Framed motives

Иван Панин

06.11.2014

1 Основной результат

Теорема 1.1 (совместно с Гаркушей)**.** Пусть k — совершенное поле. Пусть $\mathcal{F}\colon \mathbb{Z}F_*(k)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$ — гомотопически инвариантный и σ-стабильный предпучок с трансферами. Тогда

1. $\widetilde{\mathcal{F}_{\mathrm{Nis}}}$ тоже гомотопически инвариантный и σ-стабильный (σ-квази-стабильный).
2. для любого p пучок $X \mapsto H^p_{\mathrm{Nis}}(X, \widetilde{\mathcal{F}_{\mathrm{Nis}}})$ тоже гомотопически инвариантный и σ-стабильный (σ-квази-стабильный).

Напомним, что мы построили $\sigma_Y \in \mathbb{Z}F_1(Y,Y)\colon Y \xrightarrow{\sigma_Y} Y$, и тогда $\mathcal{F}(Y) \xrightarrow{\sigma_Y^*} \mathcal{F}(Y)$. $\mathcal{F}$ называется σ-стабильным (соответственно, σ-квази-стабильным), если для любого Y выполнено $\sigma_Y^* = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(Y)}$ (соответственно, σ_Y^* — изоморфизм).

Наша ближайшая задача — ввести категорию $\overline{\overline{\mathbb{Z}F}}(k)$.

Определение 1.2. Построим категорию $\mathbb{Z}F_*^{\mathrm{pairs}}(k) = \mathbb{Z}F_*^{\mathrm{pr}}(k)$. Объекты $\mathbb{Z}F_*^{\mathrm{pr}}(k)$ — пары (X,V), где $X \in \mathrm{Sm}/k$, $V \hookrightarrow X$ открыто. Морфизмы:

$$\mathbb{Z}F_*^{\mathrm{pr}}((X',V'),(X,V)) = \mathrm{Ker}(\mathbb{Z}F_*(X',X) \oplus \mathbb{Z}F_*(V',V) \to \mathbb{Z}F_*(V',X).$$

Иными словами, морфизмы из (X',V') в (X,V) — это пары (α,β), где $\alpha \in \mathbb{Z}F_*(X',X)$, $\beta \in \mathbb{Z}F_*(V',V)$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "\alpha"] & X \\
V' \arrow[u, "i'"] \arrow[r] & V \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Композиция морфизмов устроена так: если еще есть (X'',V'') и коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X'' \arrow[r, "\alpha'"] & X' \arrow[r, "\alpha"] & X \\
V'' \arrow[u] \arrow[r, "\beta''"] & V' \arrow[u] \arrow[r] & V \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

то $(\alpha,\beta)\circ(\alpha',\beta') = (\alpha\circ\alpha', \beta\circ\beta')$. Разумеется, $\mathrm{id}_{X,V} = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_V)$.

Определение 1.3. Построим категорию $\overline{\mathbb{Z}F_*}^{\mathrm{pr}}(k)$. Объекты новой категории — как и выше, пары (X,V). Морфизмы выглядят так:

$$\overline{\mathbb{Z}F}_*^{\mathrm{pr}} = \mathrm{Coker}(\mathbb{Z}F_*^{\mathrm{pr}}((\mathbb{A}^1 \times X', \mathbb{A}^1 \times V'),(X,V)) \to \mathbb{Z}F_*^{\mathrm{pr}}((X',V'),(X,V))).$$

Другими словами, коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^1 \times X \arrow[r] & X \\
\mathbb{A}^1 \times V \arrow[u, "\alpha\circ i"] \arrow[r] & V \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

приводит к $(\alpha_1,\beta_1) = (\alpha_0,\beta_0)$ в $\overline{\mathbb{Z}F_*}^{\mathrm{pr}}$. Композиция в $\mathbb{Z}F_*^{\mathrm{pr}}(k)$ спускается до композиции в $\overline{\mathbb{Z}F_*}^{\mathrm{pr}}(k)$.

Напоминим, что $\mathbb{Z}F_*(X',X)=\bigoplus_{n\geq 0}\mathbb{Z}F_n(X',X)$.

Замечание 1.4. Сопоставление $(X',X)\mapsto \mathbb{Z}F(X',X)=\varinjlim_{\sigma_X}\mathbb{Z}F_*(X',X)$ не задает категорию.

Лемма 1.5. Пусть $a\in\mathbb{Z}F_n(X',X)$. Тогда $\sigma_X\circ a=a\circ\sigma_{X'}$ в $\overline{\mathbb{Z}F}_{n+1}(X',X)$.

