С. Ягунов

§ Симплициальные объекты

Δ — категория: $[n] \in Ob(\Delta)$ $[n] = \{0, 1, \ldots, n\}$

$Hom([n],[m]) = \{f : \{0,..,n\} \to \{0,\ldots,m\} \mid f \text{ монотонна}\}$

Опр. Симплициальным множеством называется функтор $\Delta^o \xrightarrow{X} Set$ $X[n] = X_n$ — n-мерные симплексы

Категория симплициальных множеств $sSet$:

морфизмы — естественные преобразования функторов

$\partial_i^n : [n] \longrightarrow [n+1]$ — i-ая грань

$s_i^n : [n+1] \longrightarrow [n]$ — i-ое вырождение

Пример $Y \in Top \rightsquigarrow Sing(Y)$:

$Sing(Y)_n = \{\Delta_n^{top} \xrightarrow{\text{непр.}} Y\}$, где $\Delta_n^{top} = \{(x_0,..,x_n) \mid x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}$

$\rightsquigarrow$ имеется функтор $Sing$:

$? : sSet \longleftarrow Top : Sing$

нет ли левого сопряженного?

Есть: $|\cdot|$ — функтор геометрической реализации

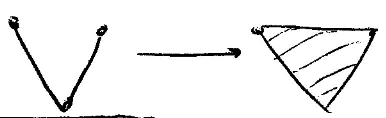
- приклеивание симплексов по данным склейки

Структура ЗМК на $sSet$

$f : X \longrightarrow Y$

1. f — слабая эквивалентность, если $|f|$ — слабая экв-сть в Top.
2. f — корасслоение, если $\forall f_n : X_n \longrightarrow Y_n$ — мономорфизм
3. f — расслоение, если f имеет RLP в соответствии со всеми ацикличными корасслоениями

рог



— достаточно, чтобы f обладал RLP в соответствии с такими морфизмами

Теорема $|\cdot| \; sSet \rightleftarrows Top : Sing$ — сопряженные функторы, индуцирующие эквивалентность между $Ho(sSet)$ и $Ho(Top)$

$\mathcal{C}$ – категория; Симплициальный объект – функтор $\Delta^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$; морфизмы – естественные преобразования

⇝ $s\mathcal{C}$ – категория симплициальных объектов

Например, $\mathrm{const}: \mathcal{C} \longrightarrow s\mathcal{C}$

Как ввести на $s\mathcal{C}$ структуру ЗМК?

Пусть есть $U: \mathcal{C} \longrightarrow Set$, $f: X \longrightarrow Y$

1. f – слабая эквивалентность, если $U(f)$ – слабая экв-ть в $sSet$
2. f – расслоение, если $U(f)$ – расслоение в $sSet$
3. f – корасслоение, если f имеет LLP отн-но симпл. расслоений

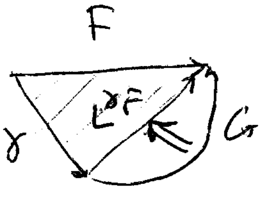
Пример $\mathcal{C} = Mod_R$ $\exists N: sMod_R \longrightarrow Ch_R$

Гомотопии $sMod_R \Longleftrightarrow$ гомологии в Ch_R

§ Производные функторы и эквивалентность категорий

Опр. $\gamma: A \longrightarrow A'$ Левый производный функтор функтора $F: A \longrightarrow B$ в соответствии с γ – это функтор $L^\gamma F: A' \longrightarrow B$ и естественное преобразование $\varepsilon: L^\gamma F \circ \gamma \longrightarrow F$, обладающие универсальным свойством: для любого $G: A \longrightarrow B$ и естественного преобразования $\eta: G \circ \gamma \longrightarrow F$ существует единственное ест. преобразование $\Theta: G \longrightarrow L^\gamma F$ т.ч.

$$\begin{tikzcd} G \circ \gamma \arrow[d, "\Theta \circ \gamma"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\ L^\gamma F \circ \gamma \arrow[r, "\varepsilon"'] & F \end{tikzcd}$$



Следствие Пусть $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ переводит слабые экв-ти в изоморфизмы. Тогда $\exists F': Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{D}$ т.ч. $F = F' \circ \gamma$

⇝ $F' = L^\gamma F = R^\gamma F$ $(\varepsilon = id)$

$\boxed{\text{Теорема}}$ Пусть $\mathcal{C}$ — ЗМК, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, и $F(f)$ — изоморфизм, если f — слабая эквивалентность между корасслоенными объектами. Тогда пара $(L^\gamma F, t)$ существует и $\forall$ корасслоенного объекта $X \in Ob\,\mathcal{C}$

$$t_X : L^\gamma F(X) \longrightarrow F(X) \text{ — изоморфизм.}$$

$\boxed{\text{Лемма}}$ Пусть $\mathcal{C}$ — ЗМК, $F : \mathcal{C}_c \longrightarrow \mathcal{D}$, и $F(\alpha)$ — изоморфизм, если α — ацикличное корасслоение. Пусть $f, g : A \longrightarrow B$ в $\mathcal{C}_c$. Тогда

$$f \overset{R}{\sim} g \iff F(f) = F(g)$$

<u>Док-во Леммы:</u> $f, g : A \longrightarrow B$, $f \overset{R}{\sim} g$

$\rightsquigarrow \exists$ очень хорошая правая гомотопия $H : A \longrightarrow B^I$ между f и g. $\varnothing \hookrightarrow B \underset{w}{\xrightarrow{\sim}} B^I$

