① W: $f: M \to N \quad H_k M \xrightarrow[\sim]{f_*} H_k N \quad \forall k \geq 0$

② C: $0 \to M_\bullet \to N_\bullet \to P_\bullet \to 0$

$\forall k$ P_k — проективный

③ F: $M_k \twoheadrightarrow N_k \quad \forall k > 0$

$\boxed{\text{Теорема}}$ Эти условия задают стр-ру з.м.к. на Ch_R

<u>Док-во</u> MC 1 очевидна: пределы и копределы берутся покомпонентно

MC 2 очевидна.

MC 3 Ретракты, моно, эпи — покомпонентно; прямое слагаемое проективного — проективно $\rightsquigarrow$ Ok

MC 4 ①

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p", "\sim"'] \\ T \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dashed, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Мы знаем, что p_k — эпи $\forall k>0$

Докажем, что p_0 — эпиморфизм

$$(p_0)_*: H_0(X) \simeq H_0(Y)$$

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & Y_0 \arrow[r, "②"] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H_0(X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & H_0(Y) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow \quad 0 \to K_\bullet \to X_\bullet \to Y_\bullet \to 0$ — точная посл-ть, причем $K_\bullet$ — ацикличный комплекс.

Построим нужное f по индукции:

заметим, что $T_0 = S_0 \oplus P_0$ ← проективный

$$\begin{tikzcd} & X_0 \arrow[d] \\ P_0 \arrow[ur, dashed, "\exists l_0"] \arrow[r] & Y_0 \arrow[d] \\ & 0 \end{tikzcd}$$

Определим $f_0 = (g_0, l_0) : T_0 \longrightarrow X_0$

Пусть $\forall j<k$ f_j уже построен, и

1) $\partial f_j = f_{j-1}\partial \quad 1 \le j < k$

2) $p_j f_j = h_j \quad 0 \le j < k$

3) $f_j i_j = g_j$

Построим $\tilde{f}_K : T_K \longrightarrow X_K$ (так же, как f_0)

– он удовлетворяет (2) и (3)

Рассмотрим $F = \partial \tilde{f}_K - f_{K-1}\partial$

Тогда a) $\partial F = 0$, поскольку f_{K-1} коммутирует с ∂

b) $p_{K-1} F = 0$, поскольку $p_K \tilde{f}_K = h_K$

c) $F i_K = 0$, поскольку $\tilde{f}_K i_K = g_K$

$\rightsquigarrow$ F индуцирует отображение

$F' : T_K / i_K S_K \simeq P_K \longrightarrow Z_{K-1}(K)$

$$\begin{tikzcd} K_K \arrow[r] & Z_{K-1}(K_\cdot) \arrow[r] & 0 \\ & P_K \arrow[u, "F'"] \arrow[ul, dashed, "\exists F''"] \end{tikzcd}$$

$\rightarrow$

$$\begin{tikzcd} T_K \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "F'''"] & P_K \arrow[r, "F''"] & K_K \arrow[r] & X_K \end{tikzcd}$$

F''' – нужная поправка:

$f_K := \tilde{f}_K - F'''$

Док-во MCS – см. далее

□

$\boxed{\S}$ The small object argument (Quillen)
(принцип малого объекта)

MC1': $\exists$ все малые пределы и копределы

$\boxed{\text{Опр.}}$ $B : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathcal{C}$, $A \in Ob(\mathcal{C})$

$\{0 \to 1 \to 2 \to \ldots\}$

$\rightsquigarrow B(n) \longrightarrow \varinjlim B$ — естественное отображение

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B(n)) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \varinjlim B)$$

$A \in Ob(\mathcal{C})$ называется <u>секвенциально малым</u>, если ψ — изоморфизм $\forall$ функтора B

$\boxed{\text{Пример}}$ $\mathcal{C} = Set \rightsquigarrow A \in Ob\,\mathcal{C}$ — секвенциально малый $\Leftrightarrow$ A — конечно

$\mathcal{C} = Mod_R \rightsquigarrow A \in Ob(\mathcal{C})$ — секв. малый $\Leftrightarrow A$ конечно представим

$\mathcal{C} = Ch_R \rightsquigarrow A \in Ob(\mathcal{C})$ — секв. малый $\Leftrightarrow A_\bullet$ ограничен и состоит из конечно представимых модулей

Пусть $\mathcal{F} = \{f_i : A_i \longrightarrow B_i\}_{i \in I}$ ← множество

$X \xrightarrow{p} Y$ — хотим разложить в $X \longrightarrow X' \longrightarrow Y$

так, чтобы
$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\ B_i \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & Y \end{tikzcd}$$
, и X' был близок к X (чтобы потом оказалось $X \simeq X'$)

$\forall i \in I$
$$\left(\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f_i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B_i \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd} \right) =: S_i = \{(g,h)\}$$

① Определим $G^1(\mathcal{F}, p)$

$$\begin{tikzcd}
\coprod\limits_i \coprod\limits_{(g,h)\in S_i} A_i \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left] & \\
\coprod\limits_i \coprod\limits_{(g,h)\in S_i} B_i \arrow[r] \arrow[drr, bend right] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner"] & G^1(\mathcal{F}, p) \arrow[dr, dashed] & \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

кодекартов квадрат

$\exists p_1 : G^1(\mathcal{F}, p) \to Y$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_1"] \arrow[rr, bend right, "p"'] & G^1(\mathcal{F}, p) \arrow[r, "p_1"] & Y
\end{tikzcd}$$