Следствие 1.6. Композиция $\overline{\mathbb{Z}F}(X'',X')\times\overline{\mathbb{Z}F}(X',X)\to\overline{\mathbb{Z}F}(X'',X)$, $(a_n,b_m)\mapsto b_m\circ a_n$ корректно определена и ассоциативна. Поэтому есть категория $\overline{\mathbb{Z}F}(k)$. Ее объекты — гладкие многообразия над k, а морфизмы из X' в X — это $\overline{\mathbb{Z}F}(X',X)$.

Доказательство Леммы 1.5. Композиция $\sigma_X\circ a$ соответствует диаграмме

$$\begin{tikzcd}
& V\times\mathbb{A}^1 \arrow[r, "\varphi_1,\dots,\varphi_n"] \arrow[dl] \arrow[ddr] & \mathbb{A}^n\times\mathbb{A}^1 \\
X'\times\mathbb{A}^n\times\mathbb{A}^1 & Z'\times 0 \arrow[l] \arrow[u] \arrow[r, "g\circ\mathrm{pr}_V"] \arrow[d, "q"] & 0 \arrow[u] \\
& X' & X
\end{tikzcd}$$

а композиция $a\circ\sigma_X$ — диаграмме

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{A}^1\times V \arrow[r, "t,\varphi_1,\dots,\varphi_n"] \arrow[dl] \arrow[ddr] & \mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^n \\
X'\times\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^n & 0\times Z' \arrow[l] \arrow[u] \arrow[r, "g\circ\mathrm{pr}_V"] \arrow[d, "q"] & 0 \arrow[u] \\
& X' & X
\end{tikzcd}$$

Видно, что эти диаграммы различны, но отличаются на композицию двух перестановок из S_{n+1} одной длины. Поэтому можно написать гомотопию между ними. $\square$

Лемма 1.7. Пусть $(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}F_n((X',V'),(X,V))$. Тогда $(\sigma_X\circ\alpha,\sigma_V\circ\beta)=(\alpha\circ\sigma_{X'},\beta\circ\sigma_{V'})$ в $\overline{\mathbb{Z}F}^{\mathrm{pr}}_{n+1}((X',V'),(X,V))$.

Определение 1.8. Категория $\overline{\mathbb{Z}F}^{\mathrm{pr}}(k)$: объекты — как и выше, пары (X,V). Морфизмы из (X',V') в (X,V) образуют группу $\overline{\mathbb{Z}F}^{\mathrm{pr}}((X',V'),(X,V))=\varinjlim_{\sigma_X,\sigma_V}\overline{\mathbb{Z}F}^{\mathrm{pr}}_*((X',V'),(X,V))$. Композиция в категории $\overline{\mathbb{Z}F}^{\mathrm{pr}}_*(k)$ спускается до композиции в $\overline{\mathbb{Z}F}^{\mathrm{pr}}(k)$.

«Добавим» в $\overline{\mathbb{Z}F}^{\mathrm{pr}}((X',V'),(X,V))$ еще одно соотношение: объявим некоторые морфизмы равными нулю.

Определение 1.9. Объявим морфизм

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "\alpha"] & X \\
V' \arrow[u, "i'"] \arrow[r, "\beta"] & V \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

равным нулю в $\overline{\overline{\mathbb{Z}F}}^{\mathrm{pr}}((X',V'),(X,V))$, если $\alpha=i\circ\alpha_V$:

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha_V"] & X \\
V' \arrow[u, "i'"] \arrow[r, "\beta"] & V \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

Иными словами, скажем, что морфизмы из (X',V') в (X,V) вида $(i\circ\alpha_V,\beta)$ (где $\alpha_V\colon X'\to V$) эквивалентны нулю. Нетрудно видеть, что композиция с такими морфизмами также имеет такой вид: если $(\alpha,\beta)\sim 0$, то $(\alpha,\beta)\circ(\alpha',\beta')\sim 0$ и $(\alpha'',\beta'')\circ(\alpha,\beta)\sim 0$.

Замечание 1.10 (Андрей Дружинин)**.** Достаточно объявить нулевыми морфизмы $\mathrm{id}_{V,V}$ и породить ими идеал.

