30.04.2013
С. Ягунов

I — индексная категория

$F : I \longrightarrow \mathbb{C}$

$$A \in \mathbb{C} \rightsquigarrow \mathrm{const}_I A : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ i & \longmapsto & A \\ \forall \mathrm{Mor} & \longmapsto & id_A \end{array}$$

Предел функтора F:

$X = \lim F$ — это такой $X \in \mathbb{C}$, который представляет функтор $Y \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}(I,\mathbb{C})}(\mathrm{const}_I Y, F)$

Пример $\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] \arrow[ddrr, bend right=60] & & \\
& \tilde{C} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & C_1 \arrow[d] \\
& C_2 \arrow[r] & C_0
\end{tikzcd}$$

$\longrightarrow$ предел = расслоенное произведение

Двойственное понятие: копредел

$I = \{\bullet\}$: предел — он сам

$I = \{\bullet \rightrightarrows \bullet\}$: уравнитель и коуравнитель

$I = \{\mathbb{N}\ 0 \to 1 \to 2 \to \dots\}$: $\underrightarrow{\lim}$, обратные стрелки $\underleftarrow{\lim}$

$I = \{\}$: предел = конечный объект $(*)$, копредел — начальный объект $(\emptyset)$

Ретракт

на объектах: $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "id_A"'] & B \arrow[r] & A
\end{tikzcd}$$

$\to$ A — ретракт B

на морфизмах:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & A'
\end{tikzcd}$$

тут ретракты

$\Rightarrow$ f — ретракт g

§ Модельные категории

(category of models for homotopy theory)

- у нас это то, что Квиллен называл замкнутыми модельными категориями

- Категория $\mathcal{C}$ + 3 класса морфизмов:

  W — слабые эквивалентности (weak equivalences): $\xrightarrow{\sim}$

  F — расслоения (fibrations): $\twoheadrightarrow$

  C — корасслоения (cofibrations): $\hookrightarrow$

Все три класса замкнуты относительно композиции морфизмов и содержат все id_A $\forall A \in Ob\,\mathcal{C}$

$F \cap W$ — ацикличные расслоения

$C \cap W$ — ацикличные корасслоения

- **MC1** Категория $\mathcal{C}$ допускает все конечные пределы и копределы (в частности, $\exists *$ и $\varnothing$)

- **MC2** (2 of 3)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & B \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

— если два — слабые экв-сти, то и третий — тоже

- **MC3** (аксиома ретракции): пусть f является ретрактом g. Тогда $g \in W, C, F \Rightarrow f \in W, C, F$

$\boxed{\text{Следствие}}$ Все изоморфизмы в $\mathcal{C}$ принадлежат W, C, F.

Док-во:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, equal] & Y \arrow[r, equal] & Y \end{tikzcd}$$

$\square$

- **MC4**

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, two heads] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\alpha"] & Y \end{tikzcd}$$

+ одна из стрелок $A \hookrightarrow B$, $X \twoheadrightarrow Y$ — слабая эквивалентность $\Rightarrow \exists \alpha$

Напоминание:

$X \to Y$ допускает правый подъем относительно класса морфизмов Ω, если (RLP)

$\forall\ A \to B \in \Omega$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

• $\underline{MC5}$ Любой морфизм $A \longrightarrow B$ может быть разложен в композицию

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & B \\ & X \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

, причем можно добиться, чтобы $(A \hookrightarrow X) \in W$, а можно добиться, чтобы $(X \twoheadrightarrow B) \in W$

$\boxed{\text{Опр.}}$ X называется <u>расслоенным</u>, если $(X \longrightarrow *) \in F$

X называется <u>корасслоенным</u>, если $(\varnothing \longrightarrow X) \in C$

— обычно всех интересуют гомотопические категории: хочется по $\mathcal{C}$ построить $Ho(\mathcal{C}) = \mathcal{C}[W^{-1}]$ ← „гомотопии"

если сделать так грубо, получится ерунда.

$\boxed{\text{Замечание}}$ Аксиомы модельной категории самодвойственны: если $\mathcal{C}$ — модельная, то $\mathcal{C}^{\circ}$ — модельная.

