С. Ягунов

напоминание.

$\boxed{\text{Лемма } 0}$ $A \in C$, $A \wedge I$ — хороший цилиндр;

тогда $i_0, i_1 : A \longrightarrow A \wedge I$ суть ациклические корасслоения

$\boxed{\text{Замечание } 1/2}$ Если $f \overset{l}{\sim} g$, то $f \in W \Leftrightarrow g \in W$

$\boxed{\text{Лемма } 1}$ Пусть $f, g : A \longrightarrow X$, $f \overset{l}{\sim} g$. Тогда существует хорошая левая гомотопия H.

Если, кроме того, $X \in F$, то существует очень хорошая левая гомотопия.

Док-во

$$\begin{tikzcd} A \sqcup A \arrow[r, "f+g"] \arrow[dr] & A \wedge I \arrow[r] & X \\ & A \wedge I' \arrow[u, "\sim"] & \end{tikzcd}$$

по MCS

$\rightarrow$ получили хорошую гомотопию

Пусть теперь H — хорошая гомотопия: $H : A \wedge I \longrightarrow X$

$$\begin{tikzcd} A \wedge I \arrow[r, hook, "\sim"] \arrow[rr, bend right, "\sim"'] & A \wedge I' \arrow[r, "\sim"] & A \end{tikzcd}$$

по аксиоме 2-из-3

$$\begin{tikzcd} A \wedge I \arrow[r, "H"] \arrow[d, hook, "\wr"'] & X \arrow[d] \\ A \wedge I' \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists H'"] & * \end{tikzcd}$$

— расслоенный

$\rightsquigarrow$ H' — очень хорошая гомотопия.

$\square$

$\boxed{\text{Лемма } 2}$ Пусть $A \in C$. Тогда $\forall X$ левая гомотопия есть отношение эквивалентности на $Hom_C(A, X)$

Док-во (1) рефлексивность тривиальна

(2) $f \overset{l}{\sim} g$, $A \sqcup A \xrightarrow{S} A \sqcup A$ (меняет порядок слагаемых) $\qquad (g+f)S = f+g$

Поставим S перед левой гомотопией $\rightsquigarrow$ $g \overset{l}{\sim} f$

(3) $\left.\begin{array}{l} f \overset{l}{\sim} g \Rightarrow H : A \wedge I \longrightarrow X \\ g \overset{l}{\sim} h \Rightarrow H' : A \wedge I' \longrightarrow X \end{array}\right\}$ хорошие гомотопии

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, hook, "i_0'"'] \arrow[dr, phantom, "\boxtimes"] & A \wedge I \arrow[d] \\
A \wedge I' \arrow[r] & A \wedge I'' \arrow[dr] \\
& & X
\end{tikzcd}$$

искомая гомотопия $f \overset{l}{\sim} h$

$\square$

$\boxed{\text{Определение}}$ $\pi^l(A, X)$ — множество классов эквивалентности в $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ по отношению левой гомотопии

(здесь мы не предполагаем, что $A \in \mathcal{C}$: можно взять отношение эквивалентности, порожденное левой гомотопией.

$\boxed{\text{Лемма}}\boxed{3}$ Пусть $A \in \mathcal{C}$, $p : Y \xrightarrow{\sim} X$. Тогда

$$p_* : \pi^l(A, Y) \longrightarrow \pi^l(A, X) \text{ — биекция.}$$
$$[f] \longmapsto [pf]$$

Док-во: (0) Корректная определенность p_*:
если H — гомотопия между морфизмами, то pH — гомотопия между их образами.

(1) p_* — сюръекция: пусть $[f] \in \pi^l(A, X)$

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, "\wr"] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\exists g"] & X
\end{tikzcd} \longrightarrow p_*[g] = [f]$$

A — корасслоенный

(2) p_* — инъекция: $A \overset{f, g}{\longrightarrow} Y$. Пусть $pf \overset{l}{\sim} pg : A \to X$

Выберем хорошую левую гомотопию H между pf и pg:
$H : A \wedge I \longrightarrow X$. Тогда

$$\begin{tikzcd}
A \amalg A \arrow[r, "f+g"] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, "\wr"] \\
A \wedge I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & X
\end{tikzcd}$$

нужная гомотопия между f и g

хороший цилиндр

$\boxed{\text{Лемма}}\boxed{4}$ Пусть X — расслоенный, $f \overset{l}{\sim} g : A \longrightarrow X$, $h : A' \longrightarrow A$. Тогда $fh \overset{l}{\sim} gh$.

