Цель: категорный подход к гомотопической теории

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\sim"] & Y \end{tikzcd}$$

$f \sim g$ — понятно

топ. многообразия

X_1, X_2 гомотопически эквивалентны, если

$\exists f, g$: $\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, bend left, "f"] & X_2 \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$ $f \circ g \sim id$, $g \circ f \sim id$

Другой способ:

X_1, X_2. Можно ли установить биекцию

$\pi(Y, X_1) \xleftrightarrow{\simeq} \pi(Y, X_2)$ $\forall Y$

Третий способ — аналогично, но $\pi(X_1, Y) \xleftrightarrow{\simeq} \pi(X_2, Y)$

Все эти способы эквивалентны (это категорный факт)

Получили категорию, но она слишком большая

Нам нужна категория клеточных пространств

Клеточное пространство (= CW-комплекс):

① Хаусдорфово т.п. K

② $K = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \bigcup\limits_{i \in I_k} e_i^k$ e_i^k — клетка, попарно не пересекаются,

$\exists D^k \xrightarrow{\varphi_i^k} K$ т.ч. $Im(\varphi_i^k|_{Int(D^k)}) \simeq e_i^k$

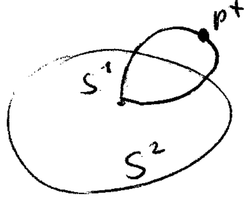
\+ аксиомы

C) $\underset{\boxed{\dot{e}_i^k}}{\underset{\parallel}{\overline{e_i^k} - e_i^k}}$ содержится в конечном объединении клеток меньшей размерности

W) $F \subset K$ замкнуто $\Leftrightarrow \forall e_i^k$ $F \cap \overline{e_i^k}$ замкнуто

Клеточное подпр-во — замкнутое подмн-во, составленное из клеток

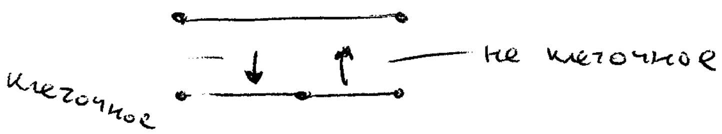
Пример: $sk_n K = \bigcup\limits_{i=0}^{n} e_j^i$



— здесь замыкание клетки — не клеточное подпр-во

$X \longrightarrow Y$ — <u>клеточное отображение</u>, если оно непрерывно и

$\forall n \quad f(sk_n X) \subset sk_n Y$



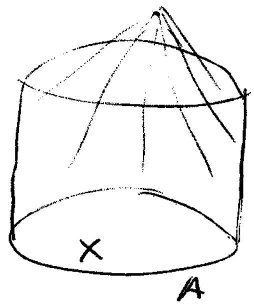
$\boxed{\S}$ Расслоения и корасслоения

(X, A) — <u>корасслоение</u>, если $\forall$ пр-ва Y выполнено

(пара Борсука)

(HEP)

$$\begin{tikzcd} Y & X \arrow[l, "f_0"'] \arrow[dl, dashed, "\exists \tilde{f}"] \\ Y^I \arrow[u, "p_0"] & A \arrow[l, "f"] \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$



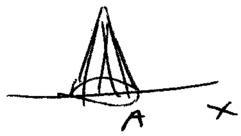
— это верно, если (X, A) — клеточная пара

(т. Борсука)

$$\begin{array}{c} A \longrightarrow Y^I \\ \Updownarrow \\ A \times I \longrightarrow Y \end{array}$$ — сопряженные функторы

<u>Следствие</u>: A - стягиваемо $\Rightarrow X/A \sim X$

<u>Следствие</u> $X/A \sim X \cup CA$



$\boxed{\text{Теорема}}$ (о клеточной аппроксимации)

$\forall$ непрерывное отображение клеточных пространств гомотопно клеточному отображению

$\boxed{\text{Следствие}}$ X — клеточное пр-во с одной <u>вершиной</u> (клетка размерности 0) и без других клеток размерности $< q$

Y — клеточное пр-во размерности $< q$

$\rightsquigarrow$ любое отображение $X \longrightarrow Y$ гомотопно постоянному

Отсюда следует, что $\pi_k(S^n) = 0$ при $k < n$

т.е. теорема о клеточной аппроксимации - нетривиальная и достаточно сильная.

