Мотивный аналог теоремы Серра о конечности стабильных гомотопических групп

Алексей Ананьевский

10.09.2015

Цель: доказать, что

$$\pi_{i,j}(\mathbb{S}^-_{\mathbb{Q}}) = \begin{cases} W(k)\otimes\mathbb{Q}, & i=j; \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

1 Топология

Начнем с топологического контекста. Рассмотрим категорию $\mathrm{SH}_{\mathbb{Q}} = \mathrm{SH}\otimes\mathbb{Q}$. Пусть $\mathbb{S}$ — сферический спектр, K — спектр комплексной K-теории. Мы знаем, что

$$[\mathbb{S}_{\mathbb{Q}}[m], K_{\mathbb{Q}}] = \begin{cases} \mathbb{Q}, & m=2n; \\ 0, & m=2n-1. \end{cases}$$

Есть тождественное отображение $1\colon \mathbb{S}_{\mathbb{Q}} \to K_{\mathbb{Q}}$ и элемент Ботта $\beta\colon \mathbb{S}_{\mathbb{Q}}[2] \to K_{\mathbb{Q}}$. Можно возвести его в степень: $\beta^n\colon \mathbb{S}_{\mathbb{Q}}[2n] \to K_{\mathbb{Q}}$. Кроме того, $\wedge\beta\colon K_{\mathbb{Q}}[-2] \to K_{\mathbb{Q}}$ — изоморфизм (периодичность Ботта). Еще одно обозначение: $(\beta^\bullet)\colon \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{S}[2n] \to K_{\mathbb{Q}}$. Как устроены операции и кооперации на спекте $K_{\mathbb{Q}}$? Мы обсуждали это ранее.

Известные факты:

1. Характер Черна $K_{\mathbb{Q}} \to \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H\mathbb{Q}[2n]$ — изоморфизм.
2. $\mathbb{S}_{mbQ} \cong H\mathbb{Q}$ — вычисление Серра.

Зная эти факты, мы можем посчитать операции и кооперации на K-теории. Позже мы увидим, что можно действовать и в обратном направлении. Заметим, что $(\beta^\bullet)$ — изоморфизм. Поэтому $(\beta^\bullet)^*\colon [K_{\mathbb{Q}}, K_{\mathbb{Q}}] \cong [\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{S}_{\mathbb{Q}}[2n], K_{\mathbb{Q}}]$ — изоморфизм. Правая часть изоморфна $\prod_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$. А именно, элементику $f\in[K_{\mathbb{Q}}, K_{\mathbb{Q}}]$ сопоставляется набор $f(\beta^n)/\beta^n$.

Теперь про кооперации: $[S_{\mathbb{Q}}[2n], K_{\mathbb{Q}}\wedge K_{\mathbb{Q}}] \cong [S_{\mathbb{Q}}[m], \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} S_{\mathbb{Q}}[2n]\wedge K_{\mathbb{Q}}]$, изоморфизм справа налево устанавливается отображением $(\beta^\bullet)_*$. Правая часть равна

$$\begin{cases} 0, & m=2l-1; \\ \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{Q}, & m=2l. \end{cases}$$

Теперь в обратную сторону. Давайте считать, что мы знаем, что $(\beta^\bullet)^*$ — изоморфизм, что $(\beta^\bullet)^*$ — изоморфизм, и что $H_0(\mathbb{S}_{\mathbb{Q}}] = Q$. Сейчас мы выведем из этого, что у $\mathbb{S}_{\mathbb{Q}}$ больше нет ненулевых гомотопических групп: $\mathbb{S}_{\mathbb{Q}} = H\mathbb{Q}$.

