

Теорема Пусть $F: \mathcal{C} \rightleftharpoons \mathcal{D}: G$ - сопряженные функторы

Пусть (1) F сохраняет корасслоения, G сохраняет расслоения

Тогда $\exists \mathbb{L}F: \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightleftharpoons \text{Ho}(\mathcal{D}): \mathbb{R}G$

- сопряженные функторы

Если, кроме того,

(2) \forall корасслоения A в \mathcal{C} и расслоения X в \mathcal{D}

$$f: A \longrightarrow G(X) \text{ - w.e.} \iff f^b: F(A) \longrightarrow X \text{ - w.e.}$$

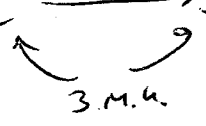
то $\mathbb{L}F$ и $\mathbb{R}G$ устанавливают эквивалентность категорий.

Замечание (1) \iff (1') \iff (2')

(1') G сохраняет расслоения и ациклические расслоения

(2') F сохраняет корасслоения и ациклические корасслоения

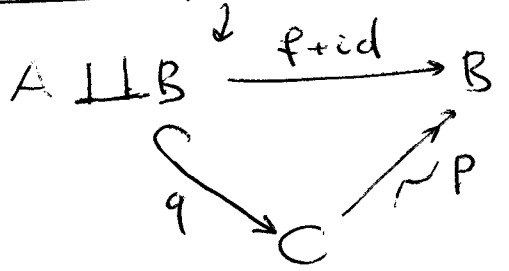
Лемма (К. Brown) $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, F переводит



ациклические корасслоения для корасслоенных объектов в ш.е.

Тогда F сохраняет все ш.е. для \mathcal{C} .

Док-во $f: A \xrightarrow{\sim} B$ $A, B \in \mathcal{C}_c$



$$\begin{aligned} \text{in}_0: A &\hookrightarrow A \amalg B \\ \text{in}_1: B &\hookrightarrow A \amalg B \\ q \circ \text{in}_0: A &\longrightarrow C \\ q \circ \text{in}_1: B &\longrightarrow C \end{aligned}$$

$$\begin{cases} p \circ q \circ \text{in}_0 \text{ - w.e.} \\ p \text{ - w.e.} \end{cases} \implies q \circ \text{in}_0 \text{ - w.e.}$$

\iff это ациклическое корасслоение

$$\begin{aligned} F(q \circ \text{in}_0) \text{ - w.e.} &\xrightarrow{\sim} F(p \circ q \circ \text{in}_0) \text{ - w.e.} \\ F(p \circ q \circ \text{in}_0) = F(\text{id}) \text{ - w.e.} &\xrightarrow{\sim} F(p) \text{ - w.e.} \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} \parallel \\ F(f) \end{matrix}$$

□
1

Замечание Двойственная Лемма также верна

До-во Теоремы

По (1') F сохраняет ацикличные морфизмы \leadsto сохраняет ш.е.

По (1') G сохраняет ш.е. $\leadsto \exists \mathbb{L}F$ и $\mathbb{R}G$

F — левый сопряженный к G $\leadsto F$ сохраняет $\lim_{\rightarrow}, \emptyset$
 G сохраняет $\lim_{\leftarrow}, *$

$\leadsto F$ сохраняет расслоенные объекты в \mathcal{C} ,
 G сохраняет расслоенные объекты в \mathcal{D} .

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G(X)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), X)$$

Хотим показать, что $\mathbb{R}(A, G(X)) \cong \mathbb{T}(F(A), X)$

$$f, g: A \longrightarrow G(X)$$

$$f \sim g \leadsto \exists \text{ хорошая гомотопия } H: A \wedge I \longrightarrow G(X)$$

хорошие цилиндры

$A \wedge I$ — расслоенный объект

$F(A \wedge I)$ — цилиндр объекта $F(A)$

$\leadsto H^b: F(A \wedge I) \longrightarrow X$ — левая гомотопия между f^b и g^b

Обратно, из существования такой гомотопии между f^b и g^b следует существование гомотопии между f и g

Пусть теперь A, X — любые. Выберем резольвенты:

$$QA \xrightarrow{\sim} A, \quad X \xrightarrow{\sim} SX$$

$$\text{Hom}(A, \mathbb{R}G(X)) = \text{Hom}(QA, G(SX)) \cong \text{Hom}(F(QA), SX) \cong \text{Hom}(\mathbb{L}F(A), X)$$

(Все Hom в гомотопических категориях $\text{Ho}(\mathcal{C}), \text{Ho}(\mathcal{D})$.)

$$\text{Ho}(\mathcal{C}^{\circ}) \times \text{Ho}(\mathcal{D}) \xrightarrow[\text{Hom}(\mathbb{L}F(-), -)]{\text{Hom}(-, \mathbb{R}G(-))} \text{Set} \quad \text{— зив. функторы}$$

Пусть теперь, кроме (1), выполнено (2).

