Вавилов
29.10.2007

Геометрия торов

аналогия с „геометрия корневых подгрупп"

α-длинный

$X_\alpha \le G(\Phi, K)$

$gX_\alpha g^{-1}$ — корневая подгруппа

пары корневых:

$(X, Y) \sim (X_\alpha, X_\beta)$ определяется (почти) угол $\widehat{(\alpha,\beta)}$

AA, №3 →
0. (A_l, ϖ_1)
1. (A_l, ϖ_2)
2. (D_l, ϖ_1)

[redacted]

3. (E_6, ϖ_1)
4. (E_7, ϖ_7)

угол:

0 — совпадают

$\pi/3$ $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ & 1 & * \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$\pi/2$ $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & * & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & * \\ & & & 1 \end{array}\right)$ — $2A_1$

$2\pi/3$ $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & 1 & * \\ & & 1 \end{pmatrix}$ — 2 орбиты

π $\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$

длинные торы:

$H_\alpha = \{h_\alpha(\varepsilon),\ \varepsilon \in K^*\}$

длинный корень — $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, \varepsilon, 1, \dots, 1, \varepsilon^{-1}, 1, \dots, 1)$

$H_\omega = \{h_\omega(\varepsilon),\ \varepsilon \in K^*\}$

микровес $\Phi^\vee$

A_l	ϖ_m, $1 \le m \le l$
B_l	ϖ_l
C_l	ϖ_1
D_l	$\varpi_1, \varpi_{l-1}, \varpi_l$
E_6	ϖ_1, ϖ_6
E_7	ϖ_7

Стейнберг: $G(\Phi, K) = \langle x_\alpha(\xi), \dots \rangle$

Шевалле: $G(\Phi, K) = \langle x_\alpha(\xi), \dots, h_\omega(\varepsilon), \dots \rangle$

$h_\omega(\varepsilon) e_\lambda = \varepsilon^{\langle \omega, \lambda \rangle} e_\lambda$

Для односвязной это дает $GL(n,K)$ вместо $SL(n,K)$

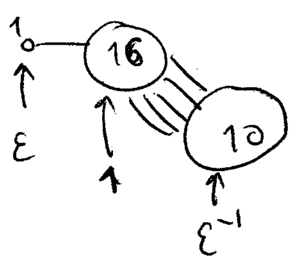
для присоединенной — у Стейнберга — не алг. группа (PSL), у Шевалле — алг. (PGL)

A_l: $\mathrm{diag}(\underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{m}, \underbrace{1, \dots, 1}_{l+1-m})$

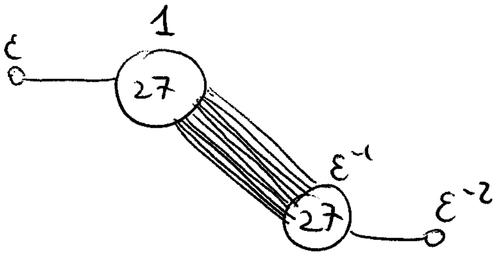
B_l, D_l: $\mathrm{diag}(\varepsilon, 1, \dots, 1, \varepsilon^{-1})$.

C_l: $\mathrm{diag}(\underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{l}, \underbrace{1, \dots, 1}_{l})$

$GSp(2l, K)$ $Sp(2l, K)$
$Cliff(n, K)$ $Spin(n, K)$

E_6: 

$\mathrm{diag}(\varepsilon, \underbrace{1, \dots, 1}_{16}, \underbrace{\varepsilon^{-1}, \dots, \varepsilon^{-1}}_{10})$



Результат

$X, y \sim H_\omega$, ω – микровес $\Phi^\vee$

в $G(\Phi,K)$

Орбиты на парах (X,y)

порождения пар $\langle X,y\rangle$ $\quad |K|\geq 7$

Теорема редукции

$X,y\sim H_\omega \rightsquigarrow \exists\ \Gamma\leq\Delta\leq\Phi,\ u\in U(\Phi,K)$:

$\langle X,y\rangle \leq uG(\Delta,K)u^{-1}$,

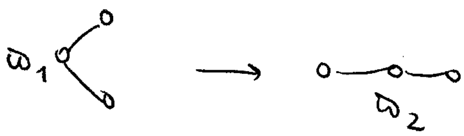
$\langle X,y\rangle \leq uG(\Gamma,K)u^{-1}$ $\quad$ т.е. $\langle X,y\rangle \leq uP(\Delta,\Gamma)u^{-1}$

(A_l,ϖ_m): $\Delta\leq A_{3m-1}$, $\Gamma\leq A_{2m-1}$

т.е. $\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} m \\ m \\ m \end{matrix} \\ \begin{matrix} m & m & m \end{matrix} & \end{array}$ $\quad m=1 \to \underset{GL_2}{\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}}$ или $\underset{GL_2}{\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

(D_l,ϖ_1): $\Gamma=\Delta=D_3\cong A_3$

$$\left(\begin{array}{c|c} \varepsilon\, 1_1 & \\ \hline & 1_1\, \varepsilon^{-1} \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} \varepsilon_\varepsilon & \\ \hline & 1_1 \end{array}\right)$$



$\boxed{\text{Теорема}}$ (A_ℓ, ϖ_1) ← Cohen–Cuypers–Sterk

$(\Phi, \omega) \longrightarrow$ (A_ℓ, ϖ_2), (D_ℓ, ϖ_1), $(E_6, \underset{\varpi_6}{\overset{\shortparallel}{\varpi_1}})$, (E_7, ϖ_7)

$m=1$ $m=2$ $m=3$

$\underline{|K| \geqslant 7}$

Тогда $x, y \sim H_\omega$ в $G(\Phi, K)$

либо $xy = yx$, $([x, y] = 1)$

либо в $\langle x, y \rangle$ найдется элемент

вида $x_{\alpha_1}(\xi\zeta_1)x_{\alpha_2}(\xi\zeta_2)\ldots x_{\alpha_m}(\xi\zeta_m)$, $\xi \in K^*$

$\alpha_i \perp \alpha_j$