Опр. <u>Расслоение</u> (E, B, F, p) $\qquad E \xrightarrow{p} B$

E — тотальное пространство, B — база, F — слой

$$\forall x \in B \ \exists U \subset B,\ x \in U : \ p^{-1}(U) \simeq U \times F$$

(= локально тривиальное расслоение)

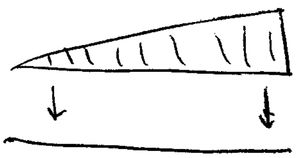
Примеры: лента Мебиуса, $S^3 \xrightarrow{Hopf} S^2$

Свойство (CHP) $\quad E \xrightarrow{p} B$ — расслоение, Y — клеточное пр-во

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & B
\end{tikzcd}$$

Опр. <u>Расслоение Серра</u>: (E, B, p) уд. условию (CHP) для всех <u>клеточных</u> пространств Y

Пример:



Опр. <u>Расслоение Гуревича</u>: (E, B, p) уд. условию (CHP) для всех пространств Y

Замечание Достаточно проверять CHP для расслоения Серра только для n-мерных дисков (для всех n) $D^n = Y$

Теорема $p: X \longrightarrow Y$ непрерывно $\rightsquigarrow$ равносильны

1. p — расслоение Серра + гомотопическая эквивалентность
2. p обладает св-вом RLP для любого клеточного вложения $A \hookrightarrow B$
3. p обладает св-вом RLP для любого $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ $\forall n \geq 0$

Опр.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y
\end{tikzcd}$$

$\forall (A, B)$ пополняется $\rightarrow f$ обладает (RLP) (свойством правого подъема)

Пример Y — связное пр-во с отм. точкой y_0

$E(Y, y_0)$ — пр-во путей в Y с началом в y_0

$$\begin{array}{ccc} E(Y, y_0) & \xrightarrow{p} & Y \\ \varphi(i) & \longmapsto & \varphi(1) \\ {\scriptstyle i\in[0,1]} & & \end{array}$$

— расслоение Серра (расслоение путей)

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d] & E(Y, y_0) \arrow[d, "p"] \\ Z\times I \arrow[ur, "\tilde{G}"] \arrow[r, "G"'] & Y \end{tikzcd}$$

$$\tilde{G}(z,t)[\tau] = \begin{cases} g(z)(\tau(1+t)) & \text{если } \tau(1+t)\le 1 \\ G(z, \tau(1+t)-1), & \text{если } \tau(1+t)\ge 1 \end{cases}$$

слой расслоения путей = пр-во петель $\Omega(Y, y_0)$

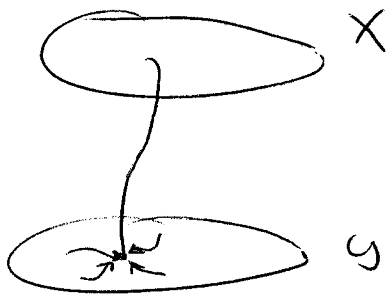
Теорема $\forall$ непрерывное отображение $f: X \longrightarrow Y$ канонически гомотопически эквивалентно расслоению Серра $X_1 \xrightarrow{p} Y_1$.

