Framed motives

Иван Панин

27.11.2014

1

Мы обсуждали следующую теорему.

Теорема 1.1. Пусть $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный и σ-квази-стабильный $\mathbb{Z}F_*(k)$-предпучок. Тогда

1. $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{Nis}}$ тоже гомотопически инвариантный и σ-квази-стабильный;
2. $X \mapsto H^p_{\mathrm{Nis}}(X, \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{Nis}})$ — гомотопически инвариантный ир квази-стабильный предпучок.

Доказательство этой теоремы разбивается по существу на два этапа:

- доказательство пункта (1)+доказательство сопутствующих [стандартных] теорем.
- вывод пункта (2) из сопутствующих теорем.

Сопутствующие теоремы:

1. если $\varnothing \neq U \subseteq \mathbb{A}^1$ — открытое, то $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathrm{Spec}(k(t)))$ инъективно;
2. если $0 \neq Z \subseteq V$ — замкнутое в V, $V \subseteq U$ — открытое, $U \subseteq \mathbb{A}^1$ —открытое, то $i^* \colon \mathcal{F}(U - Z)/\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V - Z)/\mathcal{F}(V)$ — изоморфизм;
3. следствие первых двух: если $U, V \subseteq \mathbb{A}^1$ — открытые, то последовательность
$$0 \to \mathcal{F}(U \cup V) \to \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U \cap V) \to 0$$
точна;
4. из пункта (3) следует, что $\mathcal{F}|_{\mathbb{A}^1}$ — пучок Зариского.
5. если X — гладкое, $x \in X$, $U = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$, $\eta = \mathrm{Spec}(k(X))$, $j \colon \eta \to U$, то $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\eta)$ инъективно, то есть, $\mathcal{F}(\mathcal{O}_{X,x}) \to \mathcal{F}(k(X))$ инъективно;
6. если $0 \times U \subseteq V \subseteq \mathbb{A}^1 \times U$, где $V \subseteq \mathbb{A}^1 \times U$ — открытое аффинное, то $i^* \colon \mathcal{F}((\mathbb{A}^1 - 0) \times U)/\mathcal{F}(\mathbb{A}^1 \times U) \to \mathcal{F}(V - (0 \times U))/\mathcal{F}(V)$ — изоморфизм (заметим, что по определению $\mathcal{F}((\mathbb{A}^1 - 0) \times U)/\mathcal{F}(\mathbb{A}^1 \times U) = \mathcal{F}_{-1}(U)$);
7. (локальное) *этальное вырезание*: если есть квадрат Нисневича
$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, hook] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\ U \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$
и X, X' локальны по Зарискому, то $\pi^* \colon \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U')/\mathcal{F}(X')$ — изоморфизм.

Выведем теперь пункт (1) теоремы 1.1.

i) Для любого $U \subseteq \mathbb{A}^1$ выполнено $\mathcal{F}(U) = \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{Nis}}(U)$. (Пояснение: уже знаем (пункт (4)), что $\mathcal{F}|_{\mathbb{A}^1}$ — пучок Зариского. Кроме того, есть пункт (7).)

ii) Следствие: $\mathcal{F}(\mathbb{A}^1) = \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{Nis}}(\mathbb{A}^1)$.

iii) Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{Nis}}(X) \arrow[d, "p^*"] \arrow[dd, bend right, "\mathrm{id}"'] & & \\
\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{Nis}}(\mathbb{A}^1 \times X) \arrow[r] \arrow[d, "i_0^*"] & \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{Nis}}(\mathbb{A}^1_{k(X)}) \arrow[r, equal] \arrow[d, "i_0^*"] & \mathcal{F}(\mathbb{A}^1_{k(X)}) \arrow[d, "i_0^*"] \\
\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{Nis}}(X) \arrow[r] & \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{Nis}}(k(X)) \arrow[r, equal] & \mathcal{F}(k(X))
\end{tikzcd}$$

Из нее видно, что $i_0^*\colon \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{Nis}}(\mathbb{A}^1 \times X) \to \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{Nis}}(X)$ сюръективно. Осталось проверить, что это отображение инъективно. Мы знаем, что $i_0^*\colon \mathcal{F}(\mathbb{A}^1_{k(X)}) \to \mathcal{F}(k(X))$ — изоморфизм. Пусть $\eta = \mathrm{Spec}(k(X)(t)) = \mathrm{Spec}(k(\mathbb{A}^1 \times X))$. Достаточно доказать, что композиция $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{Nis}}(\mathbb{A}^1 \times X) \to \widetilde{\mathcal{F}}\mathrm{Nis}(\mathbb{A}^1_{k(X)}) \to \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{Nis}}(\eta)$ инъективна. Это следует из общей леммы:

Лемма 1.2. Пусть $Y \in \mathrm{Sm}/k$, $\eta \in Y$ — общая точка. Тогда $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{Nis}}(Y) \to \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{Nis}}(\eta) = \mathcal{F}(\eta)$ инъективно.

