

①  $W: f: M \rightarrow N, H_k M \xrightarrow{f_*} H_k N \quad \forall k \geq 0$

②  $C: 0 \rightarrow M_0 \rightarrow N_0 \rightarrow P_0 \rightarrow 0$

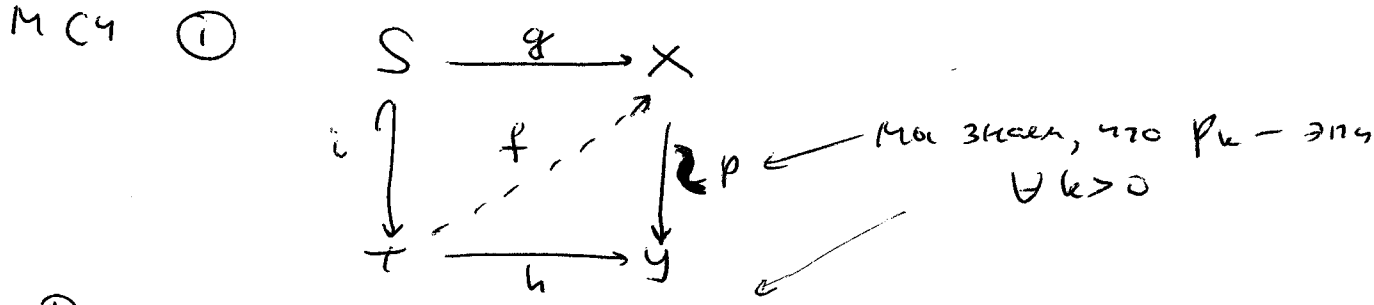
③  $F: M_k \rightarrow N_k \quad \forall k > 0$  ↖  $\forall k P_k$ -проективный

**Теорема** Эти условия задают стр-гу З.М.К. на  $C_k R$

Доказ  $M \subset 1$  очевидна: пределы и копределы берутся покомпонентно

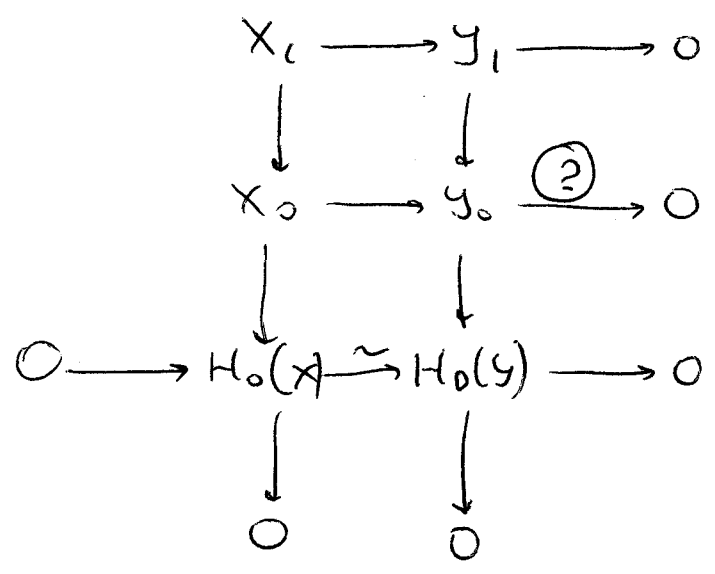
$M \subset 2$  очевидна.

$M \subset 3$  Регрессия, моно, эти - покомпонентно, прямое слагаемое проективного - проективно  $\rightarrow 0_k$



Докажем, что  $p_0$  - эпиморфизм

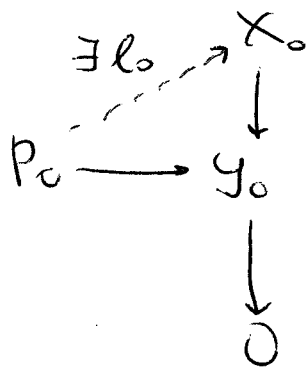
$(p_0)_* : H_0(X) \cong H_0(Y)$



$\leadsto 0 \rightarrow K_0 \rightarrow X_0 \rightarrow Y_0 \rightarrow 0$  - точная последовательность, причем  $K_0$  - ациклический комплекс.

