega^{0,2} \end{matrix} \to$$

$$\rightsquigarrow H^m(X, \mathbb{C}) \overset{?}{=} \bigoplus_{i+j=m} \underbrace{H^{i,j}(X, \mathbb{C})}_{?}$$

Это верно, если X проективно (более общо: кэлерово)

Предположим, что η — глоб. голоморфная дифф. форма на X

1) $\deg \eta = 0$, т.е., η — голом. функция

⟶ про $d\eta$ ничего нельзя сказать. Но если X компактно, то $d\eta = 0$

2) $\deg \eta$ — любая, η — глобальная, X кэлерово $\Rightarrow d\eta = 0$

X — компактное комплексное.

① X кэлерово, если $\exists$ кэлерова форма на X;

② X кэлерово, если задана кэлерова форма на X. ← Считаем так

Кэлерова форма = форма ω

1) типа $(1,1)$

2) полож. опр. (вещ. часть = пол. опр. эрмитова форма)

3) $d\omega = 0$

см. ниже

$$T \text{ — вещ. пр-во} \rightsquigarrow \underset{\substack{\| \\ T_{compl} + \overline{T_{compl}}}}{T \otimes \mathbb{C}} = T_{\mathbb{C}} \text{ — компл. пр-во}$$

$$\omega \in \Lambda^2 T^*_{\mathbb{C}} : \quad T_{\mathbb{C}} \times T_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\uparrow$$

$$T^*_{compl} \otimes \overline{T}^*_{compl}$$

T — вещ. пр-во. Можно задать три структуры:

1) комплексная

2) евклидова

3) симплект.

если 2 из них заданы и согласованы, то задана и третья.