С. Ягунов

Теорема Пусть $F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}: G$ — сопряжённые функторы

Пусть (1) F сохраняет корасслоения, G сохраняет расслоения

Тогда $\exists\ \mathbb{L}F: Ho(\mathcal{C}) \rightleftarrows Ho(\mathcal{D}): \mathbb{R}G$

— сопряжённые функторы

Если, кроме того,

(2) $\forall$ корасслоенного A в $\mathcal{C}$ и расслоенного X в $\mathcal{D}$

$$f: A \longrightarrow G(X) \text{ — w.e.} \Leftrightarrow f^b: F(A) \longrightarrow X \text{ — w.e.}$$

то $\mathbb{L}F$ и $\mathbb{R}G$ устанавливают эквивалентность категорий.

Замечание (1) $\Leftrightarrow$ (1') $\Leftrightarrow$ (2')

(1') G сохраняет расслоения и ацикличные расслоения

(2') F сохраняет корасслоения и ацикличные корасслоения

Лемма (K. Brown) $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ (з.м.к.), F переводит ацикличные корасслоения для корасслоенных объектов $(\mathcal{C}_c)$ в w.e.

Тогда F сохраняет все w.e. для $\mathcal{C}_c$.

Док-во $f: A \xrightarrow{\sim} B$ $\qquad A, B \in \mathcal{C}_c$

$$\begin{tikzcd} A \amalg B \arrow[rr, "f+id"] \arrow[dr, hook, "q"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "\sim p"'] & \end{tikzcd}$$

$in_0: A \hookrightarrow A \amalg B$

$in_1: B \hookrightarrow A \amalg B$

$q \circ in_0: A \hookrightarrow C$

$q \circ in_1: B \hookrightarrow C$

$\begin{cases} pq \circ in_i \text{ — w.e.} \\ p \text{ — w.e.} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{q \circ in_i}$ — w.e. ⇝ это ацикличное корасслоение

$\Downarrow$

$F(q \circ in_i)$ — w.e. $\longrightarrow F(p \circ q \circ in_0)$ — w.e. $= F(f)$

$F(pq \circ in_i) = F(id)$ — w.e. ⇝ $F(p)$ — w.e.

$\square$

$\boxed{\text{Замечание}}$ Двойственная Лемма также верна

<u>Док-во Теоремы</u>

По (2') F сохраняет ацикличные корасслоения $\rightsquigarrow$ сохраняет w.e.
По (1') G сохраняет w.e. $\longrightarrow$ $\exists\ \mathbb{L}F$ и $\mathbb{R}G$

F — левый сопряженный и G $\rightsquigarrow$ F сохраняет $\varinjlim$, $\varnothing$
G сохраняет $\varprojlim$, $*$

$\rightsquigarrow$ F сохраняет корасслоенные объекты в $\mathcal{C}$,
G сохраняет расслоенные объекты в $\mathcal{D}$. $\rightsquigarrow$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\overset{\text{корасс.}}{A}, \overset{\text{рассл.}}{G(X)}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\overset{\text{корасс.}}{F(A)}, \overset{\text{рассл.}}{X})$$

Хотим показать, что $\pi(A, G(X)) \cong \pi(F(A), X)$

$f, g : A \longrightarrow G(X)$

$f \sim g \rightsquigarrow \exists$ хорошая гомотопия $H: \underset{\text{хороший цилиндр}}{A \wedge I} \longrightarrow G(X)$

$A \wedge I$ — корасслоенный объект

$F(A \wedge I)$ — цилиндр объекта $F(A)$

$\rightsquigarrow H^\flat : F(A \wedge I) \longrightarrow X$ — левая гомотопия между $f^\flat$ и $g^\flat$

Обратно, из существования такой гомотопии между $f^\flat$ и $g^\flat$ следует существование гомотопии между f и g

Пусть теперь A, X — любые. Выберем резольвенты:

$$QA \xrightarrow{\sim} A, \quad X \overset{\sim}{\hookrightarrow} SX$$

$$\mathrm{Hom}(A, \mathbb{R}G(X)) = \mathrm{Hom}(QA, G(S(X))) \simeq \mathrm{Hom}(F(QA), SX) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{L}F(A), X)$$

(все Hom в гомотопических категориях $Ho(\mathcal{C})$, $Ho(\mathcal{D})$).

$\rightsquigarrow Ho\,\mathcal{C}^{o} \times Ho\,\mathcal{D} \underset{\mathrm{Hom}(\mathbb{L}F(-),-)}{\overset{\mathrm{Hom}(-,\mathbb{R}G(-))}{\underset{\cong}{\rightrightarrows}}} \mathrm{Set}$ — экв. функторы

Пусть теперь кроме ①, выполнено ②.
Если A — корасслоенный, X — расслоенный, то

$$i^{\#}_{F(A)}: A \longrightarrow G(SF(A)) \ \text{— w.e.}$$

$$\left(i_{F(A)}: F(A) \xrightarrow{\sim} SF(A)\right)$$

$\rightarrow \varepsilon: A \longrightarrow \mathbb{R}G(\mathbb{L}F(A))$ — изоморфизм
— это единица сопряжения; аналогично про коединицу
$\forall$ объект изоморфен корасслоенному или расслоенному
$\rightarrow$ этого достаточно