Если A — коразлоенный, X — расщепленный, то

$$i_{F(A)}^\# : A \longrightarrow G(SF(A)) \text{ — w.e.}$$

$$(i_{F(A)} : F(A) \xrightarrow{\sim} SF(A))$$

$$\rightarrow \varepsilon : A \longrightarrow RG(LF(A)) \text{ — изоморфизм}$$

— это единица сопряжения; аналогично про единицу

\forall объект изоморфен коразлоенному или расщепленному

\rightarrow этого достаточно □

§ Гомотопические пределы

$$\begin{array}{ccccc}
 * \longleftarrow S^{n-1} & \xrightarrow{\quad} & D^n & \xrightarrow{\text{colim}} & S^n \\
 \parallel & & \downarrow \cong & & \downarrow \\
 * \longleftarrow S^{n-1} & \xrightarrow{\quad} & * & \xrightarrow{\text{colim}} & *
 \end{array}$$

— это не гомотопическая эквивалентность!

Цель: построить $\mathbb{L}_{\text{colim}} : \text{Ho}(e^D) \longrightarrow \text{Ho}(e)$

так, что $\mathbb{L}_{\text{colim}}$ — левый сопряженный к $R\Delta$,

где Δ — постоянный функтор

Это сопряжение возьмется из Теоремы, если мы

снабдим e^D структурами ЗМК.

Возьмем $D = \{ a \longleftarrow b \longrightarrow c \}$

e^D — категория функторов $D \longrightarrow e$

т.е. $\text{ob}(e^D) = \{ X(a) \longleftarrow X(b) \longrightarrow X(c) \}$

$$\text{Mor}(X, Y) = \{ (f_a, f_b, f_c) \mid \begin{array}{ccc} X(a) \longleftarrow X(b) \longrightarrow X(c) \\ \downarrow f_a \quad \downarrow f_b \quad \downarrow f_c \\ Y(a) \longleftarrow Y(b) \longrightarrow Y(c) \end{array} \}$$

$$\partial_b(f) := X(b)$$

$$\partial_a(f) := \begin{pmatrix} X(b) \longrightarrow X(a) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ Y(b) \longrightarrow \partial_a(f) \end{pmatrix}$$

$$\partial_c(f) := \begin{pmatrix} X(b) \longrightarrow X(c) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ Y(b) \longrightarrow \partial_c(f) \end{pmatrix}$$

3

Универсальность морфизма

$$i_a(f): \partial_a(f) \longrightarrow y(a)$$

$$i_b(f): \partial_b(f) \xrightarrow{f_b} y(b)$$

$$i_c(f): \partial_c(f) \longrightarrow y(c)$$

Предложение \mathcal{C} — З.М.К., $\mathcal{D} = \{a \leftarrow b \rightarrow c\}$

$$X \xrightarrow{f} Y \quad f \in \text{Mor}(\mathcal{C}^{\mathcal{D}})$$

① f — м.е. $\Leftrightarrow f_a, f_b, f_c$ — м.е.

② f — расщепление $\Leftrightarrow f_a, f_b, f_c$ — расщепления

③ f — морфизм $\Leftrightarrow i_a(f), i_b(f), i_c(f)$ — морфизмы

— это задает структуру З.М.К. на $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$.

Доп-во МС1, МС2 — транзитивны.

МС3: если f — разрыв g , то $i_a(f), \dots$ — разрывы $i_a(g), \dots$

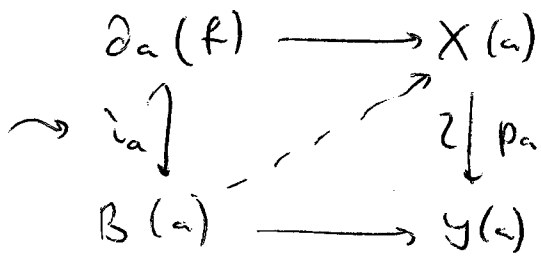
МС4(a) $(A(a) \leftarrow A(b) \rightarrow A(c)) \rightarrow (X(a) \leftarrow X(b) \rightarrow X(c))$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow f & \nearrow ? & \downarrow p/2 \\ (B(a) \leftarrow B(b) \rightarrow B(c)) & & (y(a) \leftarrow y(b) \rightarrow y(c)) \end{array}$$

