6.03.2006
Е.В Дыбкова

R – асс. кольцо с 1

$^\wedge$ – обобщ. инволюция: • изоморфизм адд. группы
• $\widehat{ab} = \hat{b} \cdot \hat{a}$
• $\exists \lambda \in R^* : \hat{\hat{a}} = \lambda a \lambda^{-1}$

определяющий символ

$\Lambda^m = \{ a - \hat{a}\lambda \mid \lambda \in R \}$

$\Lambda^M = \{ a \in R \mid a = -\hat{a}\lambda \}$

$\Lambda^m \leq \Lambda \leq \Lambda^M$

форменный параметр кольца, если $\hat{a}\Lambda a \leq \Lambda \quad \forall a \in R$

$\Lambda^M / \Lambda^m = V$ – имеет ест. стр-ру правого R-модуля

$(a + \Lambda^m)\alpha = \hat{\alpha} a \alpha + \Lambda^m$

Λ – форм. параметр $\Leftrightarrow$ ~~…~~ при $\varphi : \Lambda^M \to V$ $\quad \varphi(\Lambda)$ – подмодуль V

... $\exists \nu \in Z(R) : \nu + \hat{\nu} \in R^* \Longrightarrow \Lambda^m = \Lambda^M$

...(R, Λ) – форменное кольцо

scaling: берем $\beta \in R^*$

$^\wedge$ заменяется на $^\vee$:

$\check{a} = \beta \hat{a} \beta^{-1}$

$\rightsquigarrow \lambda' = \beta \hat{\beta}^{-1} \lambda$ – определяющий символ для $^\vee$

$\rightarrow (R, \beta\Lambda)$ – новое форм. кольцо, ~~из~~ полученное scaling'ом из (R, Λ)

$\widehat{(a - \hat{a}\lambda)}\, \lambda = \cancel{\ldots} \; -\hat{a} + \hat{\lambda}\hat{\hat{a}}\lambda$

$-\hat{a} + \hat{\lambda}\lambda a \lambda^{-1}\lambda = \hat{\lambda}\lambda a - \hat{a}$

R – тело $\qquad \cancel{\ldots} \qquad \hat{\lambda}\lambda a - \hat{a}$

нормализовано, если $\quad \Lambda = 0$ или $1 \in \Lambda$

...: $^\wedge = \bar{\ }$

$\bar{\ } = id_R \quad (R$ – поле$)$, $\lambda = 1$

$\Lambda^m = 0, \; \Lambda^M = \{ a \in R \mid 2a = 0 \}$

... char $R \neq 2 \quad (R, 0)$

... char $R = 2 \quad (R, \Lambda)$, ~~Λ~~ Λ – подпр-во в R над R^2

(2) $\bar{\ } = id_R$ (R-поле), $\lambda = -1 \neq 1$ ($\operatorname{char} R \neq 2$)

$\Rightarrow (R, R)$

(3) $\bar{\ } \neq id_R \Rightarrow \lambda = -1$

$\Lambda^m = \{a + \bar a \mid a \in R\} = \operatorname{Tr} R$

$\Lambda^M = \{a \in R \mid a = \bar a\} = R^0$

$\Lambda^m \neq \Lambda^M \Rightarrow R$ — некомм. тело характеристики 2 с инволюцией I рода

Пусть R — кольцо с обобщ. инв.

(R, Λ) — ф.к. над R

R^{2n} $\quad \Omega = \{1, \dots, n, -n, \dots, -1\}$

полуторалин. форма:

$$f(x,y) = \sum_{i>0} \bar{x}_i y_{-i}$$

(1) λ-эрмитова след. форма:

$$h(x,y) = f(x,y) + \overline{f(y,x)}\,\lambda$$

(2) Квадратичная форма:

$$q : R^{2n} \longrightarrow R/\Lambda \qquad q(x) = f(x,x) + \Lambda$$

$$q(x+y) - q(x) - q(y) = h(x,y) + \Lambda$$

Λ-квадратичный модуль: (R^{2n}, h, q)

Изометрия: $A \in GL(R^{2n})$

$$\begin{cases} h(A(x), A(y)) = h(x,y) \\ q(A(x)) = q(x) \end{cases}$$

(1) $h(A(e_i), A(e_j)) = h(e_i, e_j)$

(2) $q(A(e_i)) = q(e_i)$

$U(R^{2n})$ — группа изометрий

$U(2n, R, \Lambda)$ — гиперболическая унитарная группа

$a \in GL(2n, R)$

① $\Rightarrow a'_{ij} = \lambda^{-\frac{\varepsilon(i)+1}{2}} \hat{a}_{-j,-i} \lambda^{\frac{\varepsilon(j)+1}{2}}$ $\qquad \varepsilon(i)$ - знак i.

$$\sum_{l} a_{il} a'_{lj} = \delta_{ij}$$

$$\sum_{l>0} a_{il} a'_{lj} = S_{ij}(a) \qquad \lambda^{-\frac{\varepsilon(i)+1}{2}} \Lambda = \Lambda_i = \begin{cases} \Lambda, & i<0 \\ \lambda^{-1}\Lambda, & i>0 \end{cases}$$

