25.02.2014

В. Соснило

Структура разделенных степеней

$\boxed{\text{Опр.}}$ A — кольцо, $I \trianglelefteq A$ (обозн.: $\gamma_0(x)=1$)

Структура разделенных степеней — это набор $\{\gamma_n : I \to I\}$ $(n \geq 0)$

такой, что

1. $\gamma_1(x) = x$
2. $\gamma_n(x)\gamma_m(x) = \dfrac{(n+m)!}{n!\,m!}\gamma_{n+m}(x)$
3. $\gamma_n(x+y) = \sum\limits_{i+j=n} \gamma_i(x)\gamma_j(y)$
4. $\gamma_n(ax) = a^n \gamma_n(x)$
5. $\gamma_n(\gamma_m(x)) = \dfrac{(mn)!}{n!\,(m!)^n}\gamma_{n+m}(x)$

МОТИВАЦИЯ:

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega_{R/S} \arrow[dr, dashed] & \\
R \arrow[ur] \arrow[rr, "d"] & & M \\
S \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

$\Omega_{R/S}$ — кэлеровы дифференциалы

$d(xy) = x\,dy + y\,dx$

$d(s) = 0$

$$R \to \Omega_{R/S} \to \Lambda^2 \Omega_{R/S} \to \ldots \to \Lambda^n \Omega_{R/S}$$

$R = \mathbb{F}_p[x]$ ← все плохо

лучше: $d : R \to M$ т.ч. $d(\gamma_n(x)) = \gamma_{n-1}(x)\,dx$

(на R фиксированы I и $\{\gamma_n\}$)

— рассматриваем универсальное такое

$$\begin{tikzcd}
(A, I, \gamma) \arrow[r, mapsto] & (A, I) \arrow[l, dashed, bend left]
\end{tikzcd}$$

левый сопряж. функтор (=<u>оболочка</u>) — есть из т. Фрейда

$$\begin{tikzcd}
(A, I) \arrow[r] \arrow[d] & D_{R,J}(I) \arrow[dl, dashed, "\exists"] \\
(A/I, 0) &
\end{tikzcd}$$

— единица этого сопряжения.

Пусть (A, I, γ) — алг. с разд. степенями, A — $\mathbb{Z}_{(p)}$-алгебра, C — A-алгебра, $A \xrightarrow{f} C$ т.ч. $f(I) = 0$ и $p^n \in I$

т.е. $IC = 0$ т.е. p-нильп. в C

Утолщение C над (A, I, γ) — это гомоморфизм алгебр с разд. степенями $(A, I, \gamma) \longrightarrow (B, J, \Gamma)$ + гомоморфизм $C \longrightarrow B/J$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] & B/J \\
 & C \arrow[u] \\
A \arrow[uu] \arrow[r] & A/I \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Морфизм утолщений:

$$\begin{tikzcd}
 & J' \arrow[r] & B' \arrow[r] & B'/J' \\
J \arrow[r] \arrow[ur] & B \arrow[r] \arrow[ur] & B/J \arrow[ur] & \\
 & A \arrow[u] \arrow[uur] & A/I \arrow[u] \arrow[uur, bend right] &
\end{tikzcd}$$

$CRIS(C/A, I, \gamma) = CRIS(C/A)$ — кат. утолщений C

$Cris(C/A)$ — подкатегория утолщений т.ч.

$\operatorname{Spec} B/J \longrightarrow \operatorname{Spec} C$ — открытое вложение

Оказывается, это сайт на категории (A, I, γ)-алгебр (и CRIS, и Cris)

чтобы определить $\otimes$, приходится брать оболочку

M — B-модуль, (B, I, γ) — d.p.ring над $(A, ?, ?)$

$$\nabla : M \longrightarrow M \otimes_B \Omega_{(B/A, \gamma)} \qquad \left(\Lambda^i \Omega =: \Omega^i\right)$$

$$\nabla(bm) = b\nabla(m) + m \otimes db$$

Интегрируемая связность:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\nabla"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & M \otimes \Omega_{B/A} \arrow[r, "\nabla"] & M \otimes_B \Omega^2_{B/A} \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ S-схема с разд. степенями, если заданы I — когерентный пучок идеалов на S и $\{\gamma_i\}: I(R) \longrightarrow I(R)$

т.ч. это алгебра с разд. ст. $\forall R$, и функториально.

(S, I, γ) — d.p. схема, $S / \mathbb{Z}_{(p)}$

$$\begin{tikzcd} & (S, I, \gamma) \\ V(I) = S_0 \arrow[u] & & X \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

p — лок. нильп. в X

d.p. схема T наз. <u>утолщением X отн-но (S, I, γ)</u>, (вместе с U)

если
$$\begin{tikzcd}
T \arrow[d] & U \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\
 & X \arrow[d] \\
S & S_0 \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

($\hookrightarrow$ — замкн. вложение)

$CRIS(X/S)$ — соотв. сайт

Морфизм утолщений этальный, плоский, ..., если морфизм $T \to T'$ этальный, плоский, ...

Есть функтор $Zar(X/S_0) \to CRIS(X/S)$

$$(U \hookrightarrow X) \longmapsto (U, U) \to X$$

$$\begin{tikzcd}
(U_3, T_3, \delta_3) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & (U_2, T_2, \delta_2) \arrow[d] \\
(U_1, T_1, \delta_1) \arrow[r] & (U, T, \delta)
\end{tikzcd}$$

$T_2 \to T$ — плоский

$\Downarrow$

$T_3 = T_2 \times_T T_1$

$CRIS_{Zar}(X/S) \to Zar(X/S_0)$ — забывающий

$$(T, U) \longmapsto U$$

$\rightsquigarrow$ он непрерывный и конепрерывный

$\mathcal{O}_{X,S}(T,U,\delta) := \mathcal{O}(T)$ — структурный пучок

$\mathbb{G}_a(T,U,\delta) := \mathcal{O}(U)$

$$\underset{\gamma}{I} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X/S} \longrightarrow \mathbb{G}_a$$

F — пучок на $\mathrm{Cris}(X/S) \ni (U,T,\delta)$

$F_T(W) := F(U \cap W, W, \delta|_W)$

$\rightarrow F_T$ — пучок Зарисского на T

$(U',T',\delta') \xrightarrow{f} (U,T,\delta)$

$\rightarrow$ есть $F_{T'}$, F_T и $f^* F_T$

$$f^* F_T \xrightarrow{c_f} F_{T'}$$

— изоморфизм для открытых вложений

F — <u>кристалл</u> $\mathcal{O}_{X/S}$-модулей, если c_f — изо $\forall f$

$\boxed{\text{Лемма}}$ F — кристалл и F <u>локально квазикогерентный</u>

(т.е. F_T — квазиког. $\forall T$)

$\Updownarrow$

F — квазикогерентный в смысле пучков на сайте