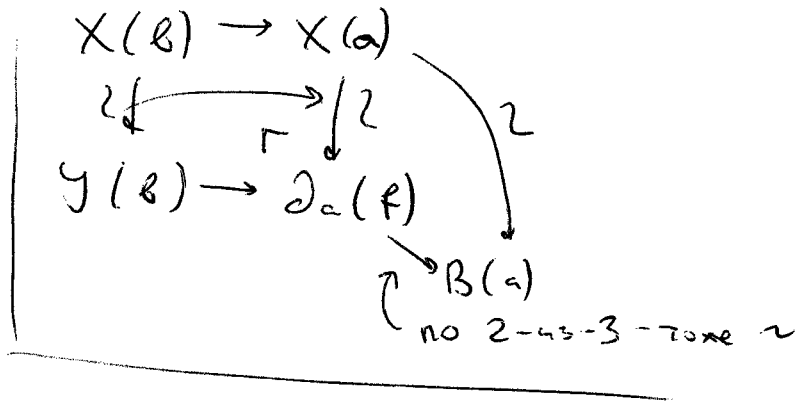
$$\begin{array}{ccc} A(a) \rightarrow X(a) & & A(b) \rightarrow X(b) \\ f_a \downarrow & & f_b \downarrow \\ B(a) \rightarrow y(a) & & B(b) \rightarrow y(b) \end{array}$$

$$\partial_a(f) \xrightarrow{u} X(a)$$

$$\begin{array}{ccc} A(b) \rightarrow A(a) & & X(b) \rightarrow X(a) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B(b) \rightarrow \partial_a(f) & \xrightarrow{\exists} & X(a) \end{array}$$



МСЧ(2) — аналогично \oplus

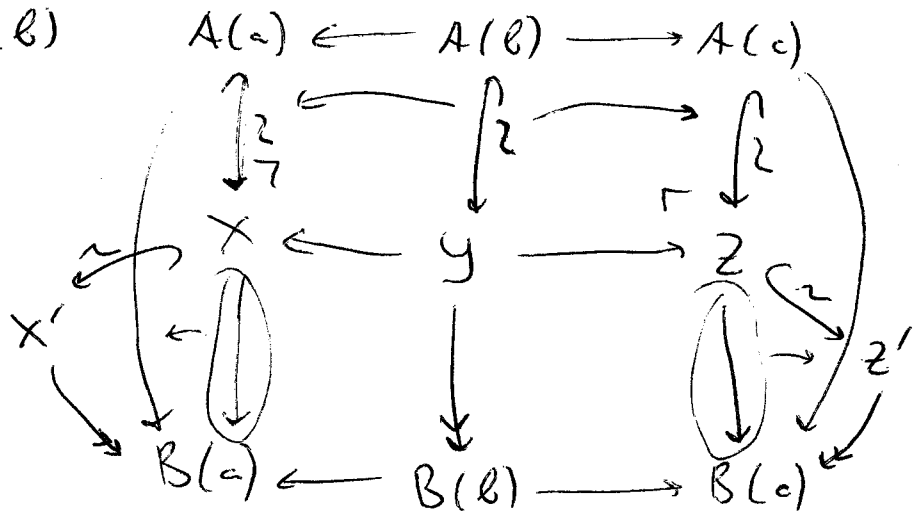


МСЧ(2):