Более того, можно положить $Y_1 = Y$ и соотв. гомотоп. экв-сть можно сделать тождественной:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "\forall f"'] \arrow[rr, phantom, "\sim", shift right=4ex] & & X_1 \arrow[ll, "\varphi"'] \arrow[dl, "\exists p \text{ — расс. Серра}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Конструкция: $X_1 = \{(x,s) \mid x\in X, s\in E(Y, f(x))\}$

$p((x,s)) = s(1)$, $\varphi((x,s)) = x$



§ Двойственность Экмана – Хилтона

Y – пр-во с отм. точкой

Y называется H-group, если

$m: Y\times Y \longrightarrow Y$

$\nu: Y \longrightarrow Y$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i_{1,2}"] \arrow[rr, bend right, "id"'] & Y\times Y \arrow[r, "m"] \arrow[d, phantom, "\sim"] & Y \\ & {} & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Y\times Y\times Y \arrow[r, "id\times m"] \arrow[d, "m\times id"'] \arrow[dr, phantom, "\sim"] & Y\times Y \arrow[d, "m"] \\ Y\times Y \arrow[r, "m"'] & Y \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "id\times\nu"] \arrow[rr, bend right, "Y\to\cdot"'] & Y\times Y \arrow[r, "m"] \arrow[d, phantom, "\sim"] & Y \\ & {} & \end{tikzcd}$$

Y называется ко-H-group, если

$m: Y \longrightarrow Y\vee Y$

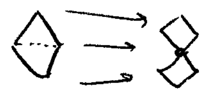
$\nu: Y \longrightarrow Y$

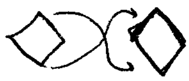
Пример: $Y = \Omega(Z)$

m:  – обойти петли по очереди

ν:  – обойти в обратном направлении

Пример $Y = \Sigma Z$

m: 

ν: 

Теорема $\pi(X,Y)$ обладает естественной групповой структурой $\Leftrightarrow$ Y – H-group

Утв. $Y = \Omega\Omega Z \Rightarrow \pi(X,Y)$ абелева

Посл-ть: $K_n = \Omega K_{n+1}$

$K_n = K(n,\mathbb{Z})$ – пр-ва Эйленберга-Маклейна

Теорема' $\pi(Y,X)$ обладает естественной групповой структурой $\Leftrightarrow$ Y – ко-H-group

Утв. $Y = \Sigma\Sigma Z \Rightarrow \pi(Y,X)$ абелева

$\Sigma^n(\cdot) = S^n$, $\Sigma S^n = S^{n+1}$

$\pi(X,K_n) = H^n(X) \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z} = \pi(S^n,K_n) = \mathbb{Z}} \Leftarrow \pi(S^n,X) = \pi_n(X)$

всегда абелевы

абелева для $n\geq 2$

$H^n(X) = H^{n+1}(\Sigma X) \Leftarrow \boxed{\Sigma \Leftrightarrow \Omega \text{ сопряжение}} \Rightarrow \pi_{n+1}(X) = \pi_n(\Omega X)$

$H^{n+1}(\Sigma X) = \pi(\Sigma X, K_{n+1}) \cong \pi(X, \underbrace{\Omega K_{n+1}}_{= K_n}) = H^n(X)$

$\pi(K_n, K_m) = ?$

— ответ известен (Серр + ...)

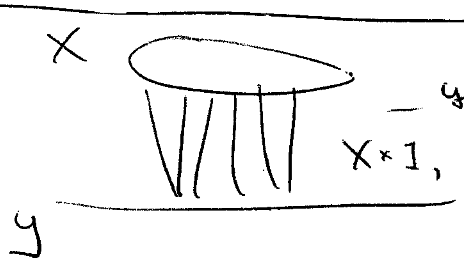
$\pi(S^n, S^m) = ??$

— ответ не будет известен никогда

Теорема $\forall$ непрерывного отображения $X \xrightarrow{f} Y$

$\exists$ $X_2 \hookrightarrow Y_2$ — гомотопически эквивалентные f

т.ч. $(Y_2, i(X_2))$ — корасслоение



— цилиндр

$X \times I$, $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow$ отождествлен внизу