18.02.2014

М. Бондарко

Теория когомологий Вейля

P — гладкое проективное над $\mathbb{F}_q$

$Frob_q$ действует на P

$$\# P(\mathbb{F}_{q^m}) = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \, Tr_{H^i(P)}(Fr^m)$$

к/м в. пр-во над полем хар-ки 0.

$$H^i_X({}^W\mathcal{O}_X \longrightarrow {}^W\Omega^1_{W_X} \longrightarrow {}^W\Omega^2_W X \longrightarrow \ldots) = H^i_{sing}$$

- функтор векторов Витта

— не работает!

в.п. над K

- нужно брать комплекс де Рама–Витта

- Этальные когомологии: $\ell \neq p$, топ. Гротендика,

$$H^i_{et}(X, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$$

$X \to S$ — собств., проект., глад.

→ H^i_{et} слоев в каком-то смысле изоморфны H^i(общего слоя)

→ H^i_{et} гладкого проект. $/\mathbb{F}_q$ изоморфны

схема над $\mathbb{Z}/p$ → редукция / поле вычетов: $\mathbb{F}_p$

→ общий слой / $\mathbb{Q}_p^{alg} = K$

$\circlearrowleft$

$$H^*_{et}(P_K, \mathbb{Q}_p)$$

Пусть теперь $K/\mathbb{Q}_p$ конечно. $Gal(K)$ — прокон. группа
Она действует на $H^i_{et}(X, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$, переходим к пределу
$\to$ непрерывное действие $Gal(K)$ на $\mathbb{Q}_\ell^n$

такие действия не очень интересны (т. Гротендика о монодромии)

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook] & K^{nr} \arrow[rr, hook] & & K^{tr} \end{tikzcd}$$

K^{nr} — max неразветвленное расширение

K^{tr} — max ручное расширение

присоед. все корни из 1 степени $\perp p$

(добавляем корни из π

$K^{tr} = K^{nr}(\pi^{\frac{1}{\ell_i^\infty}})$

N — топологич. образующая $Gal(K^{tr}/K^{nr})$

p-кручение определяется редукцией mod ℓ

$$\tau N \tau^{-1} = N^{?(\tau)} \quad (N \in Gal(K^{tr}/K))$$

$\hookrightarrow$ с. числа N — какие-то корни из 1

$K \hookrightarrow K''$ $\rightarrow$ убьем их

$$V^{(N-1)^i} / V^{(N-1)^{i+1}}$$

Для $H^i_{et}(X_K, \mathbb{Q}_p)$ это не работает
$\to$ p-адическое представление Gal, дикая часть действует нетривиально

E — абелево многообразие $\quad \underleftarrow{E[p^n]}_{n}$

Возвращаемся над $\mathbb{C}$: $H^q(\Omega^p) \Rightarrow H^{p+q}_{dR}$

Сделаем $\otimes \mathbb{C}$ $\rightarrow$ есть разложение Ходжа

Faltings: $H^{n+m}_{et}(X, \mathbb{Q}_p) \otimes \mathbb{C}_p$

$$\bigoplus_{m+n} H^n(X, \Omega_m) \otimes \mathbb{C}_p(-m) \simeq H^{m+n}_{et}(X, \mathbb{Q}_p) \otimes \mathbb{C}_p$$

(Hodge – Tate decomposition)

– p-адическая теория Ходжа

Кристаллические когомологии:

$$H^n_{cris}(X_k; \mathbb{Q}_p) \simeq H^n_{dR}(\mathfrak{X})$$

$\circlearrowleft F_r$ (или X_K)

тут есть фильтрация

B – предст. Галуа

$(V \otimes B_{cris})^{G}$ ← фильтров $\longrightarrow$ кристал. когом. с фильтрацией

$G \circlearrowleft$ $\circlearrowleft F_{rob}$

- Представления Галуа
- Функторы Фонтена

- кристалл. когомологии

жесткие

C_{cris}, C_{st}