$$f: A \longrightarrow B$$

$$f_B: A(b) \longrightarrow B(b)$$

↙ ↘
z y



Теорема $\text{colim}: e^0 \rightleftharpoons e: \Delta$

— эта пара индуцирует пару сопряженных функторов

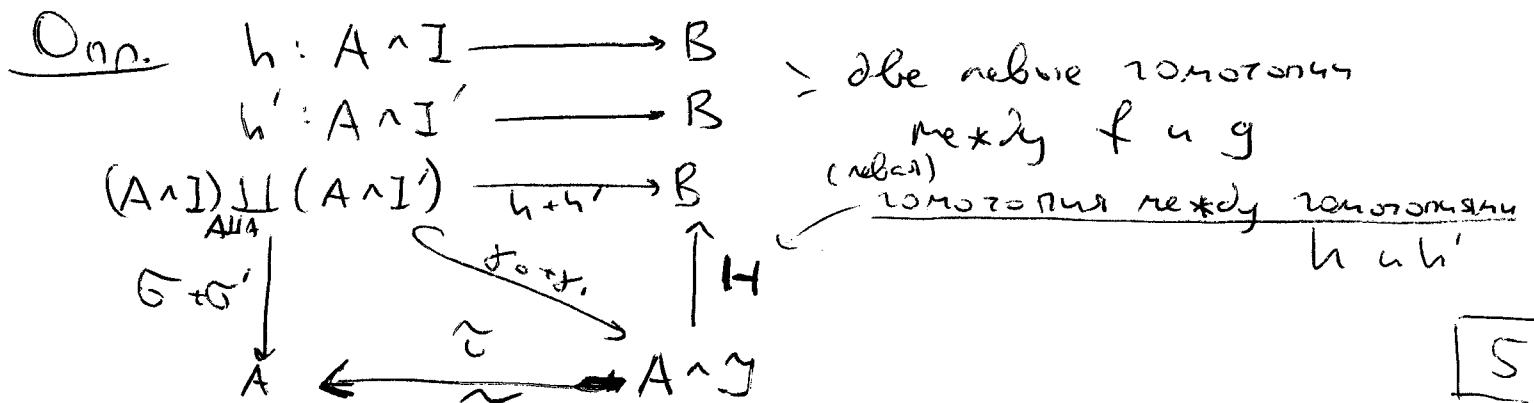
$$\mathbb{L}\text{colim}: \text{Ho}(e^0) \rightleftharpoons \text{Ho}(e): R \Delta$$

Доказательство Δ сохраняет рассылки и аддитивные корассылки

→ по пред. Теореме есть $\mathbb{L}\text{colim}$ и $R\Delta$. □

§ Функторы петель и надстроек

e — з.м.к. $f, g: A \rightrightarrows B$ A — корассылаемые
B — рассылаемые



5

Следствие $h \sim h'$ — отношение эквивалентности на множестве левых гомотопий из f в g . Множество классов эквивалентности:

$$\pi_1^l(A, B; f, g)$$

$$\pi_1^R(A, B; f, g)$$

Композиция гомотопий несложно определить

Следствие Категория с объектами $\text{Hom}(A, B)$ и морфизмами — гомотопиями $\in \pi_1(A, B; f, g)$ — группоид.

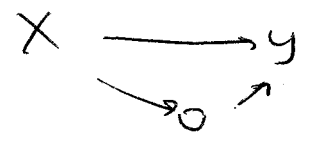
Определение Пуницированная категория:

категория, в кот. \exists стрелка $* \longrightarrow \emptyset$
 $(\Rightarrow * \cong \emptyset)$

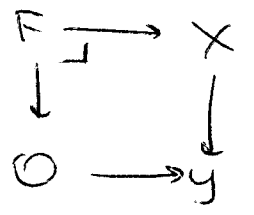
Тогда — например, Top с отмеч. точкой

① $* = \emptyset = 0$ -объект

② $\forall X, Y \in \text{Hom}(X, Y)$ есть (единственный) 0 -морфизм:



③ $\forall f: X \longrightarrow Y \exists$ слай и кослай



Узв. E — з.м.к. (с выделенной точкой)

$\rightarrow \exists$ функтор $[A, B]_1 : (\text{Ho } E)^0 \times \text{Ho } E \longrightarrow \text{Grps}$;

если A — неразрешенный, B — разрешенный

$\rightarrow [A, B]_1 = \pi_1(A, B, 0, 0)$

\exists функторы Σ и Ω : $\Sigma: \text{Ho}(E) \rightleftharpoons \text{Ho } E: \Omega$

$$[\Sigma A, B] \cong [A, B]_1 \cong [A, \Omega B]$$

$$A \sqcup A \longrightarrow A \wedge I \longrightarrow \Sigma A$$

(кослой)

$$\Omega A \longrightarrow A^I \longrightarrow A \times A$$

(слож)

Опр. Последовательность расслоения в $\mathcal{H}_0(e)$ (пунктир.)

используется по-сложу

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$$

$$X \times \Omega Z \longrightarrow X$$

т.е. \exists рассл. $p: E \longrightarrow B$ в C_f

$$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \quad \text{изом. } X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$$

$$F \times \Omega B \xrightarrow{m} F \quad \text{изом. } X \times \Omega Z \longrightarrow X$$

У-л. ~~(?)~~ $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \quad F \times \Omega B \xrightarrow{m} F$

- по-сложу расслоения

$$\Omega B \xrightarrow{\partial} F \xrightarrow{i} E \quad \Omega B \times \Omega E \xrightarrow{h} \Omega B$$

- тоже по-сложу расслоения

Следствие $\forall A \in \mathcal{O}B(e)$ тогда \exists длинная точная по-сложу

$$\dots \rightarrow [A, \Omega^{q+1} B] \rightarrow [A, \Omega^q F] \rightarrow [A, \Omega^q E] \rightarrow \dots$$