$\square$

$\boxed{\S}$ Гомотопические пределы

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[d, equal] & S^{n-1} \arrow[l] \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & D^n \arrow[r, bend left, "\mathrm{colim}"] \arrow[d, "\wr"] & S^n \arrow[d, "\text{— это не гомотопическая эквивалентность!}"] \\
* & S^{n-1} \arrow[l] \arrow[r] & * \arrow[r, bend left, "\mathrm{colim}"] & *
\end{tikzcd}$$

Цель: построить $\mathbb{L}\mathrm{colim}: Ho(\mathcal{C}^{\mathcal{D}}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$
так, что $\mathbb{L}\mathrm{colim}$ — левый сопряженный к $\mathbb{R}\Delta$,
где Δ — постоянный функтор
Это сопряжение возьмется из Теоремы, если мы снабдим $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ структурой ЗМК.
Возьмем $\mathcal{D} = \{a \longleftarrow b \longrightarrow c\}$
$\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ — категория функторов $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$
т.е. $Ob(\mathcal{C}^{\mathcal{D}}) = \{X(a) \longleftarrow X(b) \longrightarrow X(c)\}$

$$Mor(X, Y) = \{\underbrace{(f_a, f_b, f_c)}_{f} \mid \begin{tikzcd} X(a) \arrow[d, "f_a"] & X(b) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "f_b"] & X(c) \arrow[d, "f_c"] \\ Y(a) & Y(b) \arrow[l] \arrow[r] & Y(c) \end{tikzcd}\}$$

$\partial_b(f) := X(b)$

$$\partial_a(f) := \left(\begin{tikzcd} X(b) \arrow[r] \arrow[d] & X(a) \arrow[d] \\ Y(b) \arrow[r] & \partial_a(f) \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] \end{tikzcd}\right) \qquad \partial_c(f) := \left(\begin{tikzcd} X(b) \arrow[r] \arrow[d] & X(c) \arrow[d] \\ Y(b) \arrow[r] & \partial_c(f) \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] \end{tikzcd}\right)$$

Имеется три морфизма

$$i_a(f): \partial_a(f) \longrightarrow Y(a)$$
$$i_b(f): \partial_b(f) \xrightarrow{f_b} Y(b)$$
$$i_c(f): \partial_c(f) \longrightarrow Y(c)$$

$\boxed{\text{Предложение}}$ $\mathcal{C}$ — З.М.К, $\mathcal{D} = \{a \leftarrow b \longrightarrow c\}$

$X \xrightarrow{f} Y \qquad f \in Mor(\mathcal{C}^{\mathcal{D}})$

1. f — w.e. $\Leftrightarrow$ f_a, f_b, f_c — w.e
2. f — расслоение $\Leftrightarrow$ f_a, f_b, f_c — расслоения
3. f — корасслоение $\Leftrightarrow$ $i_a(f), i_b(f), i_c(f)$ — корасслоения

— это задает структуру З.М.К. на $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$.

<u>Док-во</u> МС1, МС2 — тривиальны.

МС3: если f — ретракт g, то $i_a(f), \dots$ — ретракты $i_a(g), \dots$

МС4(1)

$$\begin{tikzcd}
(A(a) & A(b) \arrow[l] \arrow[r] & A(c)) \arrow[r] & (X(a) & X(b) \arrow[l] \arrow[r] & X(c)) \arrow[ddd, "p", "\wr"'] \\
 \\
 \\
(B(a) & B(b) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[from=uuu, "f"] & B(c)) \arrow[r] \arrow[uuur, dashed, "?"] & (Y(a) & Y(b) \arrow[l] \arrow[r] & Y(c))
\end{tikzcd}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{tikzcd}
A(a) \arrow[r] \arrow[d, "f_a"'] & X(a) \arrow[d, "p_a"] \\
B(a) \arrow[r] & Y(a)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A(b) \arrow[r] \arrow[d, "f_b"'] & X(b) \arrow[d, "p_b", "\wr"'] \\
B(b) \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & Y(b)
\end{tikzcd}
\qquad \dots$$

$\boxed{\partial_a(f) \xrightarrow{u} X(a)}$

$$\begin{tikzcd}
A(b) \arrow[r] \arrow[d] & A(a) \arrow[d] & & \\
 & & X(b) \arrow[r] & X(a) \\
B(b) \arrow[r] & \partial_a(f) \arrow[urr, dashed, "\exists"] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\partial_a(f) \arrow[r] \arrow[d, hook, "i_a"'] & X(a) \arrow[d, "\wr", "p_a"'] \\
B(a) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y(a)
\end{tikzcd}$$

MC4(2) — аналогично (+)

$$\begin{tikzcd}
X(b) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & X(a) \arrow[d, "\wr"] \arrow[ddr, bend left, "\wr"] & \\
Y(b) \arrow[r] & \partial_a(f) \arrow[dr] \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] & \\
& & B(a)
\end{tikzcd}$$