Доказательство. Должно следовать из (5). □

Перейдем к пункту (2). Будем считать, что $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный и σ-стабильный пучок Нисневича. Сначала докажем, что $H^1_{\mathrm{Nis}}(-, \mathcal{F})$ гомотопически инвариантен.

1. Пусть $U = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}^h_{X,x})$, D — дивизор в U. Тогда есть «канонический» изоморфизм $\mathcal{F}(U - D)/\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_{-1}(D)$. Напомним, что $\mathcal{F}_{-1}(D) = \mathcal{F}(\mathbb{G}_m \times D)/\mathcal{F}(\mathbb{A}^1 \times D)$ и $\mathcal{F}(\mathbb{A}^1 \times D) = \mathcal{F}(D)$.

   Действительно, существует домик

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{U} - D \arrow[r, hook] \arrow[dl] & \widetilde{U} \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\rho"] & & \\
U - D \arrow[r, hook] & U & \widetilde{U} - D \arrow[u] \arrow[dr] & V \arrow[r, hook, "j"] & \mathbb{A}^1 \times D \\
 & & & V - D \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

   Из пункта (6) следует, что есть диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & \frac{\mathcal{F}(\widetilde{U} - D)}{\mathcal{F}(U)} & & & \\
\frac{\mathcal{F}(U - D)}{\mathcal{F}(U)} \arrow[ur, "\tau^*"] & & \frac{\mathcal{F}(V - D)}{\mathcal{F}(V)} \arrow[ul, "\rho^*"'] & \frac{\mathcal{F}(\mathbb{G}_m \times D)}{\mathcal{F}(\mathbb{A}^1 \times D)} \arrow[l, "\cong"] \arrow[r, equal] & \mathcal{F}_{-1}(D),
\end{tikzcd}$$

   а из пункта (7) следует, что τ^* и ρ^* в ней являются изоморфизмами. (Заметим, что $\pi\colon (\widetilde{U}, \widetilde{U} - D) \to (U, U - D)$, $\rho\colon (\widetilde{U}, \widetilde{U} - D) \to (V, V - D)$, $(V, V - D) \to (\mathbb{A}^1 \times D, \mathbb{G}_m \times D)$ — изоморфизмы в $\overline{\overline{\mathbb{Z}F}}^{\mathrm{pr}}(k)$).

$$
\begin{tikzcd}
 & & \Delta(D) \arrow[d, hook] & \\
 & & U \times_W (D \times \mathbb{A}^1) - E \arrow[d, hook] & \\
 & & U \times_W (D \times \mathbb{A}^1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & U \arrow[dr] & & D \times \mathbb{A}^1 \arrow[dl, "\theta \times \mathrm{id}"] \\
D \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbb{A}^{n-1} \times \mathbb{A}^1 & \\
 & \mathbb{A}^{n-1} - 0 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

Обозначим $W = \mathbb{A}^{n-1} \times \mathbb{A}^1$, $\widetilde{U} = U \times_W (D \times \mathbb{A}^1) - E$. Тогда

$$
\begin{tikzcd}
 & \widetilde{U} \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"] & \\
U & & D \times \mathbb{A}^1
\end{tikzcd}
$$

будет искомым домиком. (Отображение ε этально, поэтому $\varepsilon|_D \colon D \to \mathbb{A}^{n-1}$ этально. При этом $p_1, p_2, \sigma \times \mathrm{id}$ тоже этальны.)

