

# Структура разделенных степеней

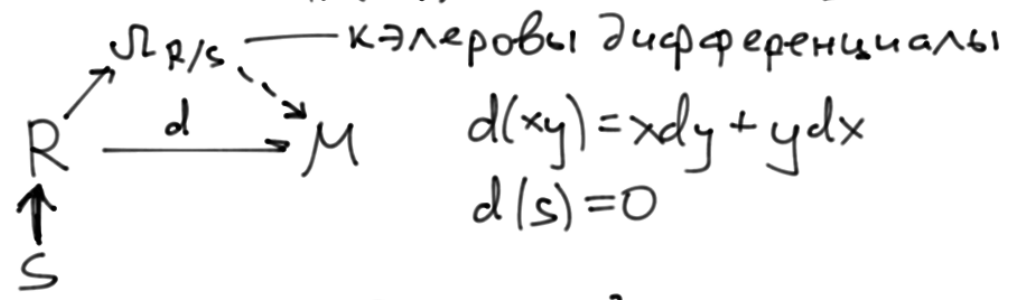
Опр.  $A$  — кольцо,  $I \triangleleft A$  (обозн.:  $\gamma_0(x) = 1$ )

Структура разделенных степеней — это набор  $\{\gamma_n: I \rightarrow I\}$   
( $n \geq 0$ )

Такой, что

- ①  $\gamma_1(x) = x$
- ②  $\gamma_n(x)\gamma_m(x) = \frac{(n+m)!}{n!m!} \gamma_{n+m}(x)$
- ③  $\gamma_n(x+y) = \sum_{i+j=n} \gamma_i(x)\gamma_j(y)$
- ④  $\gamma_n(ax) = a^n \gamma_n(x)$
- ⑤  $\gamma_n(\gamma_m(x)) = \frac{(mn)!}{n!(m!)^n} \gamma_{n+m}(x)$

МОТИВАЦИЯ:



$$R \rightarrow \Omega_{R/S} \rightarrow \wedge^2 \Omega_{R/S} \rightarrow \dots \rightarrow \wedge^n \Omega_{R/S}$$

$R = \mathbb{F}_p[x]$  ← все плохо

лучше:  $d: R \rightarrow M$  т.ч.  $d(\gamma_n(x)) = \gamma_{n-1}(x)dx$   
(на  $R$  фиксированы  $I$  и  $\{\gamma_n\}$ )

— рассматриваем универсальное такое

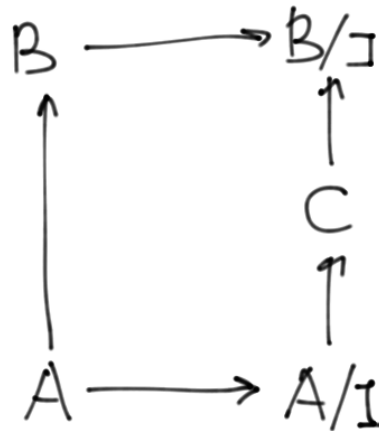
$(A, I, \gamma) \xrightarrow{\quad} (A, I)$   
 левый сопряж. функтор (= оболочка)  
 — есть из т. Фрейда

$(A, I) \xrightarrow{\quad} D_{R, J}(I)$  — единица этого сопряжения.  
 $(A, I) \searrow \downarrow \exists \rightarrow (A/I, 0)$

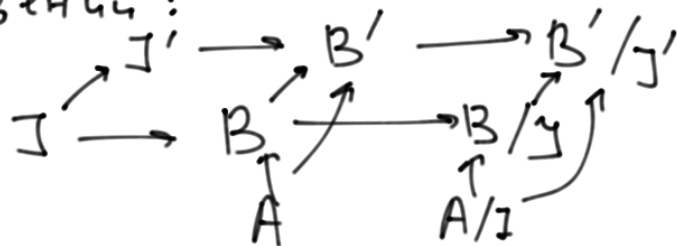
Пусть  $(A, I, \gamma)$  — алгебра разд. степенями,  $A$  —  $\mathbb{Z}_{(p)}$ -алгебра  
 $C$  —  $A$ -алгебра,  $A \xrightarrow{f} C$  т.ч.  $f(I) = 0$  и  $p^n \in I$   
 т.е.  $I \subset C = 0$  т.е.  $p$ -кильп. в  $C$