Док-во Выберем очень хорошую гомотопию H между f и g (по Лемме 1) и хороший цилиндр $H : A\wedge I \longrightarrow X$

$$A' \sqcup A' \hookrightarrow A'\wedge I \xrightarrow{\sim} A' . \quad \text{Тогда}$$

$$\begin{tikzcd}
A' \sqcup A' \arrow[r, "h \sqcup h"] \arrow[d, "j"'] & A \sqcup A \arrow[r, "i"] & A\wedge I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\wr"] & X \\
A'\wedge I \arrow[r, "\sim"] \arrow[urr, dashed, "\exists k"] & A' \arrow[r, "h"] & A &
\end{tikzcd}$$

$\rightarrow Hk$ — нужная гомотопия $\square$

$\boxed{\text{Утверждение}}\boxed{5}$ X — расслоенный. Тогда композиция морфизмов в C индуцирует отображение $\pi^l(A', A) \times \pi^l(A, X) \longrightarrow \pi^l(A', X)$
$([h], [f]) \longmapsto [fh]$

Док-во: Достаточно знать, что если $h \overset{l}{\sim} k : A' \longrightarrow A$, $f \overset{l}{\sim} g : A \longrightarrow X$, то $[fh] = [gk]$ в $\pi^l(A', X)$.

Проверим, что $fh \overset{l}{\sim} gh : A' \longrightarrow X$ и $gh \overset{l}{\sim} gk : A' \longrightarrow X$

↳ это по Лемме 4 ↳ легко: $H \longmapsto gH$ $\square$

$\boxed{\S}$ Пространство путей и правая гомотопия

$\boxed{\text{Опр.}}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\sim"] \arrow[rr, bend right, "\Delta"'] & X^I \arrow[r, "p"] & X\times X
\end{tikzcd} \rightsquigarrow X^I \text{ — \underline{пространство путей}}$$

(это понятие двойственно цилиндру)

X^I — хорошее пространство путей, если $X^I \overset{p}{\twoheadrightarrow} X\times X$

X^I — очень хорошее пространство путей, если $X \overset{\sim}{\hookrightarrow} X^I \twoheadrightarrow X\times X$

Верны двойственные утверждения:

$\boxed{\text{Лемма}}\boxed{0^\circ}$ X — расслоенный, X^I — хорошее пространство путей. Тогда $p_0, p_1 : X^I \longrightarrow X$ — ацикличное расслоение.

$\boxed{\text{Опр.}}$ $f, g : A \longrightarrow X$ называются право гомотопными, если $\exists$ пр-во путей X^I и морфизм H:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "H"] \arrow[rr, bend right, "(f,g)"'] & X^I \arrow[r, "p"] & X\times X
\end{tikzcd} \quad f \overset{r}{\sim} g$$

Аналогично определяются <u>хорошие</u> и <u>очень хорошие</u> правые гомотопии.

$\boxed{\text{Лемма } 1^\circ}$ Пусть $f \overset{R}{\sim} g \colon A \longrightarrow X$. Тогда существует хорошая правая гомотопия между f и g. Если, кроме того, A — корасслоенный, то существует и очень хорошая правая гомотопия между f и g.

Аналогично переписываются все Леммы вплоть до Леммы 5.

§ Взаимоотношение между $\overset{\ell}{\sim}$ и $\overset{R}{\sim}$.

$\boxed{\text{Лемма } 6}$ Пусть $f, g \colon A \longrightarrow X$.

(1) Если A — корасслоенный и $f \overset{\ell}{\sim} g$, то $f \overset{R}{\sim} g$

(2) Если X — расслоенный и $f \overset{R}{\sim} g$, то $f \overset{\ell}{\sim} g$.

<u>Док-во</u> Достаточно доказать (1). Пусть существует хорошая левая гомотопия между f и g:

$$\begin{tikzcd}
A \sqcup A \arrow[r, hook, "i_0+i_1"] & A \wedge I \arrow[r, "j"] \arrow[d, "H"] & A \\
& X &
\end{tikzcd}$$

i_0, i_1 — ациклические корасслоения по Лемме 0. Пусть

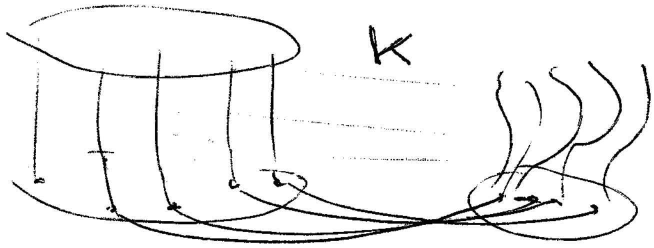
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "q"] \arrow[rr, bend right, "\Delta"'] & X^I \arrow[r, two heads] & X \times X
\end{tikzcd}$$