2. Пусть $U = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}^h_{X,x})$ — гензелева окрестность точки x, D — гладкий дивизор в U. Мы утверждаем, что $H^1_{\mathrm{Nis}}(U \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F}) \to H^1_{\mathrm{Nis}}((U-D) \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F})$ инъективно. Рассмотрим диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
 & & & H^1_{\mathrm{Nis}}(U \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F}) \arrow[r] & H^1_{\mathrm{Nis}}((U-D) \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F}) \\
 & & H^1_{D \times \mathbb{A}^1}(U \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F}) \arrow[ur] & & \\
 & \mathcal{F}((U-D) \times \mathbb{A}^1) \arrow[ur] & & & \\
 & & & H^1_{\mathrm{Nis}}(U, \mathcal{F}) \arrow[uuu] & \\
 & & H^1_D(U, \mathcal{F}) \arrow[ur] \arrow[uuu] & & \\
 & \mathcal{F}(U-D) \arrow[ur] \arrow[uuu] & & & \\
\mathcal{F}(U) \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}
$$

Лемма 1.3. Есть спектральная последовательность

$$
H^p(U \times \mathbb{A}^1, \mathcal{H}^q_{D \times \mathbb{A}^1}(-, \mathcal{F})) \Rightarrow H^{p+q}_{D \times \mathbb{A}^1}(U \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F}).
$$

Следствие 1.4. В последовательности

$$0 \to H^1(U \times \mathbb{A}^1, \mathcal{H}^0_{D\times\mathbb{A}^1}(-,\mathcal{F})) \to H^1_{D\times\mathbb{A}^1}(U \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha} H^0(U \times \mathbb{A}^1, \mathcal{H}^1_{D\times\mathbb{A}^1}(-,\mathcal{F}))$$
$$\xrightarrow{d_2} H^2(U \times \mathbb{A}^1, \mathcal{H}^0_{D\times\mathbb{A}^1}(-,\mathcal{F}))$$

пучки $H^1(U \times \mathbb{A}^1, \mathcal{H}^0_{D\times\mathbb{A}^1}(-,\mathcal{F}))$ и $H^2(U \times \mathbb{A}^1, \mathcal{H}^0_{D\times\mathbb{A}^1}(-,\mathcal{F}))$ равны 0 по пункту (5). Поэтому $\alpha\colon H^1_{D\times\mathbb{A}^1}(U \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F}) \to H^0(U \times \mathbb{A}^1, \mathcal{H}^1_{D\times\mathbb{A}^1}(-,\mathcal{F}))$ — изоморфизм.

Напомним, что $\mathcal{H}^p_Z(X, \mathcal{G})$ по определению является пучком, ассоциированным с предпучком $V \mapsto H^p_{V\cap Z}(V, \mathcal{G})$ (точнее, $V \mapsto H^p_{V\times_X Z}(V, \mathcal{G})$).

Вернемся к проверке равенства $\mathcal{H}^0_Z(-,\mathcal{F}) = 0$ для $Z = D \times \mathbb{A}^1$, где $- \hookrightarrow U \times \mathbb{A}^1 = X$. Есть точная последовательность

$$0 \to H^0_Z(X, \mathcal{F}) \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X - Z).$$

Посмотрим на росток этой последовательности для $V = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}^h_{X,x})$. Получим

$$0 \to H^0_{V\times_X Z}(V, G) \to \mathcal{F}(V) \xrightarrow{d^*} \mathcal{F}(V - V \times_X Z).$$

Пучок $\mathcal{F}$ гомотопически инвариантен и σ-квази-стабилен. По пункту (5) отображение d^* инъективно. Поэтому $\mathcal{H}^0_{D\times\mathbb{A}^1}(-,\mathcal{F}) = 0$, и потому α — изоморфизм.

Итого, мы показали, что

$$H^1_{D\times\mathbb{A}^1}(U \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F}) = H^0(U \times \mathbb{A}^1, \mathcal{H}^0_{D\times\mathbb{A}^1}(-,\mathcal{F})).$$

Вернемся к диаграмме (2).

Лемма 1.5. $\mathcal{H}^1_{D\times\mathbb{A}^1}(-,\mathcal{F}) \cong (i \times \mathrm{id}_{\mathbb{A}^1})^*(\mathcal{F}_{-1})$.

На самом деле, нам надо только знать, что $H^0(U \times \mathbb{A}^1, \mathcal{H}^1_{D\times\mathbb{A}^1}(-,\mathcal{F})) = \mathcal{F}_{-1}(D \times \mathbb{A}^1)$.

Доказательство леммы. Мы знаем, что $H^1_D(U, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U - D)/\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}_{-1}(D)$ (см. выше). □

Диаграммный поиск по (2) теперь показывает, что отображение $H^1_{D\times\mathbb{A}^1}(U\times\mathbb{A}^1, \mathcal{F}) \to H^1_{\mathrm{Nis}}(U\times\mathbb{A}^1, \mathcal{F})$ нулевое.