Утолщение  $C$  над  $(A, I, \gamma)$  — это  
 гомоморфизм алгебр с разд. степенями

$(A, I, \gamma) \longrightarrow (B, J, \beta)$  + гомоморфизм  $C \longrightarrow B/J$



Морфизм утолщений:



$\text{CRIS}(C/A, I, \gamma) = \text{CRIS}(C/A)$  — кат. утолщений  $C$   
 $\text{Cris}(C/A)$  — подкатегория утолщений т.ч.

$\text{Spec } B/\gamma \rightarrow \text{Spec } C$  — открытое вложение

Оказывается, это сайт на категории  $(A, I, \gamma)$ -алгебр  
 (и  $\text{CRIS}$ , и  $\text{Cris}$ )

чтобы определить  $\otimes$ , приходится брать оболочку

$M$  —  $B$ -модуль,  $(B, I, \gamma)$  — д.р.гичу над  $(A, I, \gamma)$

$$\nabla: M \longrightarrow M \otimes_B \Omega_{(B/A, \gamma)}^1 \quad (\wedge^i \Omega =: \Omega^i)$$

$$\nabla(bm) = b \nabla(m) + m \otimes db$$

Интегрируемая связность:

$$M \xrightarrow{\nabla} M \otimes \Omega_{B/A}^1 \xrightarrow{\nabla} M \otimes \Omega_{B/A}^2$$

○

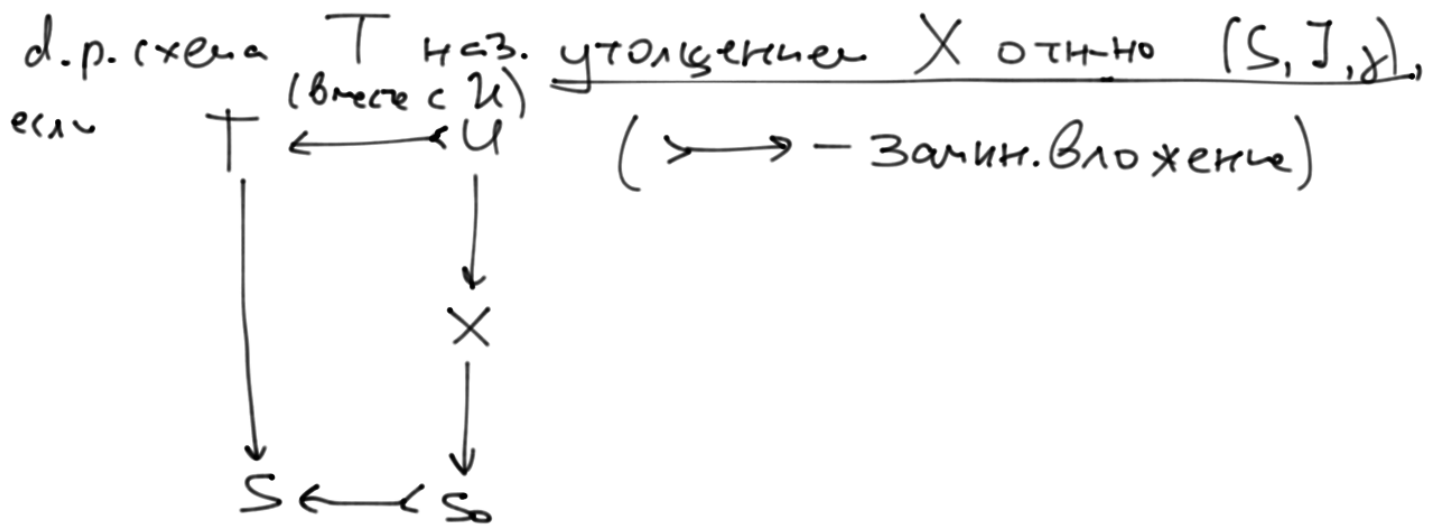
**Опр.**  $S$ -схема с разд. степенями, если  
 заданы  $I$  — когерентный пучок идеалов на  $S$

$$\chi: I(R) \longrightarrow I(R)$$

т.ч. это алгебра с разд. ст.  $\forall R$ , и функториально.