$\boxed{\text{Примеры}}$

(I) Категория $Top_1 \overset{Top}{=}$ (топологич. пр-ва с непр. отображениями)

W — слабые гомотопические эквивалентности:

$(\forall$ кон. CW-комплекса K $[K, X] \xrightarrow{\sim} [K, Y])$

F — все расслоения Серра

C — ретракты отображений $X \longrightarrow Y'$, где Y' получено из X приклеиванием клеток

Тогда $Ho(Top_1) = Ho(CW)$

(II) Категория $Top_2 = Top$

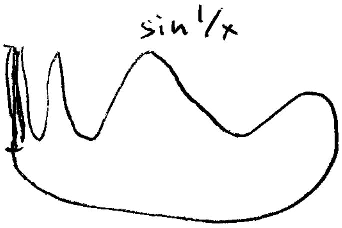
W — гомотопические эквивалентности

F — расслоения Гуревича

C — корасслоения Гуревича

Тогда $Ho(Top_2) = Ho(Top_1) = Ho(CW)$

— но модельные структуры не эквивалентны!



— <u>варшавская окружность</u>

— слабо гомотоп. эквивалентна точке, но не гомотоп. эквивалентна точке.

III) $\mathcal{C}$ — модельная категория, $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Рассмотрим категорию $A \downarrow \mathcal{C}$ стрелок под A

Объекты: $\begin{tikzcd} A \arrow[d] \\ X \end{tikzcd}$, морфизмы: $\begin{tikzcd} A \arrow[r, equal] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$

$\to A \downarrow \mathcal{C}$ — тоже модельная категория.

Аналогично, $\mathcal{C} \downarrow A$ — модельная категория.

§ Свойства модельных категорий

Если не указано обратное, $\mathcal{C}$ — модельная категория

Утв. (1) C — класс всех морфизмов, имеющих свойство левого подъема относительно $F \wedge W$

(2) F — класс всех морфизмов, имеющих свойство правого подъема относительно $C \wedge W$

(3) $C \wedge W$ — - - - - - - - левого подъема относительно F

(4) $F \wedge W$ — - - - - - - - правого подъема относительно C

<u>Док-во:</u> (1) В одну сторону — аксиома MC4. Пусть теперь $K \xrightarrow{f} L$ имеет LLP отн-но $F \wedge W$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & L \\ L' \arrow[ur, "p", "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & L' \arrow[d, "p", "\wr"'] \\ L \arrow[r, equal] \arrow[ur, "\exists g"] & L \end{tikzcd} \to \begin{tikzcd} K \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] & K \arrow[r, equal] \arrow[d, hook, "i"] & K \arrow[d, "f"] \\ L \arrow[r, "g"'] & L' \arrow[r, "p"'] & L \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow f$ — ретракт $i \Rightarrow f \in C$

(3) так же, но нужно раскладывать так: $\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d, hook, "\sim"'] & L \\ L' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$

<u>Остальное — по двойственности</u> □

$\to$ по C и W восстанавливается F, а по F и W восстанавливается C.

Поэтому часто один из классов C и F оказывается удобным и естественным, а другой — каким придется.

Утв. (1) $\mathcal{C}$ стабилен относительно push-out (козамена базы)

(2) $\mathcal{C} \wedge W$ — // — // — // —

(3) F стабилен относительно pull-back (замены базы)

(4) $F \wedge W$ — // — // — // — // —

Док-во (1) $K \overset{i}{\hookrightarrow} L$ — корасслоение,

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\boxtimes"] & K' \arrow[d, "j"] \\ L \arrow[r] & L' \end{tikzcd} \qquad \xrightarrow{?} j \in \mathcal{C}$$

Покажем что j обладает LLP относительно $F \wedge W$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d, hook] & K' \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "2"] \\ L \arrow[r] \arrow[urr] & L' \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & B \end{tikzcd}$$

