Е. Солнце

26/12/05

Групповые подсхемы ре[redacted]х групп

G – ред. группа над по[illegible] (афф. групповые схемы)

T – расщепимый макс[illegible] тор

$(X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$ – root data

X – характеры тора

Φ – root system

$x_\beta : G_a \longrightarrow G$, $\beta \in \Phi$

$$t x_\beta(\alpha) t^{-1} = x_\beta(\beta(t)\alpha)$$

+ Ком. ф-ла Шевалле

$$[x_\alpha(a), x_\beta(b)] = \prod_{\substack{r,s>0 \\ r\alpha+s\beta\in\Phi}} x_{r\alpha+s\beta}(N_{\alpha\beta rs}\, a^r b^s), \quad N_{\alpha\beta rs} \in \mathbb{Z}$$

Проблема

Описать все связ. груп. подсхемы между G и T

Опр. $S' \subset \Phi$ замкнутое, если $\alpha, \beta \in S'$, $\alpha+\beta \in \Phi \Rightarrow \alpha+\beta \in S'$

Опр. $S' \subset \Phi$ – квазизамкнутое, если $\left.\begin{array}{l} \alpha, \beta \in S', \ r\alpha+s\beta \in \Phi \\ N_{\alpha\beta rs} \not\vdots \operatorname{char} K \end{array}\right\} \Rightarrow r\alpha+s\beta \in S'$

Замеч. 1) S – замкн. $\Rightarrow$ S квазизамкнуто

2) S квазизамкнуто $\Rightarrow$ S замкнуто –

если $\Phi \supseteq B_2 \Rightarrow \operatorname{char} k \neq 2$

если $\Phi \supseteq G_2 \Rightarrow \operatorname{char} k \neq 2, 3$ (char)

Теорема. Подгруппы алгебр. связные $G(\Phi)$, содержащие T, *) отвечают квази замкнутым мн-вам корней (приведённые group schemes)

$$G(S) \longleftrightarrow S'$$

$$G(S) \cap X_\beta(G_a) = \begin{cases} 1, & \beta \notin S \\ X_\beta(G_a), & \beta \in S \end{cases}$$

$T \prod X_\beta(G_a)$ – открытое мн-во в $G(S)$

$G(S) \cap G(S') = G(S \cap S')$

Borel, Tits

SGA 3, XXII

Т. Карье Групповые схемы над полем char $= 0$ приведены

1991 C. Wenzel массифиц. все параболические групп. подсхемы (только для A_3? и в случае (char))

янв. 2005 Е.С. описано все подсхемы $G(\Phi) = GL_n$

Теорема Связные групп. подсхемы, сод. T, отвечают функциям $\varphi : \Phi \longrightarrow \mathbb{N}_0^{\infty}$:

только для char $k = 2$ или 3

$$\alpha, \beta \in \Phi,\ r\alpha + s\beta \in \Phi,\ N_{\alpha\beta rs} \not\vdots\ \mathrm{char}\, k$$

$$(*) \qquad \Rightarrow \varphi(r\alpha + s\beta) \geq \min\big(\varphi(\alpha) - \log_p r,\ \varphi(\beta) - \log_p s\big)$$

$\boxed{\text{Зам.}}$ (char) $\Rightarrow \varphi(\alpha+\beta) \geq \min(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$

$$H_\varphi \longleftrightarrow \varphi$$

$$H \cap X_\beta(G_a) = X_\beta(\alpha_{p^{\varphi(\beta)}})$$

$$H_\varphi = \langle T,\ x_\beta(\alpha_{p^{\varphi(\beta)}}) \rangle$$

и $H_\varphi \cap H_{\varphi'} = H_{\min(\varphi, \varphi')}$

Осн. лемма R – k-алгебра

$$\left.\begin{array}{l} T(R) \leq H \leq G(\Phi, R) \\ \text{и } \prod\limits_{a_\beta \in Nil(R)} x_\beta(a_\beta) \in H \end{array}\right\} \Rightarrow \forall \beta \in \Phi \ \ x_\beta(a_\beta) \in H$$