

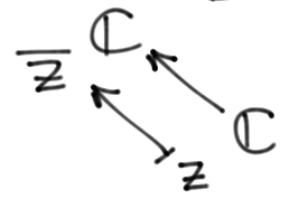
$$X = \mathbb{C}^2 / \Gamma, \Gamma \cong \mathbb{Z}^4$$

$X$  алгебраично  $\Leftrightarrow X$  ходжево, т.е.

- ①  $X$  кэлерово
- ②  $\omega \in H^2(X, \mathbb{Z})$

$$V \in \mathbb{C}\text{-Mod} \rightsquigarrow \text{есть } \bar{V} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} V$$

$$V \longrightarrow \bar{V}$$



Хотим задать форму

$$V \otimes \bar{V} \xrightarrow{h} \mathbb{C} \rightsquigarrow \text{есть квадр. форма}$$

$$h(v \otimes v) \in \mathbb{R}$$

на  $V$  как  $\mathbb{R}$ -модуле  
 $h$  положит.  $\Leftrightarrow$  эта форма положит. опр.

В прошлый раз мы выписали форму  $\omega$  на  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$   
и утверждалось, что она кэлерова:

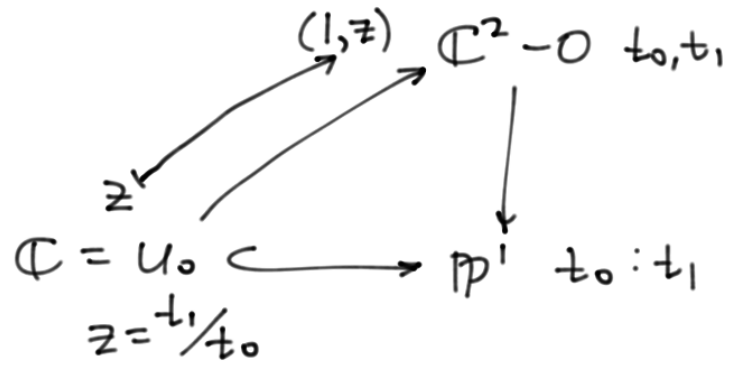
$$\omega = \left( \frac{-1}{2\pi i} \right) \frac{\sum dt_i \wedge d\bar{t}_i}{\sum t_i \bar{t}_i}$$

На самом деле, здесь все неверно:  
 $\omega \in H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$  ?

попробуем проверить:  $d\omega = 0$  ?  
почему это нетрив. класс? в  $\mathbb{P}^n$  есть цикл  $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^n$ ;  
проинтегрируем  $\omega$  по нему {  $t_2 = \dots = t_n = 0$  }

$\rightsquigarrow$  ограничим  $\omega$  на этот цикл:

$$\frac{dt_0 \wedge d\bar{t}_0 + dt_1 \wedge d\bar{t}_1}{t_0 \bar{t}_0 + t_1 \bar{t}_1}$$



$$\int \frac{dz \wedge d\bar{z}}{1+z\bar{z}}$$

$$z = r e^{i\varphi}$$

$$dz = e^{i\varphi} dr - r e^{i\varphi} d\varphi$$

$$d\bar{z} = e^{-i\varphi} dr + r(-i)e^{-i\varphi} d\varphi$$

$$\int \frac{2r(-i) dr \wedge d\varphi}{1+r^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{dr^2}{1+r^2} \quad \text{— расходится}$$

$\mathbb{C} \setminus \{0\}$   $\frac{dz}{z}$   
↓  
•

↖ не приходит снизу!

↪ нужно аккуратнее.

Правильный ответ:

$$\omega = \frac{-1}{2\pi i} \partial \bar{\partial} \log(t_0 \bar{t}_0 + \dots + t_n \bar{t}_n)$$

↖ это кривизна некоторой метрики

↖ это такие дифф. операторы

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

$$\begin{matrix} \partial & \rightarrow & p+1, q \\ p, q & & \\ & \searrow & p, q+1 \end{matrix}$$

$$z = x + iy$$

$$\partial = \partial_x + i\partial_y$$

$$\bar{\partial} = \partial_x - i\partial_y$$

(метрика на  $\mathcal{O}(1)$  приходит с  $\mathbb{C}^{n+1}$ )

— подробнее об этом далее, в теории Аракелова.