Замечание 1.1. У спектра K-теории есть хорошая геометрическая модель:

$$K = (B\,\mathrm{GL}(\mathbb{C}), \mathrm{GL}(\mathbb{C}), B\,\mathrm{GL}(\mathbb{C}), \mathrm{GL}(\mathbb{C}), \dots).$$

Связывающие отображения берутся отсюда: $\mathbb{CP}^1\wedge B\,\mathrm{GL}(\mathbb{C}) \to B\,\mathrm{GL}(\mathbb{C})$, что эквивалентно $\mathbb{CP}^1\wedge \mathrm{Gr}(\infty,\infty) \to \mathrm{Gr}(\infty,\infty)$, и нужно взять отображение $(\mathcal{O}(1)-1)\boxtimes\tau$. Поэтому $[K_{\mathbb{Q}}, K_{\mathbb{Q}}] = \varprojlim_{n\in\mathbb{Z}} K^{2n}_{\mathbb{Q}}(B\,\mathrm{GL}(\mathbb{C}))$, а K-теория грассманиана известна.

Из того, что $(\beta^\bullet)^*$ является изоморфизмом, следует, что у нас есть следующие идемпотенты в кольце $[K_\mathbb{Q}, K_\mathbb{Q}]$:

$$e_i \colon \beta_n \mapsto \begin{cases} 0, & n \neq i; \\ \beta^n, & n = i. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\pi_m(e_i K_\mathbb{Q}) = \begin{cases} 0, & m \neq 2i; \\ \mathbb{Q}, & m = 2i. \end{cases}$$

Поэтому $K_\mathbb{Q} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H\mathbb{Q}[2n]$.

Из того, что $(\beta^\bullet)_*$ является изоморфизмом, следует, что

$$K_\mathbb{Q} \wedge K_\mathbb{Q} \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{S}_\mathbb{Q}[2n] \wedge K_\mathbb{Q}$$

(просто потому, что их гомотопические группы совпадают). Значит,

$$\bigoplus_{m,n} H\mathbb{Q}[2n] \wedge H\mathbb{Q}[2m] \cong \bigoplus_{m,n} H\mathbb{Q}[2n+2m].$$

В частности, $H\mathbb{Q} \wedge H\mathbb{Q} \cong H\mathbb{Q}$.

Наконец, посмотрим на треугольник

$$\mathbb{S}_{\mathbb{Q},\geq 1} \to \mathbb{S}_\mathbb{Q} \to H\mathbb{Q}$$

в стабильной гомотопической категории, и смэшнем его с $H\mathbb{Q}$. Получаем, что $S_{\mathbb{Q},\geq 1} \wedge H\mathbb{Q} = 0$. Кроме того,

$$\mathbb{S}_{\mathbb{Q},\geq 1} \wedge \mathbb{S}_{\mathbb{Q},\geq 1} \cong \mathbb{S}_{\mathbb{Q}\geq 1}.$$

Если правая часть n-связна, то левая часть $2n$-связна. Из этого следует, что $\mathbb{S}_{\mathbb{Q},\geq 1} = 0$, и, стало быть, $\mathbb{S}_\mathbb{Q} \to H\mathbb{Q}$ — изоморфизм.

2 Мотивы

Рассмотрим мотивную гомотопическую категорию $\mathrm{SH}_\mathbb{Q}(k)$, сферический спектр $\mathbb{S}$ и спектр KO, который представляет эрмитову K-теорию. Обозначим $\mathbb{S}\{4\} = \mathbb{S} \wedge T^4$. Есть единица $\mathbb{S} \to KO$ и элемент Ботта $\beta \colon \mathbb{S}\{4\} \to KO$. Периодичность Ботта: $- \wedge \beta \colon KO\{-4\} \to KO$ — изоморфизм. Как и раньше, есть отображение $(\beta^\bullet) \colon \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{S}\{4n\} \to KO$. Известное вычисление: $[\mathbb{S}, \mathbb{S}] = \mathrm{GW}(k)$. При этом $\mathrm{GW}(k) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \oplus W(k) \otimes \mathbb{Q}$ (проекции задаются $H/2$ и $1 - H/2$). На самом деле, достаточно не домножать на $\mathbb{Q}$, а только обратить 2. Вся категория, стало быть, разваливается на плюс-часть (соответствующую первому слагаемому), и на минус-часть (соответствующую второму слагаемому):

$$\mathrm{SH}_\mathbb{Q}(k) = \mathrm{SH}^+_\mathbb{Q}(k) \oplus \mathrm{SH}^-_\mathbb{Q}(k),$$