Построим нужное  $f$  по индукции:

замечать, что  $T_0 = S_0 \oplus P_0$   
 $\uparrow$  проективный



Определим  $f_0 = (g_0, \ell_0): T_0 \rightarrow X_0$

Пусть  $\forall j < k$   $f_j$  уже построены, и

$$1) \partial f_j = f_{j-1} \partial \quad 1 \leq j < k$$

$$2) p_j f_j = h_j \quad 0 \leq j < k$$

$$3) f_j i_j = g_j$$

Построим  $f_k: T_k \rightarrow X_k$  (так же, как  $f_0$ )

- он удовлетворяет (2) и (3)

Рассмотрим  $F = \partial \tilde{f}_k - f_{k-1} \partial$

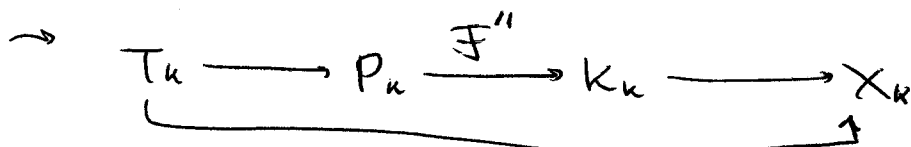
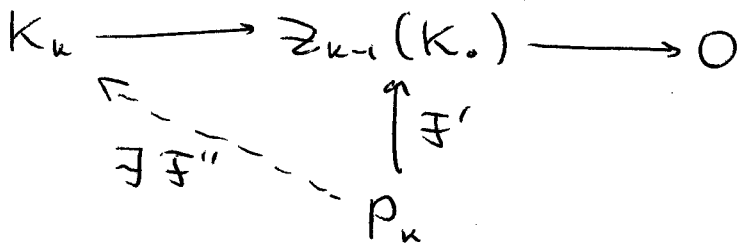
Тогда а)  $\partial F = 0$ , поскольку  $f_k$  коммутирует с  $\partial$

б)  $p_k F = 0$ , поскольку  $p_k \tilde{f}_k = h_k$

в)  $F i_k = 0$ , поскольку  $\tilde{f}_k i_k = g_k$

$\rightarrow F$  индуцирует отображение

$$F': T_k / i_k S_k \cong P_k \rightarrow Z_{k-1}(K)$$



$F'''$  - нужная поправка:

$$f_k := \tilde{f}_k - F'''$$

Доказано MCS - см. далее

**§** The small object argument (Quillen) (принцип малого объекта)

MC1':  $\exists$  все малые пределы и копределы

**Опр.**  $B: \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathcal{C}$ ,  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$   
 $\{0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots\}$

$\rightarrow B(n) \longrightarrow \varinjlim B$  — естественное отображение

$\varinjlim \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B(n)) \xrightarrow{\psi} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \varinjlim B)$

$A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  называется сепарационно малым,

если  $\psi$  — изоморфизм  $\forall$  функтора  $B$

**Пример**  $\mathcal{C} = \text{Set} \rightarrow A \in \text{Ob} \mathcal{C}$  — сепарационно малым  $\iff$   
 $A$  — конечно

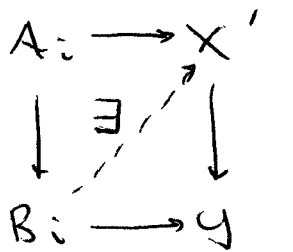
$\mathcal{C} = \text{Mod}_R \rightarrow A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  — сеп. малым  $\iff A$  конечно представим

$\mathcal{C} = \text{Ch}_R \rightarrow A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  — сеп. малым  $\iff A_0$  ограничен и состоит из конечно представимых модулей

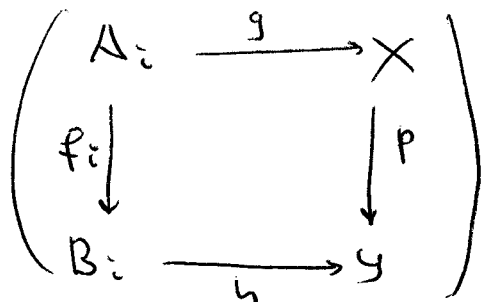
Пусть  $\mathcal{F} = \{f_i: A_i \rightarrow B_i\}_{i \in I}$  — множество

$X \xrightarrow{p} Y$  — хотим разложить в  $X \rightarrow X' \rightarrow Y$

так, чтобы  $A_i \rightarrow X'$ , и  $X'$  был близок к  $X$  (чтобы потом сказать  $X \cong X'$ )

