$\boxed{23.12.2013}$

А.Л. Смирнов

$X = \mathbb{C}^2/\Gamma$, $\Gamma \cong \mathbb{Z}^4$

X алгебраично $\iff$ X ходжево, т.е.

1. X кэлерово
2. $\omega \in H^2(X, \mathbb{Z})$

$V \in \mathbb{C}\text{-Mod} \rightsquigarrow$ есть $\overline{V} = \mathbb{C} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V$

$V \longrightarrow \overline{V}$

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \bar{z}$$

Хотим задать форму

$V \otimes \overline{V} \xrightarrow{h} \mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ есть квадр. форма

$h(v \otimes v) \in \mathbb{R}$ на V как $\mathbb{R}$-модуле

h положит. $\iff$ эта форма положит. опр.

В прошлый раз мы выписали форму ω на $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ и утверждалось, что она кэлерова:

$$\omega = \left(\frac{-1}{2\pi i}\right) \frac{\sum dt_i \wedge d\bar{t}_i}{\sum t_i \bar{t}_i}$$

На самом деле, здесь все неверно:

$\omega \in H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$?

попробуем проверить: $d\omega = 0$?

почему это нетрив. класс? в $\mathbb{P}^n$ есть цикл $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^n$;

проинтегрируем ω по нему $\quad \underset{\{t_2 = \ldots = t_n = 0\}}{\mathbb{P}^1}$

$\rightsquigarrow$ ограничим ω на этот цикл:

$$\frac{dt_0 \wedge d\bar{t}_0 + dt_1 \wedge d\bar{t}_1}{t_0\bar{t}_0 + t_1\bar{t}_1}$$

$$\begin{tikzcd}
 & z \arrow[r, leftrightarrow] & (1,z) & \mathbb{C}^2 - 0 \quad t_0, t_1 \arrow[d] \\
 & \mathbb{C} = U_0 \arrow[urr] \arrow[rr, hook] & & \mathbb{P}^1 \quad t_0 : t_1
\end{tikzcd}$$

$z = t_1/t_0$

$$\int \frac{dz \wedge d\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \qquad z = re^{i\varphi}$$

$$\longrightarrow \int \frac{2r(-i)\, dr \wedge d\varphi}{1+r^2}$$

$$dz = e^{i\varphi}dr + rie^{i\varphi}d\varphi$$

$$d\bar{z} = e^{-i\varphi}dr + r(-i)e^{-i\varphi}d\varphi$$

$$\int_0^\infty \frac{dr^2}{1+r^2} \text{ — расходится}$$

$$\mathbb{C}_m \quad \frac{dz}{z}$$

$\downarrow$

$\bullet$

не приходит снизу!

$\rightsquigarrow$ нужно аккуратнее.

Правильный ответ:

$$\omega = \overbrace{\frac{-1}{2\pi i}\,\partial\bar{\partial}\log(t_0\bar{t}_0 + \dots + t_n\bar{t}_n)}$$

это кривизна некоторой метрики

это такие дифф. операторы

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

$$\begin{tikzcd}
 & p+1, q \\
p, q \arrow[ur, "\partial"] \arrow[dr] & \\
 & p, q+1
\end{tikzcd}$$

$$z = x + iy$$

$$\partial = \partial x + i\partial y$$

$$\bar{\partial} = \partial x - i\partial y$$

(метрика на $\mathcal{O}(1)$ приходит с $\mathbb{C}^{n+1}$)

— подробнее об этом далее, в теории Аракелова.

Вернемся к $\mathbb{C}^2/\Gamma$

Утверждение: $\mathbb{C}^2/\Gamma$ алгебраичен $\Longleftrightarrow \exists$ $\mathbb{Z}$-базис e_1, e_2, e_3, e_4 в $\Gamma \cong \mathbb{Z}^4$, $\mathbb{C}$-базис f_1, f_2 в $\mathbb{C}^2$

и $\delta_1, \delta_2 \in \{1, 2, 3, \dots\}$, $\delta_1 \mid \delta_2$ такие, что

$f_1 = e_1/\delta_1$
$f_2 = e_2/\delta_2$; e_i в базисе f_j:

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & z_{11} & z_{12} \\ 0 & \delta_2 & z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \qquad Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$$

и ① Z симметрична ($z_{21} = z_{12}$)

② $\operatorname{Im} Z > 0$

тип поляризации

$\delta_1 = \delta_2 = 1 \rightsquigarrow$ главная поляризация

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^2 \arrow[r] & \mathbb{C}^2/\Gamma = X \\ \Gamma \arrow[u, "\circlearrowright"'] & \end{tikzcd}$$

хотим выбрать тут форму ω

поднимем ее в $\mathbb{C}^2$ и ограничим соотв. форму на касат. пр-ве на Γ

Условие ходжевости означает, что мы получим целочисл. форму на $\mathbb{Z}^4$ (кососимм.)

$\rightsquigarrow \exists$ базис e_1, e_2, e_3, e_4 т.ч.