② $\Rightarrow S_{i,-i}(a) \in \Lambda_i$ (если выполнено ①)

характеристические суммы

$$\to \begin{pmatrix} S_{1,-1}(a) \\ \vdots \\ S_{-1,1}(a) \end{pmatrix} \qquad S_{i,-i}(ab) \equiv S_{i,-i}(a) + \sum_{j} a_{ij} S_{j,-j}(b) a'_{-j,-i} \pmod{\Lambda_i^m}$$

при scaling унитарные группы не меняются,

все матрицы — сопряжение при пом. диаг. матрицы

$$U(2n, R, \beta\Lambda) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & \beta e \end{pmatrix} U(2n, R, \Lambda) \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & \beta^{-1} e \end{pmatrix}$$

$\exists\ \Lambda \neq 0, R \sim \lambda = -1$ (если R нормализовано)

$V = R^0 / \mathrm{Tr} R$ - правое пр-во над R

-левое пр-во над R: $\alpha(\beta + \mathrm{Tr}R) = \alpha\beta\bar{\alpha} + \mathrm{Tr}R$

Возьмем для $a \in U(2n, R, \Lambda)$

$\forall\ v_i(a) = S_{i,-i}(a) + \mathrm{Tr}R$ — присоединенный вектор

$$v(a) = \begin{pmatrix} v_1(a) \\ \vdots \\ v_{-1}(a) \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} a & v(a) \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \qquad v(ab) = v(a) + a v(b)$$

идеал $\Longrightarrow$ главная конгруэнц-подгруппа

$\Downarrow$ (Борович) $\Downarrow$

сеть $\longrightarrow$ сетевая подгруппа

форм. идеал $\longrightarrow$ главная конгруэнц-подгруппа (Бак)

$\downarrow$ $\downarrow$

$\mathfrak{a} \trianglelefteq R$, $\hat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$

$\left\langle \begin{matrix} \alpha - \hat{\alpha}\lambda, \\ \hat{\alpha}\beta\alpha \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} \alpha \in \mathfrak{a} \\ \beta \in \Lambda \end{matrix} \right\rangle \leq B \leq \mathfrak{a} \cap \Lambda$

(промеж. аддитивная подгруппа

<u>идеальный форменный параметр</u>, (relative form parameter)

если $\hat{\gamma} B \gamma \;\forall \gamma \in R$

$$U(\mathfrak{a}, B) = \{ a \in U(2n, R, \Lambda) \mid a \equiv e(\mathfrak{a}),\ S_{i,-i}(a) \in d^{-\frac{\varepsilon(i)+1}{2}} B \}$$

$\exists \sigma$ – сеть порядка $2n$ над R

$\hat{\sigma}_{i,j} = \sigma_{-j,-i}$

$+\ \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_{-1} \end{pmatrix}$ определим $\forall i$: $\Gamma_i^m = \{ \alpha - \lambda^{-\frac{\varepsilon(i)+1}{2}} \hat{\alpha} \lambda^{1-\varepsilon(i)} \}$

$\Gamma_i^M = \sigma_{i,-i} \cap \Lambda_i$

1. $\Gamma_i^m \leq \Gamma_i \leq \Gamma_i^M$
2. пусть $\lambda = \pm 1$: $\alpha \Gamma_j \hat{\alpha} \leq \Gamma_i \quad \forall \alpha \in \delta_{i,j} + \sigma_{i,j}$

$$U(\sigma, \Gamma) = \{ a \in U(2n, R, \Lambda) \mid a_{ij} - \delta_{ij} \in \sigma_{ij};\ S_{i,-i}(a) \in \Gamma_i \}$$

$\wedge\backslash$

$U(2n, R, \Lambda)$

$\Longrightarrow$ <u>форменная сеть</u> $\longrightarrow$ <u>форм. сетевая подгруппа</u>

$\exists \sigma$ – D-сеть

и $\sigma_{i,-i} = \sum_{k \neq \pm i} \sigma_{ik} \sigma_{k,-i} + \langle \Gamma_i \rangle$ } <u>точная сеть</u>

$\rightsquigarrow EU(\sigma, \Gamma) = \left\langle \begin{matrix} T_{ij}(\alpha) \mid i \neq \pm j, \alpha \in \sigma_{ij} \\ T_{i,-i}(\beta) \mid \beta \in \Gamma_i \end{matrix} \right\rangle$

$\Delta(\ldots)$ – диагон. матрицы

Т: (R, Λ) – фрм. над телом R, $|R^\circ| \geq 7$

если $\Lambda \neq 0$: $|R| = 8$ или $|R| \geq 13$

$\Rightarrow$ для всех: $H \in \mathrm{Lat}(\Delta, U(2n, R, \Lambda))$ $\exists!$ точная форм. сеть:

$\Delta \cdot EU(\sigma, \Gamma) \leq H \leq N_U(\sigma, \Gamma)$ — тот же нормализатор.