Замечание 1.11 (Конструкция)**.** Пусть $\mathcal{F}\colon \mathbb{Z}F_*(k)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$ — σ-стабильный гомотопически инвариантный предпучок. Тогда $\mathcal{F}$ задает функтор

$$\overline{\overline{\mathcal{F}}}\colon \overline{\overline{\mathbb{Z}F}}^{\mathrm{pr}}(k)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$$

по правилу $(X,V) \mapsto \mathcal{F}(V)/\mathrm{Im}(\mathcal{F}(X))$ для $V \hookrightarrow X$. Морфизму $(\alpha,\beta)\colon (X',V') \to (X,V)$ соответствует диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\beta^*"] & \mathcal{F}(V') \\ \mathcal{F}(X) \arrow[u, "i^*"] \arrow[r, "\alpha^*"] & \mathcal{F}(X') \arrow[u, "(i')^*"'] \end{tikzcd}$$

Поэтому возникает морфизм $(\alpha,\beta)^*\colon \mathcal{F}(V)/\mathrm{Im}(\mathcal{F}(X)) \to \mathcal{F}(V')/\mathrm{Im}(\mathcal{F}(X'))$.

Кроме того, если $(\alpha,\beta) \sim 0$, то есть, $(\alpha,\beta) = (i \circ \alpha_{V'}, \beta)$ для $\alpha_V\colon X' \to V$. Тогда $(\alpha,\beta)^* = 0$.

Замечание 1.12. Есть функторы $\overline{\mathbb{Z}F}(k) \to \overline{\mathbb{Z}F}^{\mathrm{pr}}(k) \to \overline{\overline{\mathbb{Z}F}}^{\mathrm{pr}}(k)$; первый из них отправляет X в пару $(X,\varnothing)$.

Как использовать конструкцию из замечания 1.11? Допустим, что морфизм

$$(\alpha,\beta) \in \overline{\overline{\mathbb{Z}F}}^{\mathrm{pr}}((X',V'),(X,V))$$

является изоморфизмом. Тогда для любого гомотопически инвариантного σ-стабильного предпучка $\mathcal{F}\colon \mathbb{Z}F_*(k)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$ гомоморфизм групп

$$(\alpha,\beta)^*\colon \mathcal{F}(V)/\mathrm{Im}(\mathcal{F}(X)) \to \mathcal{F}(V')/\mathrm{Im}(\mathcal{F}(X'))$$

является изоморфизмом.

Теорема 1.13. Пусть $V \xrightarrow{i} U \to \mathbb{A}^1$ — открытые вложения, и $V \neq \varnothing$. Тогда найдется $r \in \overline{\mathbb{Z}F}(U,V)\colon \overline{[i]} \circ \overline{[r]} = \overline{[\mathrm{id}_U]}$ в $\overline{\mathbb{Z}F}(U,U)$.

Следствие 1.14. Если $\mathcal{F}\colon \mathbb{Z}F_*(k)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$ гомотопически инвариантный σ-стабильный предпучок, то гомоморфизм $i^*\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ инъективен.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "i^*"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \mathcal{F}(V) \arrow[d, "r^*"] \\ & \mathcal{F}(U) \end{tikzcd}$$

Тогда $\mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)} = (\mathrm{id}_U)^* = (i \circ r)^*$. □

Теорема 1.15. Пусть $V \to U \to \mathbb{A}^1$ — открытые вложения, $V \neq \varnothing$, и $Z \to V$ — замкнутое вложение. Тогда морфизм $(i, i|_{V-Z})\colon (V, V-Z) \to (U, U-Z)$ — изоморфизм в $\overline{\overline{\mathbb{Z}F}}^{\mathrm{pr}}(k)$.

Следствие 1.16. Для любого σ-стабильного и гомотопически инвариантного предпучка

$$\mathcal{F}\colon \mathbb{Z}F_*(k)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$$

гомоморфизм

$$i^* = (i, i|_{V-Z})^*\colon \mathcal{F}(U-Z)/\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V-Z)/\mathcal{F}(V)$$

является изоморфизмом.

Замечание 1.17. Из следствия 1.14 и следствия 1.16 легко заключить, что $\mathcal{F}|_{\mathbb{A}^1}$ — пучок в топологии Зариского.

Теорема 1.18. Пусть $X \in \mathrm{Sm}/k$, $x \in X$, $U = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$, $D \to X$ — замкнутый дивизор, $j\colon X-D \hookrightarrow X$. Тогда существует $\Phi \in \overline{\mathbb{Z}F}(U, X-D)$ такой, что $\overline{[j]} \circ \overline{[\Phi]} = \overline{[\mathrm{can}]}$ в $\overline{\mathbb{Z}F}(U,X)$.