где $\mathrm{SH}^+_\mathbb{Q}(k) = (H/2) \cdot \mathrm{SH}_\mathbb{Q}(k)$ и $\mathrm{SH}^-_\mathbb{Q}(k) = (1 - H/2) \cdot \mathrm{SH}_\mathbb{Q}(k)$

Теорема 2.1. $KW_\mathbb{Q} := KO^-_\mathbb{Q}$ представляет производные группы Витта:

$$[\Sigma^\infty_T X_+, KW_\mathbb{Q} \wedge S^{i,j}] = W^{i-j}_\mathbb{Q}(X)$$

Теорема 2.2. Отображение

$$(\beta^\bullet)^* \colon [KW_\mathbb{Q}, KW_\mathbb{Q}] \to [\bigoplus_n \mathbb{S}_\mathbb{Q}\{4n\}, KW_\mathbb{Q}]$$

является изоморфизмом. Правая часть равна $\prod_{n\in\mathbb{Z}} W_{\mathbb{Q}}(k)$ Отображение

$$[\mathbb{S}\wedge\mathbb{S}^{i,j}\wedge\operatorname{Spec}F, KW_{\mathbb{Q}}\wedge KW_{\mathbb{Q}}] \xleftarrow{(\beta^\bullet)_*} [\mathbb{S}_{\mathbb{Q}}\wedge\mathbb{S}^{i,j}\wedge\operatorname{Spec}F, \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{S}\{4n\}\wedge KW]$$

является изоморфизмом.

Теорема 2.3. $H_0(\mathbb{S}^-_{\mathbb{Q}}) = EM(W_{\mathbb{Q}}[\eta,\eta^{-1}])$, где $W_{\mathbb{Q}}[\eta,\eta^{-1}]$ — цикломодуль в смысле Мореля. Иными словами,

$$\pi_{i,j}(H_0(\mathbb{S}^-_{\mathbb{Q}})) = \begin{cases} 0, & i\neq j;\\ W_{\mathbb{Q}}, & i=j.\end{cases}$$

Из этих теорем следует, что $KW_{\mathbb{Q}} = \bigoplus EM(W_{\mathbb{Q}}[\eta,\eta^{-1}]$. Пустьь e_i — проекторы. Напомним, что $KW^{*,*}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{pt}) = W(k)[\beta,\beta^{-1},\eta,\eta^{-1}]$. Как e_i действует на элемент $\langle a\rangle\beta^n\eta^m$? Заметим, что $\langle a\rangle$ и η^m приходят из сферического спектра, и потому выносятся: $e_i(\langle a\rangle\beta^n\eta^m) = \langle a\rangle\eta e_i(\beta^n)$.

Из вычисления для коопераций следует, что

$$EM(W_{\mathbb{Q}}[\eta,\eta^{-1}])\wedge EM(W_{\mathbb{Q}}[\eta,\eta^{-1}]) = EM(W_{\mathbb{Q}}[\eta,\eta^{-1}]).$$

Теперь нужно нарисовать такой же треугольник, как в топологии, воспользоваться вычислением Мореля, и повторить рассуждение:

$$\mathbb{S}^-_{\mathbb{Q},\geq 1}\to\mathbb{S}^-_{\mathbb{Q}}\to EM(W_{\mathbb{Q}}[\eta,\eta^{-1}])$$

(умножим на EM, а потом на первый свой элемент,...). Получим, что $\mathbb{S}^-_{\mathbb{Q}}\cong EM(W_{\mathbb{Q}}[\eta,\eta^{-1}]$.

Напомним, что про плюс-часть тоже все известно: $\mathbb{S}^+_{\mathbb{Q}} = H_{mot}\mathbb{Q}$ (Сизински–Деглиз).