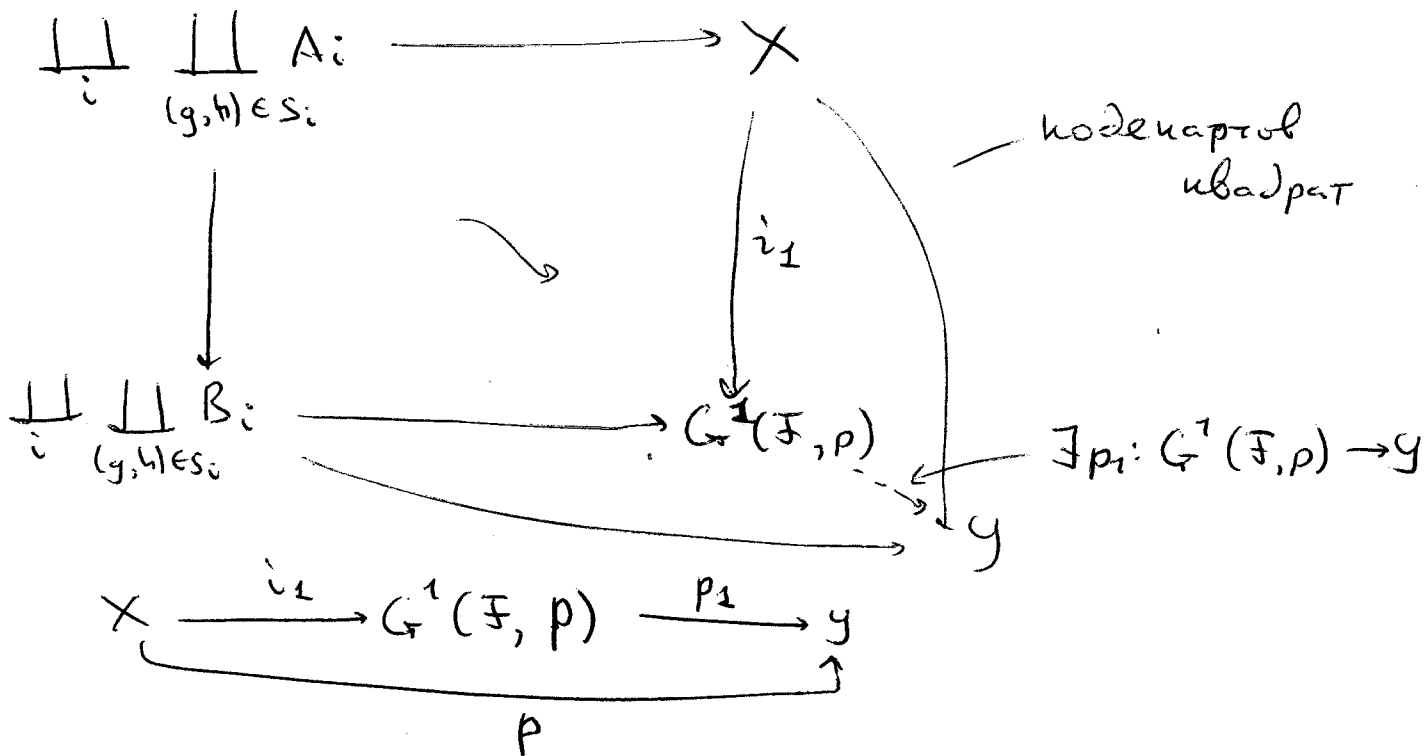


$\forall i \in I$



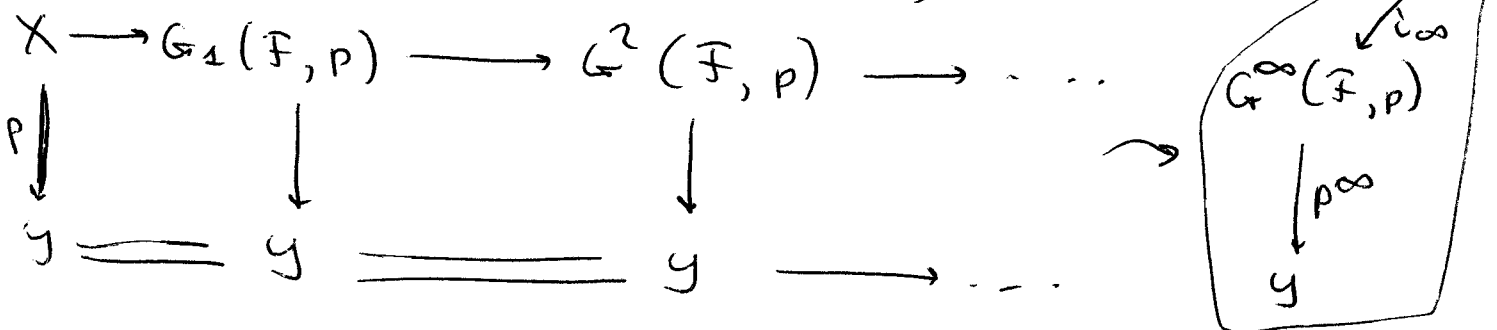
$\iff S_i = \{(g, h)\}$

① Определим  $G^1(F, p)$



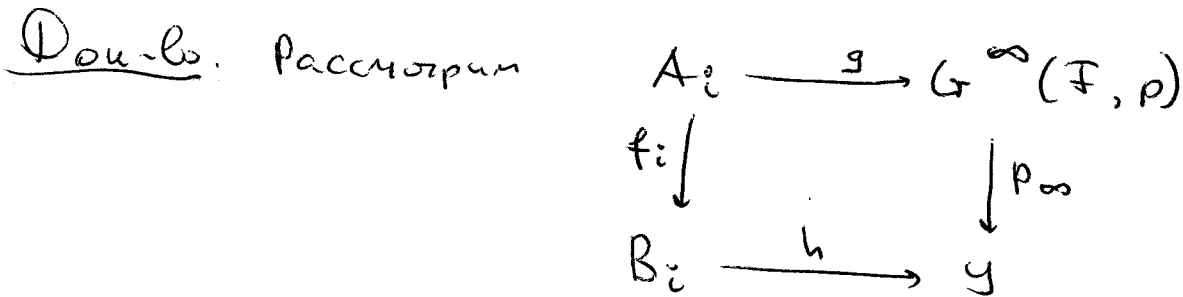
можно продолжать эту процедуру и получить  $G^2, G^3, \dots$ :

$\forall k \geq 1$  определен  $G^k(F, p)$  и  $p_k: G^k(F, p) \rightarrow y$   