Следствие 1.19. $\mathcal{F}(\mathcal{O}_{X,x}) \hookrightarrow \mathcal{F}(k(X))$ для гомотопически инвариантного, σ-стабильного предпучка $\mathcal{F}\colon \mathbb{Z}F_*(k)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$.

Доказательство. Если $\alpha \in \mathcal{F}(X)$ такой, что $\alpha_{k(X)} = 0$, то существует дивизор $D \subseteq X$ такой, что $\alpha|_{X-D} = 0$, то есть, $j^*(\alpha) = 0$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} X-D \arrow[r, hook, "j"] & X \\ U \arrow[u, "\Phi"] \arrow[ur, "\mathrm{can}"'] & \end{tikzcd}$$

Тогда $0 = \Phi^*(j^*(\alpha)) = \mathrm{can}^*(\alpha)$. При этом $\mathcal{F}(\mathcal{O}_{X,x}) = \varinjlim_{X^0 \ni x} \mathcal{F}(X^0)$; элементу $\alpha^0 \in \mathcal{F}(X^0)$ соответствует $\alpha \in \mathcal{F}(O_{X,x})$. При этом $\alpha^0|_{k(X)} = \alpha|_{k(X)}$.

$$\begin{tikzcd} X^0-D^0 \arrow[r, hook, "j^0"] & X^0 \\ U \arrow[u, "\Phi^0"] \arrow[ur, "\mathrm{can}"'] & \end{tikzcd}$$

□

Пусть $X \in \mathrm{Sm}/k$, $x \in X$, $U = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$, $i\colon V \hookrightarrow \mathbb{A}^1 \times U$ — открытое вложение, V аффинно, и $0 \times U \subseteq V$.

Теорема 1.20. Морфизм $(i, i|_{V-0\times U})\colon (V, V-0\times U) \to (\mathbb{A}^1 \times U, \mathbb{A}^1 \times U - 0 \times U)$ является изоморфизмом в категории $\overline{\overline{\mathbb{Z}F}}^{\mathrm{pr}}(k)$.

Следствие 1.21. $\mathcal{F}((\mathbb{A}^1-0)\times U)/\mathrm{Im}(\mathcal{F}(U\times\mathbb{A}^1)) \xrightarrow{i^*} \mathcal{F}(V-0\times U)/\mathrm{Im}(\mathcal{F}(V))$ является изоморфизмом.

Замечание 1.22. Уточним формулировку следствия 1.21 Заметим, что $\mathcal{F}((\mathbb{A}^1-0)\times U)/\mathrm{Im}(\mathcal{F}(U\times\mathbb{A}^1)) = \mathcal{F}((\mathbb{A}^1-0)\times U)/\mathrm{Im}(\mathcal{F}(U))$. Проверим, что правая часть равна $\mathcal{F}((\mathbb{A}^1-0)\times U)/\mathcal{F}(U)$. Заметим, что композиция $1\times U \subseteq (\mathbb{A}^1-0)\times U \to U$ — тождественное отображение. Поэтому $p^*\mathcal{F}(U))$ — прямое слагаемое в $\mathcal{F}((\mathbb{A}^1-0)\times U)$. Далее, $\mathcal{F}((\mathbb{A}^1-0)\times U)/\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}_{-1}(U)$.

Посмотрим на правую часть:

$$\mathcal{F}(V-0\times U)/\mathrm{Im}(\mathcal{F}(V)) = \varinjlim_{\mathcal{V}\supset 0\times U} \mathcal{F}(\mathcal{V}-0\times U)/\mathrm{Im}(\mathcal{F}(\mathcal{V})),$$

где предел берется по аффинным $\mathcal{V}$. Указанный предел равен $\mathcal{F}(W-0\times U)/\mathcal{F}(W)$, где $W = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1\times U,(0,u)})$. Так можно писать по следствию 1.19.

Следствие 1.23. $\mathcal{F}_{-1}(U) = \mathcal{F}((\mathbb{A}^1-0)\times U)/\mathcal{F}(U) \xrightarrow{i^*} \mathcal{F}(W-0\times U)/\mathcal{F}(W)$, где i^* — изоморфизм.