Предложение 1.6. Если $X \in \mathrm{Sm}/k$, и элемент $\alpha \in H^1_{\mathrm{Nis}}(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F})$ таков, что $\alpha|_{X\times 0} = 0$ в $H^1_{\mathrm{Nis}}(X, \mathcal{F})$, то $\alpha = 0$.

Следствие 1.7. $i_0^*\colon H^1_{\mathrm{Nis}}(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F}) \to H^1_{\mathrm{Nis}}(X, \mathcal{F})$ — изоморфизм.

Вывод следствия 1.7 из предложения 1.6. Рассмотрим $p^*\colon H^1_{\mathrm{Nis}}(X, \mathcal{F}) \to H^1_{\mathrm{Nis}}(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F})$. Композиция $i_0^* \circ p^*$ тождественна, поэтому i_0^* сюръективно. А предложение 1.6 говорит нам, что i_0^* инъективно. □

Доказательство предложения 1.6. Будем доказывать только для случая $\dim X = 2$. Рассмотрим проекцию $p\colon X \times \mathbb{A}^1 \to X$. Имеется спектральная последовательность

$$H^i(X, R^j p_*(\mathcal{F})) \Rightarrow H^{i+j}(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F}).$$

Нам от нее нужен только кусок:

$$0 \to H^1(X, R^0 p_*(\mathcal{F})) \to H^1(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F}) \to H^0(X, R^1 p_*(\mathcal{F}))$$

При этом $\mathcal{F}$ гомотопически инвариантен, поэтому $p_*(\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(V \times \mathbb{A}^1) = \mathcal{F}(V)$. Получаем последовательность

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & \\
 & & \mathrm{Ker}(i_0^*) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & H^1(X,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & H^1(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "i_0^*"] & H^0(X, R^1p_*(\mathcal{F})) \\
 & & H^1(X,\mathcal{F}) &
\end{tikzcd}$$

Значит, $\alpha \in \mathrm{Ker}(i_0^*) \hookrightarrow H^0(X, R^1p_*(\mathcal{F}))$. Поэтому $\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда росток α равен нулю в любой точке $x \in X$.

Посмотрим на росток α в общей точке $\eta \in X$. Это $\alpha_\eta \in H^0(\eta, R^1p_*(\mathcal{F})) = H^1(\mathbb{A}^1_{k(X)}, \mathcal{F})$. Но $H^1(\mathbb{A}^1_{k(X)}, \mathcal{F}) = 0$ из-за последовательности Майера–Вьеториса (см. (3)).

Замечание 1.8. Равенство $H^1(\mathbb{A}^1_{k(X)}, \mathcal{F}) = 0$ равносильно тому, что отображение

$$\mathcal{F}(k(t)) \to \bigoplus_{x \in \mathbb{A}^1} \mathcal{F}_{-1}(k(x))$$

сюръективно.

Теперь из $\alpha_\eta = 0$ следует, что существует $Z \subsetneq X$ такой, что $\alpha_{X-Z} = 0$. Тогда $X - Z \subsetneq X - x$. Обозначим $X^{\mathrm{new}} = X - x$, $Z^{\mathrm{new}} = Z - x$. Тогда $Z^{\mathrm{new}} \subsetneq X^{\mathrm{new}}$ и $X - Z = X^{\mathrm{new}} - Z^{\mathrm{new}}$. Считаем, что Z^{new} — гладкий дивизор в гладком многообразии X^{new}. Мы уже знаем, что для всех $y \in X - Z$ выполнено $\alpha_y = 0$. Возьмем $y \in Z^{\mathrm{new}}$ и проверим, что $\alpha_y = 0$. Мы знаем, что $\alpha_y \in H^1(U^h_{X,y} \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F})$ и $\alpha|_{X-Z} = 0$. Поэтому

$$\alpha_y \in \mathrm{Ker}(H^1(U^h_{X,y} \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F}) \to H^1((U_{X,y} - Z) \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F})).$$

Но мы показали выше, что это ядро нулевое; поэтому $\alpha_y = 0$ для всех нужных точек, кроме x.

Осталось проверить, что $\alpha_x = 0$. Мы уже знаем, что $\alpha|_{X-x} = 0$. Уменьшая X, находим локальный параметр $f \in \mathfrak{m}_{X,x} - \mathfrak{m}^2_{X,x}$. Он задает гладкий дивизор D, содержащий x. Теперь $\alpha_x \in \mathrm{Ker}(H^1(U^h_{X,x} \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F}) \to H^1((U^h_{X,x} - D^h_x) \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F})) = 0$ (см. выше). Поэтому и $\alpha_x = 0$. $\square$