Вернемся к  $\mathbb{C}^2/\Gamma$

Утверждение:  $\mathbb{C}^2/\Gamma$  алгебраичен  $\Leftrightarrow \exists \mathbb{Z}$ -базис  $e_1, e_2, e_3, e_4$  в  $\Gamma \cong \mathbb{Z}^4$ ,  $\mathbb{C}$ -базис  $f_1, f_2$  в  $\mathbb{C}^2$

и  $\delta_1, \delta_2 \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $\delta_1 | \delta_2$  такие, что

$f_1 = e_1 / \delta_1$ ,  $e_i$  в базисе  $f_j$ :

$f_2 = e_2 / \delta_2$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & z_{11} & z_{12} \\ 0 & \delta_2 & z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$$

и ①  $Z$  симметрична ( $z_{21} = z_{12}$ )

②  $\text{Im } Z > 0$

тип поляризации  
 $\delta_1 = \delta_2 = 1 \rightarrow$  главная поляризация

$$\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\Gamma} \mathbb{C}^2/\Gamma = X$$

хотим выбрать тут форму  $\omega$   
поднимем ее в  $\mathbb{C}^2$  и ограничим на  $\Gamma$  соотв. форму на касат. пр-ве

Условие хodgeвости означает, что мы получим целочисл. форму на  $\mathbb{Z}^4$  (кососимм.)

$\leadsto \exists$  базис  $e_1, e_2, e_3, e_4$  т.ч.

$$[e_1, e_3] = \delta_1 \quad [e_2, e_4] = \delta_2, \quad \delta_1 | \delta_2, \quad \text{а остальные} = 0$$

Тогда  $e_1, e_2$  —  $\mathbb{C}$ -базис  $\mathbb{C}^2$

$$\text{Берем } f_1 = e_1 / \delta_1, \quad f_2 = e_2 / \delta_2 \quad \leadsto \omega = \delta_1 e_1^* \wedge e_3^* + \delta_2 e_2^* \wedge e_4^*$$

$\omega$  уже дает целочисленный класс в когомологиях:

$$\Gamma = H_1(X, \mathbb{Z}); \quad \Lambda^2(\Gamma^*) = H^2(X, \mathbb{Z})$$

после этого перепишем  $\omega$  через  $z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2$ :

$$? dz_1 \wedge dz_2 + ? dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 + \dots$$



если форма типа  $(1,1)$ , то эти коэфф. = 0 (если один = 0, то и другой): это даст симметрию  $Z$

Пусть теперь  $A_1, A_2$  — два абелевых многообразия и  $\varphi: A_1 \rightarrow A_2$  — морфизм такой, что  $\varphi(0) = 0$ . Тогда, оказывается, это гомоморфизм групп.

Далее будем считать, что  $\dim A_1 = \dim A_2$ .

$$\mathbb{C}^g / \Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{C}^g / \Gamma_2 \rightsquigarrow \text{изогения}$$

(образ  $\Gamma_1$  — кон. индекса в  $\Gamma_2$ )

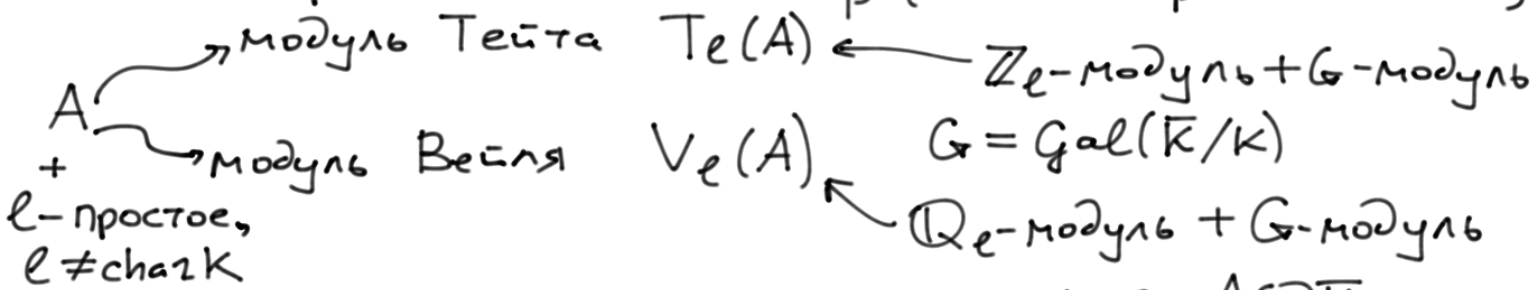
изогения  $\leftrightarrow$  конечная степень  $\leftrightarrow$  сюръекция

