5.10.2009

Н.А. Вавилов

1. Вавилов – Степанов

K-Theory, 2000

$G = GL(n, R)$, R – асс. кольцо с 1

$I \trianglelefteq R$

$$\rho_I : GL(n,R) \longrightarrow GL(n, R/I)$$

$\mathrm{Ker}(\rho_I) = G_I = GL(n, R, I)$ – главная конгруэнц-подгруппа

$\rho_I^{-1}(\mathrm{Cent}(GL(n, R/I))) = C_I = C(n, R, I)$ – полная конгруэнц-подгруппа

$E = E(n,R) = \langle t_{ij}(\xi),\ \xi \in R,\ 1 \leq i \neq j \leq n \rangle$

$E_I = E(n, R, I) = \langle t_{ij}(\xi),\ \xi \in I,\ 1 \leq i \neq j \leq n \rangle^{E(n,R)}$

$n \geq 3$

$$[E(n, R), I), GL(n,R)] = E(n, R, I)$$

$$[E(n,R), C(n, R, I)] = E(n, R, I)$$

1964 Басс – стаб. уровень

1976 Суслин } комм.

1981 Вав-Бурвич }

Mason – Stothers 1974 – 1981

$A, B \trianglelefteq R$

$E_I = [E_I, E]$

$$E_{AB+BA} \leq [E_A, E_B] \leq [E_A, G_B] \leq [G_A, G_B] \leq G_{AB+BA}$$

Теорема 1 R – ~~коммутативно~~ почти коммутативно, $n \geq 3$ – Hazrat-Zhang – точнее, квазиконечное

$$[E_A, G_B] = [E_A, E_B] \quad , 2008$$

Hazrat – Zhang

$F, H, L \trianglelefteq G$

$$[[F, H], L] \leq [[F, L], H][F, [H, L]]$$

Теорема 2 $n \geq 3$, R – кольцо, над которым выполняются абсолютные стандартные комм. формулы. Тогда

$$[E_A, G_B] \cancel{\leq} = [E_A, E_B]$$

$\square$ $$[[E_A, E], G_B] \leq \underbrace{[\underbrace{[E_A, G_B]}_{\leq G_{AB+BA}}, E]}_{\leq E_{AB+BA}} \cdot [E_A, \underbrace{[E, G_B]}_{\leq E_B}] \leq [E_A, E_B]$$ $\blacksquare$

Теорема 3 Если $n \geq 3$, $A + B = R$

Тогда $[E_A, E_B] = E_{AB+BA}$.

HSVZh – унитарные группы

– гр. Шевалле

2. Вавилов – Казакевич

$g \in GL(n,R) \qquad \xi \in R, \quad \alpha \in \Phi$

$g x_\alpha(\xi) g^{-1} \qquad [g, x_\alpha(\xi)]$

1. Bass, 1964
   раскладывать g — для к/м колец
2. Суслин, 1976
   раскладывать $g x_\alpha(\xi) g^{-1}$ — для произв. комм. колец
3. Квиллен – Суслин, 1976
   локализация: раскладывать ξ
   Васерштейн
   Бак
4. Степанов, 1987
   раскладывать α

$$P_1 = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ Для любого g $E(n,R)$ порождается трансвекциями x, лежащими в элементарных сопряженных с P_1 таких, что gxg^{-1} тоже лежит в элем. сопр. с P_1

$n \geq 3$

R-комм.

$$\begin{array}{cc} g_{11} & \\ \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & b & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} g_{11}^{-1} \\ \begin{pmatrix} \cdot & \vdots & \vdots \\ a & \vdots & \vdots \\ b & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$ba - ab = 0$

$D_3 \qquad SO(6,R)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix} g \cdot \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & b & -a & 0 \\ & 1 & & -c & 0 & a \\ & & 1 & 0 & c & -b \\ \hline & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{array}\right) \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \hline a & \\ b & \\ c & \end{array}\right)}_{g^{-1}} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ 0 & \\ 0 & \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 0 & \end{array}\right)$$

C_2 $Sp(4, \mathbb{R})$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & ab & -a^2 \\ & 1 & -b^2 & ab \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \cdot & \\ \cdot & \\ \hline a & \\ b & \end{array}\right)$$

$GL(n, \mathbb{R})$, $n \geq 4$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{4}{g} \quad \left(\begin{array}{cc} & \\ & \\ c & d \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} db & -ad \\ -cb & ac \\ & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a \\ b \end{array}\right) \quad \underset{4}{g^{-1}}$$

$n \geq 4$

$SO(8, \mathbb{R})$

$$\left(\begin{array}{c|cccc} & bc & -ac & & \\ & bd & -ad & & \\ & & & ad & -ac \\ & & & -bd & bc \\ \hline & & & & \\ & & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline a \\ b \\ c \\ d \end{array}\right)$$