19.10.2009

Ю. Крутиков

Существенная размерность и бирациональные инварианты алгебраических торов

I Алг. тор

$k=\bar{k}$ $\quad T\cong D_{d,k}\cong G^d_{m,\bar{k}}$ $\quad d=\dim T$

k-произвольное поле

<u>Опр.</u> Лин. алг. группа называется алгебраическим тором, если $T\otimes_k \bar{k}\cong G^d_{m,\bar{k}}$, $d=\dim T$

На самом деле тогда $T\otimes_k h\cong G^d_{m,h}$, h — минимальное поле разл.

$\Pi=Gal(h/k)$ — группа Галуа h/k

$\hat{T}=Hom(T\otimes_k h, G_{m,h})$ — группа рац. характеров тора

— своб. аб. группа ранга d, Π-модуль

<u>Опр.</u> Алг. тор ~~—~~ афф. групповая схема следующего типа:

$T=Spec(L[\hat{T}])^{\Pi}$

$\to$ тор T задается заданием ~~—~~ L и представлением

$$\varphi:\Pi\longrightarrow GL(d,\mathbb{Z})$$

$H^1(L/k, Pic\, X_L)$, бирац. инварианты

X — проективная модель T

— гладкое проективное k-многообразие, кот. содержит тор T в кач-ве открытого подмножества

$X_L=X\otimes_k L$

$$0\longrightarrow\hat{T}\longrightarrow\hat{S}\longrightarrow Pic\, X_L\longrightarrow 0,\ \text{где}$$

S — перестановочный Π-модуль,

$Pic\, X_L$ — вялый, т.е. $\hat{H}^{-1}(\pi, Pic\, X_L)=0\quad\forall\pi<\Pi$

каноническая резольвента

<u>Опр.</u> T_1, T_2 — Π-модули;

T_1 подобен T_2, если $\exists$ перестановочные Π-модули S_1, S_2 т.ч.

$T_1\oplus S_1\cong T_2\oplus S_2$

Пусть

$$0 \longrightarrow \hat{T} \longrightarrow \hat{S} \longrightarrow \hat{N} \longrightarrow 0$$, где $\hat{S}$ — перестановочн.
$\hat{N}$ — вялый

$\rightsquigarrow [\mathrm{Pic}\, X_L] = [\hat{N}] = \rho(T)$ — основной бирациональный инвариант

классы подобия

Как построить кан. резольвенту?

Алгебраический способ:

$$\hat{T}^\circ = \mathrm{Hom}(\hat{T}, \mathbb{Z})$$

$$0 \to \hat{N}^\circ \to \hat{S} \to \hat{T}^\circ \to 0$$

$$\rightsquigarrow H^0(\pi, \hat{S}) \to H^0(\pi, \hat{T}^\circ) \to H^1(\pi, \hat{N}^\circ) \to H^1(\pi, \hat{S}) = 0$$

$$\rightsquigarrow \hat{S}^\pi \to (\hat{T})^\pi \to H^1(\pi, \hat{N}^\circ) \to 0$$

$$\rightsquigarrow \hat{S}^\pi \to (\hat{T}^\circ)^\pi \text{ — сюрьекция } \forall \pi \subset \Pi$$

→ можно добиться, чтобы это была сюрьекция всегда

$$\to H^1(\pi, \hat{N}^\circ) = 0$$
$$\qquad \| $$
$$H^{-1}(\pi, \hat{N})$$

наряду с $\rho(T)$ изучают и другие инварианты:

$$H^1(\pi, \hat{N}), \quad \pi < \Pi.$$

$\underline{\text{III}}$. $H^1(\pi, \hat{N})$ для 4х-мерных алг. торов

$\dim T = 1, 2$ — Воскресенский: $\rho(T) = [0] \Rightarrow H^1(\pi, \hat{N}) = 0$

$\dim T = 3 \rightsquigarrow$ Б.Э. Кунявский провел бирац. классификацию,
С.Ю. Попов вычислил инварианты