Пример:  $A \xrightarrow{[n]} A$  — степени  $n^{2g}$

Гипотеза Ходжа      Гипотезы Тейта      Частная гип. Тейта (для абелевых)

$\llcorner$  т. Фалтингса

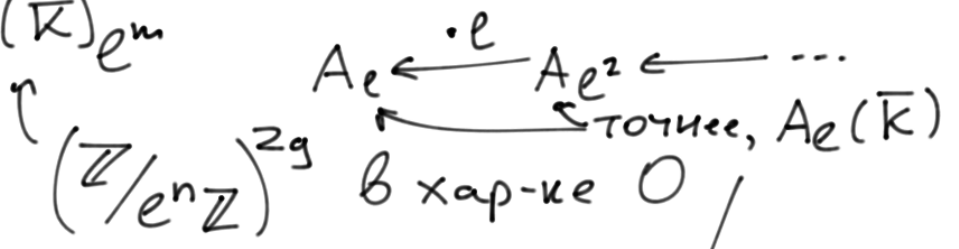
Пусть  $A$  — абелево многообразие /  $K$   
 $K$  — кон. пор. над  $\mathbb{Q}$  или над  $\mathbb{F}_p$  (самое интересное:  $K = \mathbb{Q}$ )



по смыслу  $\text{Te}(A) = H_{\text{et}}^1(A, \mathbb{Z}_\ell)$       точнее,  $A \otimes_K \bar{K}$   
 $\text{Ve}(A) = H_{\text{et}}^1(A, \mathbb{Q}_\ell)$

$T_e(A), V_e(A)$  строятся еще до étальных когомологий:

$$T_e(A) = \varprojlim_m A(\mathbb{K})_{e^m}$$



$$V_e(A) = T_e(A) \otimes_{\mathbb{Z}_e} \mathbb{Q}_e$$

там действует  $G$   
 $\curvearrowright G$  действует на  $T_e, V_e$ .

Пусть  $A \longrightarrow B$  — изоморфизм

$$\varprojlim_m V_e(A) \longrightarrow \varprojlim_m V_e(B) \text{ — изоморфизм}$$

↑ частная гипотеза Тейта

- Фалтингс: ① Морделл — все три доказаны  
 ② Тейт для абелевых в одной работе  
 ③ Шафаревич

для абелевых многообразий гип. Тейта  $\Rightarrow$  гип. Ходжа

• Гипотеза Ходжа

Пусть  $X$  — (гладкое) проективное над  $\mathbb{C}$ .

$Z \subset X$  — неприводимое алг. подмногообразие

$$\dim X = d, \text{ codim}_X Z = k$$

$\rightsquigarrow$  есть элемент в  $H^{2k}(X, \mathbb{Z}) \longleftrightarrow H_{2d-2k}(X, \mathbb{Z})$

$$\downarrow$$

$$H^{2k}(X, \mathbb{C})$$

$$\downarrow$$

$$[\mathbb{Z}]$$

$$\parallel$$

$$\bigoplus_{i+j=2k} H^{i,j}$$

утверждается, что  
 $[\mathbb{Z}] \in H^{k,k}$

тогда  $[Z] \in H^{k,k} \cap H^{2k}(X, \mathbb{Q})$

$$H^{2k}(X, \mathbb{C})$$

гипотеза Ходжа: обратно, любой класс из этого пересечения реализуется алгебраическим циклом

• доказана для  $k=1$  (т. Лефшеца)

Гипотеза Тейта

$X/K$ ,  $K$  кон. пор. над  $\mathbb{Q}$  или  $\mathbb{F}_p$   
Рассмотрим  $(H_{\text{et}}^{2k}(X \otimes \bar{K}, \mathbb{Q}_\ell))^{Gal(\bar{K}/K)}$  типа алг. Ли  
 $\downarrow$   
 $[Z]$

гипотеза Тейта: обратно, инварианты в когомологиях приходят из алгебраических циклов

Как они связаны?

пусть  $V_\ell(A) \rightarrow V_\ell(B)$  — изоморфизм

Как построить  $f: A \rightarrow B$ ?

Класс  $\Gamma_f \subset A \times B$   $G$ -инвариантен, нужно найти там цикл и что-то с ним сделать.