таки, что  $G^k(F, p) = G^1(F, p_{k-1})$ ,  $p_k = (p_{k-1})_1$ .



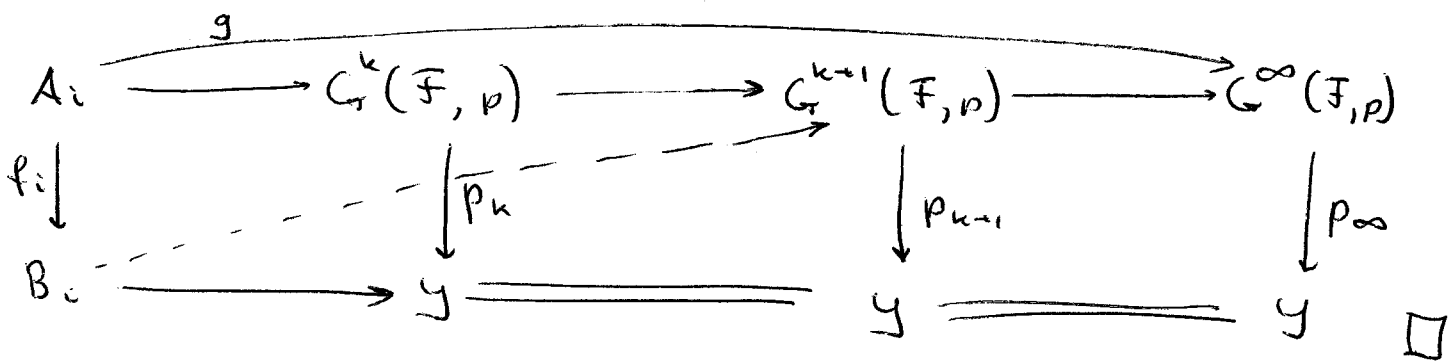
$p_\infty \circ i_\infty = p$

**Лемма** Пусть  $\forall i \in I$  объект  $A_i$   
субъективно малый. Тогда  $p_\infty$  имеет RLP  
для всякого  $f_i \in F$