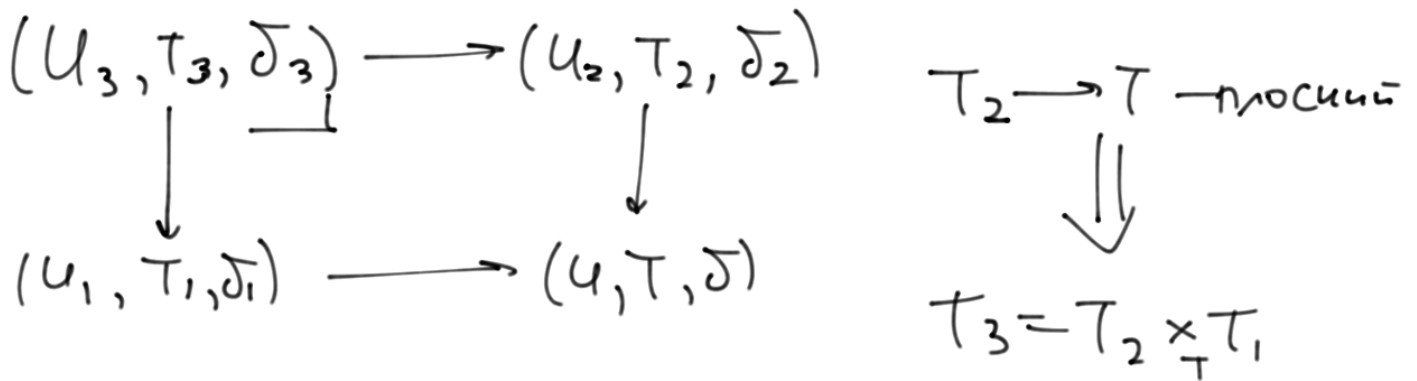
$(S, I, \chi)$  — д.р.схема,  $S/\mathbb{Z}(p)$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \\ & \nu(I) = S_0 & \\ & \leftarrow X & \\ & & p\text{-лок. нчльп. в } X \end{array}$$



$\text{CRIS}(X/S)$  — соотв. сайт

Морфизм утолщения эталный, плоский, ..., если  
 морфизм  $T \rightarrow T'$  эталный, плоский, ...  
 Есть функтор  $\text{Zar}(X/S_0) \rightarrow \text{CRIS}(X/S)$   
 $(U \hookrightarrow X) \mapsto (U, U) \rightarrow X$



$\text{CRIS}_{\text{Zar}}(X/S) \rightarrow \text{Zar}(X/S_0)$  — забывающий  
 $(T, U) \mapsto U$

$\leadsto$  он непрерывный и конепрерывный

$\mathcal{O}_{X,S}(T, \mathcal{U}, \delta) := \mathcal{O}(T)$  — структурный пучок

$\Gamma_{\alpha}(T, \mathcal{U}, \delta) := \mathcal{O}(\mathcal{U})$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \delta \end{array} \longrightarrow \mathcal{O}_{X/S} \longrightarrow \Gamma_{\alpha}$$

$F$  — пучок на  $(\text{Zis}(X/S) \ni (U, T, \delta))$

$$F_T(W) := F(U \cap W, W, \delta|_W)$$

→  $F_T$  — пучок Зарисского на  $T$

$$(U', T', \delta') \xrightarrow{f} (U, T, \delta)$$

→ есть  $F_{T'}$ ,  $F_T$  и  $f^* F_T$

$$f^* F_T \xrightarrow{c_f} F_{T'}$$

— изоморфизм для открытых вложений

$F$  — кристалл  $\mathcal{O}_{X/S}$ -модулей, если  $c_f$  — изо  $\forall f$

Лемма  $F$  — кристалл и  $F$  локально квазиизотерентный



(т.е.  $F_T$  — квазиизот.  $\forall T$ )

$F$  — квазиизотерентный в смысле пучков на сайте