по 2-из-3 — тоже ~

MC5(2):

$f: A \longrightarrow B$

$$\begin{tikzcd}
f_b: A(b) \arrow[rr] \arrow[dr, hook, "\sim"'] & & B(b) \\
& Y \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& A(a) \arrow[d, hook, "\sim"] \arrow[dd, bend left] & A(b) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, hook, "\sim"] & A(c) \arrow[d, hook, "\sim"] \arrow[dd, bend left] & \\
& X \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[d] & Y \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[dr, "\sim"] \arrow[d] & \\
X' \arrow[r] & B(a) & B(b) \arrow[l] \arrow[r] & B(c) & Z' \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

□

Теорема $\mathrm{colim}: \mathcal{C}^{\mathcal{D}} \rightleftarrows \mathcal{C} : \Delta$

— эта пара индуцирует пару сопряженных функторов

$$\mathbb{L}\mathrm{colim}: \mathrm{Ho}(\mathcal{C}^{\mathcal{D}}) \rightleftarrows \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) : \mathbb{R}\Delta$$

Док-во: Δ сохраняет расслоения и ацикличные корасслоения ⇒ по пред. теореме есть $\mathbb{L}\mathrm{colim}$ и $\mathbb{R}\Delta$. □

§ Функторы петель и надстроек

$\mathcal{C}$ — з.м.к. $f, g: A \rightrightarrows B$ $\quad$ A — корасслоенный, B — расслоенный

Опр. $h: A\wedge I \longrightarrow B$, $h': A \wedge I' \longrightarrow B$ — две левые гомотопии между f и g

$$\begin{tikzcd}
(A\wedge I)\coprod_{A\sqcup A}(A\wedge I') \arrow[rr, "h+h'"] \arrow[d, "\sigma+\sigma'"'] \arrow[drr, bend left, "j_0+j_1"] & & B \\
A & & A\wedge J \arrow[ll, "\sim"', "\tilde{\iota}"] \arrow[u, "H"']
\end{tikzcd}$$

(левая) гомотопия между гомотопиями h и h'

$\boxed{\text{Следствие}}$ $h \sim h'$ — отношение экв-сти на множестве левых гомотопий из f в g. Мн-во классов экв-сти:

$$\pi_1^l(A, B; f, g)$$
$$\wr\wr$$
$$\pi_1^R(A, B; f, g)$$

композиции гомотопий несложно определить

$\boxed{\text{Следствие}}$ Категория с объектами $Hom(A, B)$ и морфизмами-гомотопиями $\in \pi_1(A, B; f, g)$ — группоид.

$\boxed{\text{Определение}}$ <u>Пунктированная категория</u>: категория, в кот. $\exists$ стрелка $* \longrightarrow \varnothing$ $(\Rightarrow * \simeq \varnothing)$

— например, Top с отмеч. точкой

Тогда

1. $* = \varnothing = 0$ — объект
2. $\forall X, Y$ в $Hom(X, Y)$ есть (единственный) 0-морфизм:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \\ & 0 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

3. $\forall f: X \longrightarrow Y$ $\exists$ слой и кослой

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Утв.}}$ $\mathcal{C}$ — з.м.к. (с выделенной точкой)

$\rightarrow \exists$ функтор $[A, B]_1 : (Ho\,\mathcal{C})^o \times Ho\,\mathcal{C} \longrightarrow Gps$;

если A — корасслоенный, B — расслоенный

$\rightsquigarrow [A, B]_1 = \pi_1(A, B, 0, 0)$

$\exists$ функторы Σ и Ω: $\Sigma : Ho(\mathcal{C}) \rightleftarrows Ho\,\mathcal{C} : \Omega$

$$[\Sigma A, B] \simeq [A, B]_1 \simeq [A, \Omega B]$$

$$A \sqcup A \longrightarrow A \wedge I \longrightarrow \Sigma A$$

└ надслой

$$\Omega A \longrightarrow A^{I} \longrightarrow A \times A$$

└ слой

Опр. Последовательностью расслоения в $Ho(\mathcal{C})$ (пунктир.) называется пос-сть

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$$

$$X \times \Omega Z \longrightarrow X$$

т.ч. $\exists$ рассл. $p: E \longrightarrow B$ в $\mathcal{C}_f$

$$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \quad \text{изом.} \quad X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$$

$$F \times \Omega B \xrightarrow{m} F \quad \text{изом.} \quad X \times \Omega Z \longrightarrow X$$

Утв. $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \qquad F \times \Omega B \xrightarrow{m} F$

– пос-сть расслоения

$$\rightsquigarrow \quad \Omega B \xrightarrow{\partial} F \xrightarrow{i} E \qquad \Omega B \times \Omega E \xrightarrow{n} \Omega B$$

– тоже пос-сть расслоения

Следствие $\forall A \in Ob(\mathcal{C})$ тогда $\exists$ длинная точная пос-сть

$$\ldots \to [A, \Omega^{q+1} B] \longrightarrow [A, \Omega^{q} F] \longrightarrow [A, \Omega^{q} E] \to \ldots$$