Можем итерировать эту процедуру и получить $G^2, G^3, \dots$:
$\forall k \geq 1$ определен $G^k(\mathcal{F}, p)$ и $p_k : G^k(\mathcal{F}, p) \longrightarrow Y$
так, что $G^k(\mathcal{F}, p) = G^1(\mathcal{F}, p_{k-1})$, $p_k = (p_{k-1})_1$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "p"] & G_1(\mathcal{F}, p) \arrow[r] \arrow[d] & G^2(\mathcal{F}, p) \arrow[r] \arrow[d] & \dots & & X \arrow[d, "i_\infty"] \\
Y \arrow[r, equal] & Y \arrow[r, equal] & Y \arrow[r] & \dots \arrow[r, squiggly] & {} & G^\infty(\mathcal{F}, p) \arrow[d, "p_\infty"] \\
& & & & & Y
\end{tikzcd}$$

и $p_\infty i_\infty = p$

$\boxed{\text{Лемма}}$ Пусть $\forall i \in I$ объект A_i секвенциально малый. Тогда p_∞ имеет RLP для всякого $f_i \in \mathcal{F}$

__Док-во.__ Рассмотрим

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f_i"] & G^\infty(\mathcal{F}, p) \arrow[d, "p_\infty"] \\
B_i \arrow[r, "h"] & Y
\end{tikzcd}$$

A_i — секвенциально малый $\rightsquigarrow \exists k \in \mathbb{N}$ т.ч.

$g : A_i \longrightarrow G^k(\mathcal{F}, p) \longrightarrow G^\infty(\mathcal{F}, p)$

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r] \arrow[d, "f_i"'] \arrow[rrr, bend left, "g"] & G^k(\mathcal{F}, p) \arrow[r] \arrow[d, "p_k"] & G^{k+1}(\mathcal{F}, p) \arrow[r] \arrow[d, "p_{k+1}"] & G^\infty(\mathcal{F}, p) \arrow[d, "p_\infty"] \\
B_i \arrow[r] \arrow[urr, dashed] & Y \arrow[r, equal] & Y \arrow[r, equal] & Y
\end{tikzcd}$$
$\square$

$\boxed{\S}$ Вывод аксиомы MC5

Определим $D^n := \left\{ \begin{matrix} R & (n) \\ \downarrow id & \\ R & (n-1) \end{matrix} \right\}$

$$S^n := K(R, n) = \{R(n)\}$$

Существует канонический морфизм

$$j_n : S^{n-1} \longrightarrow D^n : \quad R \xrightarrow{id} \left(\begin{matrix} R \\ \downarrow id \\ R \end{matrix} \right)$$

$S^{-1} := 0 \rightsquigarrow j_0 : S^{-1} \longrightarrow D^0$

$D^0 = K(R, 0)$

S^n, D^n — секвенциально малые

$\boxed{\text{Лемма}}$ $f : X \longrightarrow Y$ — морфизм в Ch_R

a) f — расслоение $\Leftrightarrow$ f имеет RLP отн-но $0 \longrightarrow D^n$ $\forall n \geq 1$

b) f — ацикличное расслоение $\Leftrightarrow$ f имеет RLP отн-но $j_n : S^{n-1} \to D^n$ $\forall n \geq 0$

Док-во Несложно $\square$

Наконец, док-во MC5 (i):

$f : X \longrightarrow Y$, $\mathcal{F} = \{j_n\}$

$\rightsquigarrow$ $X \xrightarrow{i_\infty} G^\infty(\mathcal{F}, f) \underset{\sim}{\xrightarrow{p_\infty}} Y$

MC5(ii): $\mathcal{F}' = \{0 \longrightarrow D^n\}_{n \geq 1} \longrightarrow$

$X \overset{\sim}{\hookrightarrow} G^\infty(\mathcal{F}, f) \longrightarrow Y$

несложно проверить

$\boxed{\text{Теорема}}$ $\mathrm{Hom}_{Ho(Ch_R)}(K(A,m), K(B,n)) \simeq \mathrm{Ext}^{n-m}(A,B)$

Док-во: ① Достаточно рассмотреть случай $m=0$, $n \geq 0$ (резольвенты как? с того же места)

② Пусть $P \longrightarrow K(A,0)$ — проективная резольвента $K(A,0)$, т.е., резольвенту в смысле модельной категории:

$$\varnothing \hookrightarrow P \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} K(A,0).$$

P — корасслоенный объект; кроме того, любой объект Ch_R является расслоенным.

$\rightsquigarrow \mathrm{Hom}(K(A,0), K(B,n)) \cong \mathrm{Hom}(P, K(B,n)) \cong \pi(P, K(B,n))$

Рассмотрим X — хороший объект путей для $K(B,n)$:

$$X = \left\{ \begin{array}{cc} B \oplus B & (n) \\ \downarrow b_0 - b_1 & \\ B & (n-1) \end{array} \right\} \qquad K(B,n) \xrightarrow{q} X, \quad b \longmapsto (b,b)$$

$$X \underset{p_1}{\overset{p_0}{\rightrightarrows}} K(B,n)$$

Пусть $f, g : P \longrightarrow K(B,n)$ представляют один и тот же класс в $\pi(P, K(B,n))$. Это равносильно тому, что $\exists$ правая гомотопия между ними в соответствии с X:

$$H : P \longrightarrow X : \quad p_0 H = f, \quad p_1 H = g$$

① P — проект. резольвента B (как модуля)

$f, g : P \longrightarrow K(B,n)$ право-гомотопны в соответствии с X

$\Updownarrow$

$\exists h : P_{n-1} \longrightarrow B : \quad h\partial = f_n - g_n$

$$\begin{tikzcd} P_n \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "\partial"] & B \oplus B \arrow[d, "-"] \\ P_{n-1} \arrow[r, "h"] & B \end{tikzcd}$$

f, g левогомотопны
$\downarrow$
(они правогомотопны
см. док-во этой леммы:
там мы могли выбрать
любой объект путей
для построения
правой гомотопии.