$A_i$  — субъективно малый  $\rightsquigarrow \exists k \in \mathbb{N}$  т.ч.

$$g: A_i \rightarrow G^k(F, p) \rightarrow G^\infty(F, p)$$



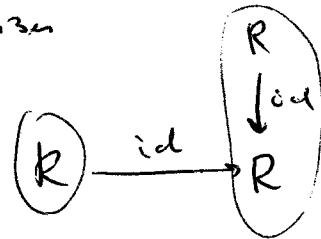
### § Вывод аксиомы MCS

Определим  $D^n := \left\{ \begin{array}{c} R \\ \downarrow \text{id} \\ R \end{array} \right\}^{(n)}$

$$S^n := k(R, n) = \{R^{(n)}\}$$

Существует канонический морфизм

$$j_n: S^{n-1} \longrightarrow D^n:$$



$$S^{-1} := 0 \rightsquigarrow j_0: S^{-1} \longrightarrow D^0$$

$$D^0 = k(R, 0)$$

$S^n, D^n$  — сепарационально малы

Лемма  $f: X \longrightarrow Y$  — морфизм в  $\text{Chr}$

a)  $f$  — расслоение  $\Leftrightarrow f$  имеет RLP относительно  $0 \longrightarrow D^n \forall n \geq 1$

b)  $f$  — азимитное расслоение  $\Leftrightarrow f$  имеет RLP относительно  $j_n: S^{n-1} \longrightarrow D^n \forall n \geq 0$

Доказ. Несложно  $\square$

Наконец, док-во MCS (i):

$$f: X \longrightarrow Y, \mathcal{F} = \{j_n\}$$

$$\sim X \xrightarrow{i_\infty} G_r^\infty(\mathbb{F}, f) \xrightarrow{p_\infty} Y$$

$$\text{MCS (ii): } \mathcal{F}' = \{0 \longrightarrow D^n\}_{n \geq 1} \longrightarrow$$

$$X \xrightarrow{\sim} G_r^\infty(\mathbb{F}, f) \longrightarrow Y$$

↑ несложно проверить

§

**Теорема**  $\text{Hom}_{\text{Mod } S_{ChR}}(K(A, n), K(B, n)) \cong \text{Ext}^{n-m}(A, B)$

Доказ.: ① Достаточно рассмотреть случай  $m=0$  и  $n \geq 0$   
(резольвенты как? с того же места)

② Пусть  $P \rightarrow K(A, 0)$  - проективная резольвента  $K(A, 0)$ , т.е., резольвенту в смысле модельной категории:

$$\emptyset \longrightarrow P \xrightarrow{\sim} K(A, 0).$$

$P$  - кораслоенный объект, кроме того, любой объект  $S_{ChR}$  является расслоенным.

$$\sim \text{Hom}(K(A, 0), K(B, n)) \cong \text{Hom}(P, K(B, n)) \cong \pi(P, K(B, n))$$

Рассмотрим  $X$  - хороший объект пути для  $K(B, n)$ :

$$X = \left\{ \begin{array}{l} B \oplus B \quad (n) \\ \downarrow \beta_0 - \beta_1 \\ B \quad (n-1) \end{array} \right\} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} K(B, n) & \xrightarrow{\rho} & X \\ \beta_1 \longmapsto & & (b, b) \end{array}$$

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta_0} \\ \xrightarrow{\beta_1} \end{array} K(B, n)$$

Пусть  $f, g: P \rightarrow K(B, n)$  представляют один и тот же класс в  $\pi(P, K(B, n))$ . Это равносильно тому, что  $\exists$  правая гомотопия между ними в соответствии с  $X$ :

$$H: P \longrightarrow X : \quad \begin{array}{l} \rho \circ H = f \\ \rho_1 H = g \end{array}$$

①  $P$  - проект. резольвента  $B$  (как модуля)

$f, g: P \rightarrow K(B, n)$  право-гомотопны в соответствии с  $X$

$$\exists h: P_{n-1} \rightarrow B : h \partial = f_n - g_n$$

$$\begin{array}{ccc} P_n & \xrightarrow{(f, g)} & B \oplus B \\ \partial \downarrow & & \downarrow - \\ P_{n-1} & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

$f, g$  левогомотопны  
 (они право-гомотопны см. док-во этой леммы: там мы могли выбрать любой объект пути для построения правой гомотопии.)