— очень хорошее пр-во путей.

$$\leadsto \quad \begin{tikzcd}
A \arrow[r, "qf"] \arrow[d, "i_0"', "\wr"] & X^I \arrow[d] \\
A \wedge I \arrow[r, "{(fj, H)}"'] \arrow[ur, dashed, "\exists K"] & X \times X
\end{tikzcd} \quad \leadsto \quad Ki_1 \colon A \longrightarrow X^I$$

— правая гомотопия между f и g. $\square$

Картинка:



Замечание Если A корасслоенный, X расслоенный, то понятия левой и правой гомотопии совпадают
$\to$ есть <u>гомотопия</u> — отношение эквивалентности на $\mathrm{Hom}(A, X)$.

Теорема Пусть $f: A \longrightarrow X$; A, X — оба корасслоенные и расслоенные объекты. Тогда $f \in W \Leftrightarrow f$ имеет гомотопически обратный морфизм.

<u>Док-во.</u> Пусть $f \in W$. Тогда по MCS имеем

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f", "\sim"'] \arrow[dr, hook, "q", "\sim"'] & & X \\ & C \arrow[ur, "p", "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

Покажем, что у q и p есть гомотопически обратные.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, equal] \arrow[d, "q", "\sim"'] & A \arrow[d] \\ C \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists R"] & * \end{tikzcd}$$

$\longrightarrow Rq = id_A$.

По Лемме 3° имеется биекция $q^*: \pi^R(C, C) \longrightarrow \pi^R(A, C)$

$q^*([qR]) = [q\underline{Rq}] = [q] \longrightarrow [qR] \sim id_C$.

Аналогично строится S: $pS = id$, $Sp \sim id_C$.

Пусть теперь f имеет гомотопически обратный $g: X \longrightarrow A$

$$\longrightarrow \begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "q", "\sim"'] \arrow[rr, bend right, "f"'] & C \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}.$$

Достаточно проверить, что $p \in W$

здесь C — корасслоенный и расслоенный.

Пусть $H: X \wedge I \longrightarrow X$ — гомотопия между fg и id_X

$$\longrightarrow \begin{tikzcd} X \arrow[r, "qg"] \arrow[d, "i_0"', "\sim"] & C \arrow[d, "p"] \\ X \wedge I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\exists H'"] & X \end{tikzcd}$$

Положим $S = H' i_1$.

Тогда $pS = id_X$.

$q \in W \Rightarrow \exists$ гомотопически обратный $R: C \longrightarrow A$.

$pq = f \Rightarrow pqR = fR \Rightarrow p \sim fR$

$S \sim qg \Rightarrow Sp \sim qgp \overset{\Downarrow}{\sim} qg\underline{fR} \sim qR \sim id_C \longrightarrow Sp \in W$

Наконец,

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, equal] \arrow[d, "p"'] & C \arrow[r, equal] \arrow[d, "sp"] & C \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "s"] & C \arrow[r, "p"] & X
\end{tikzcd}$$

□

Для топ. пространств эта Теорема называется Теоремой Уайтхеда.

$\boxed{\S}$ Гомотопическая категория модельной категории

Пусть $\mathcal{C}$ — (замкнутая) модельная категория.

Мы построим категории $\boxed{\mathcal{C}_c \quad \mathcal{C}_f \quad \mathcal{C}}$

полные подкатегории в $\mathcal{C}$, состоящие из
- корасслоенных,
- расслоенных
- расслоенных + корасслоенных объектов

$\pi\mathcal{C}_c \quad \pi\mathcal{C}_f \quad \pi\mathcal{C}_{cf}$

состоит из корасслоенных объектов + морфизмы — правые классы гомотоп. экв.

состоит из расслоенных объектов + морфизмы — левые классы гомотоп. экв.

состоит из корасслоенных + расслоенных объектов, морфизмы — классы гомотоп. экв.

Конструкция

$X \in Ob\,\mathcal{C}$. Рассмотрим морфизм $\varnothing \to X$

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \\
QX \arrow[ur, "p_X", "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

корасслоенная резольвента X

Двойственно

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, hook, "i_X", "\sim"'] & * \\
RX \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

расслоенная резольвента X

Если X — корасслоенный, будем полагать $QX = X$

Если X — расслоенный, будем полагать $RX = X$