Рассмотрим квадрат Нисневича

$$\begin{tikzcd} X'_0 \arrow[r, hook] \arrow[d] & X' \arrow[d, "\Pi"] & Z' \arrow[l] \arrow[d, equal] \\ X_0 \arrow[r, hook] & X & Z \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Пусть $x' \in Z'$, $x = \Pi(x') \in Z$. Пусть $U = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$, $U' = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X',x'})$. Хочется сказать, что $(U', U'-Z') \xrightarrow{\pi} (U, U-Z)$ — изоморфизм в $\overline{\overline{\mathbb{Z}F}}^{\mathrm{pr}}(k)$. Но U', U — локальные схемы, так что нужно быть осторожным и говорить так: $\pi^*\colon \mathcal{F}(U-Z)/\mathrm{Im}(\mathcal{F}(U)) \to \mathcal{F}(U'-Z')/\mathrm{Im}(\mathcal{F}(U'))$ — изоморфизм. По следствию 1.19 от Im в знаменателях можно избавиться. Это тривиально формулируется и верно. Однако в терминах категории $\overline{\overline{\mathbb{Z}F}}^{\mathrm{pr}}(k)$ нужно брать немного другие объекты.

2 Этальное вырезание

Теорема 2.1 («инъективность»)**.** Существует $\overline{[E']} \in \overline{\overline{\mathbb{Z}F}}^{\mathrm{pr}}((U,U-Z),(X',X'-Z))$ такой, что $\overline{[\Pi]} \circ \overline{[E']} = \overline{[\mathrm{can}]}$ в $\overline{\overline{\mathbb{Z}F}}((U,U-Z),(X,X-Z))$. (здесь, как и выше, X' «глобальное», а U «маленькое»).

Следствие 2.2. $\mathcal{F}(U-Z)/\mathcal{F}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}(U'-Z')/\mathcal{F}(U')$.

Доказательство (на самом деле нет).

$$\begin{tikzcd}
(U,U-Z) \arrow[r, "\overline{[E']}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & (U',U'-Z') \arrow[dl, "\pi"] \\
(U,U-Z) &
\end{tikzcd}$$

приводит к диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}((U,U-Z)) & \mathcal{F}((U',U'-Z')) \arrow[l, "\overline{[E']}^*"'] \\
\mathcal{F}((U,U-Z)) \arrow[u] \arrow[ur, "\pi"] &
\end{tikzcd}$$

Теперь видно, что если $\pi^*(\alpha) = 0$, то $\alpha = 0$. $\square$

Теорема 2.3 («сюръективность»)**.** Существует $\overline{[E']} \in \overline{\overline{\mathbb{Z}F}}^{\mathrm{pr}}((U,U-Z),(X',X'-Z))$ такой, что $(\overline{[E']} \circ \overline{[\pi]}) \circ \overline{[\pi']} = \overline{[\mathrm{can}']} \circ \overline{[\pi']}$ в $\overline{\overline{\mathbb{Z}F}}^{\mathrm{pr}}(((U')^h_{Z'},(U')^h_{Z'}-Z'),(X',X'-Z'))$, где $(U')^h_{Z'} \xrightarrow{\pi'} U' \xrightarrow{\mathrm{can}'} X'$.

Замечание 2.4. Можно $(U')^h_{Z'}$ заменить на достаточно тонкую этальную окрестность $\pi''\colon U'' \to U'$ замкнутого множества Z'.

Следствие 2.5. $\pi^*\colon \mathcal{F}(U-Z)/\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U'-Z')/\mathcal{F}(U')$ сюръективно.

«Доказательство». «Подставим» $(U',U'-Z')$ вместо $(X',X'-Z)$:

$$\begin{tikzcd}
 & & (U,U-Z) \arrow[dr, "E''"] & \\
(U'',U''-Z'') \arrow[r, "\pi''"] & (U',U'-Z') \arrow[ur, "\pi"] \arrow[rr, "\mathrm{id}"] & & (U',U'-Z')
\end{tikzcd}$$

Получаем

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U''-Z'')/\mathcal{F}(U') & \mathcal{F}(U'-Z')/\mathcal{F}(U') \arrow[l, "(\pi'')^*"'] & \mathcal{F}(U'-Z')/\mathcal{F}(U') \arrow[l, shift right, "\mathrm{id}"'] \arrow[l, shift left, "\pi^*\circ[E'']^*"]
\end{tikzcd}$$

По инъективности этального вырезания отображение $(\pi'')^*$ инъективно. По теореме 2.3 сквозные отображения справа налево совпадают. Поэтому $[\pi]^* \circ [E'']^* = \mathrm{id}$. Поэтому $\alpha = \pi^*([E'']^*(\alpha)) \in \mathrm{Im}(\pi^*)$. $\square$

Предпучок $\overline{\mathbb{Z}F}(-,X)$ является гомотопически инвариантным и σ-стабильным.