$[e_1, e_3] = \delta_1 \quad [e_2, e_4] = \delta_2$, $\delta_1 \mid \delta_2$, а остальные $= 0$

Тогда e_1, e_2 — $\mathbb{C}$-базис $\mathbb{C}^2$

Берем $f_1 = e_1/\delta_1$, $f_2 = e_2/\delta_2 \rightsquigarrow \omega = \delta_1 e_1^* \wedge e_3^* + \delta_2 e_2^* \wedge e_4^*$

ω уже дает целочисленный класс в когомологиях:

$\Gamma = H_1(X, \mathbb{Z})$; $\Lambda^2(\Gamma^*) = H^2(X, \mathbb{Z})$

после этого перепишем ω через $z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2$:

$$?\,dz_1\wedge dz_2 + ?\,dz_1\wedge d\bar{z}_1 + d\bar{z}_1\wedge d\bar{z}_2 + \dots$$

если форма типа $(1,1)$, то эти коэфф. $=0$ (если один $=0$, то и другой): это даст симм-сть Z

Пусть теперь A_1, A_2 — два абелевых многообразия и $\varphi: A_1 \longrightarrow A_2$ — морфизм такой, что $\varphi(0)=0$. Тогда, оказывается, это гомоморфизм групп.

Далее будем считать, что $\dim A_1 = \dim A_2$.

$$\mathbb{C}^g/\Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{C}^g/\Gamma_2$$

$\rightarrow$ изогения (образ Γ_1 — кон. индекса в Γ_2)

изогения $\leftrightarrow$ конечная степень $\leftrightarrow$ сюръекция

Пример: $A \xrightarrow{[n]} A$ — степени n^{2g}

Гипотеза Ходжа Гипотезы Тейта $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Частная гип. Тейта (для абелевых)}}$

$\parallel$ т. Фалтингса

Пусть A — абелево многообразие $/K$

K — кон. пор. над $\mathbb{Q}$ или над $\mathbb{F}_p$ (самое интересное: $K=\mathbb{Q}$)

A + ℓ — простое, $\ell \neq \operatorname{char} K$

$\rightarrow$ модуль Тейта $T_\ell(A)$ $\leftarrow$ $\mathbb{Z}_\ell$-модуль + G-модуль, $G = Gal(\bar{K}/K)$

$\rightarrow$ модуль Вейля $V_\ell(A)$ $\leftarrow$ $\mathbb{Q}_\ell$-модуль + G-модуль

по смыслу $T_\ell(A) = H^1_{et}(A, \mathbb{Z}_\ell)$

$V_\ell(A) = H^1_{et}(A, \mathbb{Q}_\ell)$

точнее, $A \otimes_K \bar{K}$

$T_\ell(A), V_\ell(A)$ строились еще до этальных когомологий:

$T_\ell(A) = \varprojlim_m A(\overline{K})_{\ell^m}$

$(\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})^{2g}$

$A_\ell \xleftarrow{\cdot \ell} A_{\ell^2} \leftarrow \dots$

точнее, $A_\ell(\overline{K})$

в хар-ке 0

$V_\ell(A) = T_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$

там действует G

$\rightsquigarrow G$ действует на T_ℓ, V_ℓ.

Пусть $A \longrightarrow B$ — изогения

$\rightsquigarrow V_\ell(A) \longrightarrow V_\ell(B)$ — изоморфизм

частная гипотеза Тейта

Фалтингс: (1) Морделл — все три доказаны в одной работе

(2) Тейт для абелевых

(3) Шафаревич

для абелевых многообразий гип. Тейта $\Rightarrow$ гип. Ходжа

• <u>Гипотеза Ходжа</u>

Пусть X — (гладкое) проективное над $\mathbb{C}$.

$Z \subseteq$ — неприводимое алг. подмногообразие

$\dim X = d$, $\operatorname{codim}_X Z = k$

$\rightsquigarrow$ есть элемент в $H^{2k}(X, \mathbb{Z}) \longleftrightarrow H_{2d-2k}(X, \mathbb{Z}) \ni [Z]$

$$H^{2k}(X,\mathbb{Z}) \to H^{2k}(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i+j=2k} H^{i,j}$$

утверждается, что $[Z] \in H^{k,k}$

тогда $[Z] \in H^{k,k} \cap H^{2k}(X, \mathbb{Q})$

$$H^{k,k} \subset H^{2k}(X, \mathbb{C}) \supset H^{2k}(X, \mathbb{Q})$$

Гипотеза Ходжа: обратно, любой класс из этого пересечения реализуется алгебраическим циклом

- доказана для $k=1$ (т. Лефшеца)

- <u>Гипотеза Тейта</u>

X/K, K кон.пор. над $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{F}_p$

Рассмотрим $\left(H^{2k}_{et}(X \otimes \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell)\right)^{Gal(\overline{K}/K)}$ ← типа алг. Ли

$$\ni [Z]$$

Гипотеза Тейта: обратно, инварианты в когомологиях приходят из алгебраических циклов

Как они связаны?

пусть $V_\ell(A) \longrightarrow V_\ell(B)$ – изоморфизм

Как построить $f: A \longrightarrow B$?

Класс $\Gamma_f \subset A \times B$ G-инвариантен, нужно найти там цикл и что-то с ним сделать.