$\rightsquigarrow B^I$ — корасслоенный

$\rightarrow F(w)$ корректно определен и является изоморфизмом

$$B \longrightarrow B^I \underset{p_1}{\overset{p_0}{\rightrightarrows}} B \times B$$

$$F(p_0)\underline{F(w)} = F(p_1)\underline{F(w)} \implies F(p_0) = F(p_1)$$

При этом $f = p_0 H$, $g = p_1 H \rightsquigarrow F(f) = F(g)$

По Лемме, если $f \overset{R}{\sim} g$, то $F(f) = F(g)$

$\rightsquigarrow F$ индуцирует $F' : \pi\mathcal{C}_c \longrightarrow \mathcal{D}$.

$\exists$ резольвентный функтор $Q : \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_c$;

он переводит слабые эквивалентности в гомотоп. экв-сти.

$$\begin{tikzcd}
\rightsquigarrow F'Q : \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{D} \\
& Ho(\mathcal{C}) \arrow[u, dashed, "\exists F'' =: L^\gamma F"']
\end{tikzcd}$$

переводит слабые экв-сти в изоморфизмы

Построим $t: L^\gamma F \circ \gamma \longrightarrow F$ так:

$t = F(p_X)$ для любого объекта X, где $p_X : QX \longrightarrow X$

$$L^\gamma F(X) = F(QX) \xrightarrow{F(p_X)} F(X)$$

X — корасслоенный $\rightsquigarrow QX = X$, $t_X = id$

Проверим универсальность: $G: Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{D}$

$S: G\gamma \longrightarrow F$

Пусть S' построен. $S': G\circ\gamma \longrightarrow F^\gamma L \circ \gamma$

$$\begin{tikzcd}
G(QX) \arrow[r, "S'_{QX}"] \arrow[d, "G(\gamma p_X)\wr"'] \arrow[rr, bend left, "S_{QX}"] & L^\gamma F(QX) \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & F(QX) \arrow[d, "F(p_X)"] \\
G(X) \arrow[r, "S'_X"'] & L^\gamma F(X) \arrow[r] & F(X)
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow \bar{S} : G \longrightarrow F^\gamma L$ $\square$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$. Определим $\mathbb{L}F : Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{D})$

ЗМК

тотальный левый производный функтор

— производный для $\gamma_D \circ F$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "\gamma_C"'] & \mathcal{D} \arrow[r, "\gamma_D"] & Ho(\mathcal{D}) \\
& Ho(\mathcal{C}) \arrow[ur, "\mathbb{L}F"'] &
\end{tikzcd}$$

(он определен ед. образом с точностью до ест. изоморфизма)

$\boxed{\text{Пример}}$ Пусть M — правый R-модуль. Тогда

$M \otimes - : R-Mod \longrightarrow Ab (= \mathbb{Z}-Mod)$

левые R-модули

$\rightsquigarrow M\otimes - : Ch_R \longrightarrow Ch_{\mathbb{Z}}$

Он удовлетворяет условиям Леммы $\rightsquigarrow \exists$ производный функтор $\mathbb{L}F$

$N \in R-Mod \rightsquigarrow \mathbb{L}F(K(N,0)) \simeq F(P_\bullet)$, где $P_\bullet \longrightarrow N$ — проект. рез.

$\rightarrow H_i \mathbb{L}F(K(n,0)) \simeq Tor^n(M,N)$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}: G$ — сопряж. функторы

Пусть (1) F сохраняет корасслоения, G сохраняет расслоения

Тогда $\exists\ \mathbb{L}F: Ho(\mathcal{C}) \rightleftarrows Ho(\mathcal{D}): \mathbb{R}G$

— ~~сопряженные~~ производные функторы, сопряженные друг к другу

Если, кроме того,

(2) $f: A \longrightarrow G(X)$ — слабая эквивалентность

$$\Updownarrow$$

$f^\flat: F(A) \longrightarrow X$ — слабая эквивалентность,

то эти функторы реализуют эквивалентность категорий

(Квилленовская пара)

$\boxed{\text{Замечание}}$ (1) $\Leftrightarrow$ (1') $\Leftrightarrow$ (2')

(1') ~~F~~ G сохраняет расслоения и ацикличные расслоения

(2') F сохраняет корасслоения и ацикличные корасслоения

Пусть F сохраняет корасслоения и ацикличные корасслоения

$$f: A \xhookrightarrow{\sim} B \quad \mathcal{C} \qquad\qquad g: X \twoheadrightarrow Y \quad \mathcal{D}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & G(X) \arrow[d, "G(g)"] \\
B \arrow[r, "v"'] \arrow[ur, dashed, "w^\#"] & G(Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "u^\flat"] \arrow[d, hook, "F(f)", "\wr"'] & X \arrow[d, two heads, "g"] \\
F(B) \arrow[r, "v^\flat"'] \arrow[ur, dashed, "\exists w"] & Y
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow w^\#$ — ~~левый~~ правый подъем для $G(g)$

$\rightsquigarrow G(g)$ — расслоение $\rightsquigarrow G$ сохраняет расслоения