$\exists$ $\Rightarrow \exists$

(2) — совершенно аналогично, (3), (4) — по двойственности $\square$

§ Цилиндр и левая гомотопия

Опр. <u>Цилиндр</u> объекта $A \in \mathcal{C}$ — это объект $A \wedge I \in \mathcal{C}$, обладающий свойством:

$$\begin{tikzcd} A \sqcup A \arrow[r, "\exists"] \arrow[rr, bend right, "\nabla"'] & A \wedge I \arrow[r, "\exists", "\sim"'] & A \end{tikzcd}$$

∇ — <u>кодиагональ</u>: $\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, bend right, "id_A"'] \arrow[d] & \\ A & A \sqcup A \arrow[l, dashed, "\nabla"'] & A \arrow[l] \arrow[ll, bend left, "id_A"] \end{tikzcd}$

<u>Замечания</u>: Нет никакого I (и никакого $\wedge$), это просто обозначение такое.

Цилиндр не обязательно единственный, не обяз. функториален (например, сам A является цилиндром)

Опр. Цилиндр называется <u>хорошим</u>, если

$A \sqcup A \hookrightarrow A \wedge I \xrightarrow{\sim} A$

здесь корасслоение

Цилиндр называется <u>очень хорошим</u>, если он хороший и $A \sqcup A \hookrightarrow A \wedge I \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} A$

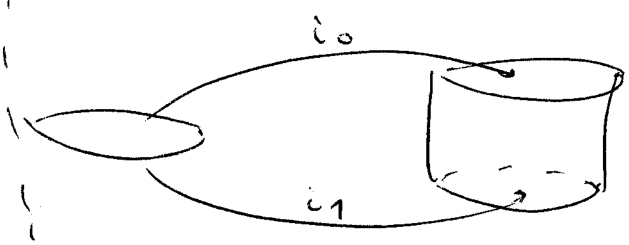
тут расслоение

Очень хорошие цилиндры существуют по аксиоме MC5

$\boxed{\text{Лемма}}$ Пусть объект A корасслоенный и пусть $A\wedge I$ — его хороший цилиндр. Тогда отображения $i_0, i_1 : A \longrightarrow A\wedge I$ суть ацикличные корасслоения

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "in_0"] \arrow[rrd, bend left, "i_0"] & & \\
& A \sqcup A \arrow[r] & A\wedge I \\
A \arrow[ur, "in_1"'] \arrow[rru, bend right, "i_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

Топологическая аналогия:



Док-во

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "id", "\sim"'] \arrow[dr, "i_0"'] & & A \\
& A\wedge I \arrow[ur, "\sim"'] &
\end{tikzcd} \Rightarrow i_0 \in W$$

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\boxtimes"] & A \arrow[d, "in_0"] \arrow[dd, bend left, "i_0"] \\
A \arrow[r] & A \sqcup A \arrow[d, hook] \\
& A\wedge I
\end{tikzcd}$$

цилиндр хороший

$\Rightarrow in_0 \in C$

$\Rightarrow i_0 \in C$

$\Rightarrow i_0 \in C\cap W$

$\square$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $f, g : A \longrightarrow X$ называются <u>лево-гомотопными</u> $(f \overset{l}{\sim} g)$, если существует цилиндр $A\wedge I$ такой, что

$$\begin{tikzcd}
A \sqcup A \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "f+g"'] & A\wedge I \arrow[r, "\exists H"] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[d] \arrow[dr, "f"] & \\
A \sqcup A \arrow[r, dashed, "f+g"] & X \\
A \arrow[u] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

При этом H называется <u>левой гомотопией</u>

Гомотопия называется <u>хорошей</u> (<u>очень хорошей</u>), если мы можем выбрать хороший (очень хороший) цилиндр

$\boxed{\text{Лемма}}$ Если $f \overset{l}{\sim} g$ при помощи левой гомотопии H, то $f \in W \Longleftrightarrow g \in W$

Док-во: $f = H \circ i_0$: $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_0", "\sim"'] \arrow[rr, bend right, "f\ \sim"'] & A\wedge I \arrow[r, "H"] & X \end{tikzcd}$ $\rightarrow H \in W$

$g = H i_1 \Rightarrow g \in W$ $\square$