→ есть три случая, когда $H^1(\pi, \hat{N}) = \mathbb{Z}_2 \quad \pi \leq \Pi$

$\dim T = 4$ → нужно искать конечные макс. подгруппы
$$GL(4, \mathbb{Z})$$

Список кон. макс. подгрупп — Рыжков

— ~~его~~ шесть кон. макс. неразложимых подгрупп
т.е. соотв. тор неразложим

— зад. квадр. формами C_4: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$

$$W \cong S_4 \times (\mathbb{Z}_2)^4$$

еще — S_4, P_4, T, B, F_4: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 - x_2x_4 - x_2x_3$

Для C_4 (на самом деле C_n) Воскр. доказал рациональность торов ~> трив

S_4: Кунявский, Воскресенский

— максим. тор. в $(A_n)_{ad}$ ~> рац ~> трив

P_4: Брюн: $p(T) \neq 0$, но иполог. $= 0$

— гр. автоморфизм

T: $|W(T)| = 2^4 \cdot 3^2$

B: $|W(B)| = 2^5 \cdot 3^3$ $\longrightarrow$ бир. инв. $= 0$

F_4: $|W(F_4)| = 2^7 \cdot 3^2$

— max тор. без аффекта в п/п группе типа F_4

~> 14 подгрупп — $\mathbb{Z}_2$ $\longrightarrow$ 4 --- 72

2 подгруппы — $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ $\longrightarrow$ порядок 8, 24

остальные — 0

F_4, рац. корней = рац. без аффекта $\iff$ его группа разл. $\Omega = W(F_4)$

IV $ed_k(\ldots)$ — сущ. размерность

$k = \bar{k}$ для алг. торов $ed_k(T) = 0$

k — произв. поле А. Меркурьев

$C(k)$ — категория расширений поля k

Set — кат. множеств

$\mathcal{F}(k)$ — категория ковар. функторов из $C(k)$ в Set

$F \in \mathcal{F}(k)$, $a \in F(K)$, K/k

Опр. $ed_k(a) \leq n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, если

1. $\exists E$, $k \subset E \subset K$, $trdeg(E:k) \leq n$
2. $a \in Im(F(E) \longrightarrow F(K))$

$$ed_k(F) = \sup_{\substack{a \in F(K) \\ K/k}} ed_k(a)$$

Пример ① забыв. функтор: $O(K) = K$

~> $ed_k(O) = 1$

$\alpha \in K$, $E = k(\alpha)$, $trdeg(E:k) = \left[\begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array}\right.$

② X — афф. схема над k кон. типа

$K \longmapsto X(K) = Hom(Spec K, X)$ — функтор точек

$ed_k X = \dim X$

G – алг. группа над k

$H^1(K,G) := H^1(\Gamma_K, G(K_s))$, где

K_s – сеп. замыкание K

$\Gamma_K = Gal(K_s/K)$

Опр. $ed_k(G) = ed_k(H^1(-,G))$

Пример ① S_n; $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$

$x \longmapsto \dots$ – м. избавиться от a_1

$ed(S_n)$ – мин. кол-во параметров, хар-щих многочлен

② GL_n; $H^1(K, GL_n) = 0 \rightsquigarrow ed_k(GL_n) = 0$

$R_{L/k}(G_m) \rightsquigarrow ed_k() = 0$

квази-разложимый тор

Теперь пусть T – произв. алг. тор над k

$$0 \longrightarrow \hat{T}_1 \longrightarrow \hat{S} \longrightarrow \hat{T} \longrightarrow 0 \qquad S \text{ – кв.р.}$$

$$\downarrow$$

$$1 \longrightarrow T \longrightarrow S \longrightarrow T_1 \longrightarrow 1$$

$$H^0(K,S) \longrightarrow H^0(K,T_1) \longrightarrow H^1(K,T) \longrightarrow \underset{1}{\underset{\shortparallel}{H^1(K,S)}}$$

$H^1(K,T) = T_1(K)/\varphi(S(K))$

если $F \to G$ – сюр. функтор, то $ed_k(G) \le ed_k(F)$ $\Rightarrow ed_k(T) \le \underset{rk\hat{S} - rk\hat{T}}{\underset{\shortparallel}{\dim T_1}}$

Нужно, чтобы $rk\, S$ был min.

$\dim T = 1$ — $0, 1$

$\dim T = 2$ — $0, 1, 2, 4$

$\dim T = 3$ — $0, 1, 3, 5, 9$

$\dim T = 4$ (max T) — $4, 6, 8, 14, 16, 20$