Непрерывность операций на полугруппах и их обобщениях

Филипова Елена Евгеньевна

2.11.2009

$X, n \geq 2$ — алгебра с n-арной операцией

$n = 2$ — полугруппа

$n > 2$

X наделяется топологией τ

Из непр-сти операции по каждому аргументу не следует непрерывность по совокупности аргументов

X — лок.комп., если оно отделимо и $\forall$ точки есть комп. окрестность

Т. Эллиса (1957)

Пусть X — группа, τ — лок.комп. топология

$\lambda_a(x) = ax$, $\rho_a(x) = xa$ — левый и правый сдвиги

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}(x, y) \longmapsto xy \\ x \longmapsto x^{-1}\end{array}\right\}$$ непрерывны в топологии τ

Пример 1 $(\mathbb{R}, +)$

$$B = \{[a, b) \mid -\infty < a < b < +\infty, a, b \in \mathbb{R}\}$$

$(\mathbb{R}, +, \tau)$ — прямая ~~Зоргенфрея~~ Зоргенфрея

$\rightarrow (x, y) \longmapsto x + y$ — непрерывна

$x \longmapsto -x$ — не непрерывна

но τ — не локально компактна

Пример 2 — полугруппа:

$X = G = Y = \mathbb{R}$

На G — операция $+$

$Z = X \times G \times Y$

$$(x_1, g_1, y_1) \cdot (x_2, g_2, y_2) = (x_1, g_1 + \varphi(y_1, x_2) + g_2, y_2),$$

где $\varphi(y, x) = \begin{cases} n, & \text{если } x = y = \frac{1}{n} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$\sim Z$ — полугруппа

На G — топология τ_G — естественная

на X, Y — τ_x, τ_y

$\left\{\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0+1}, \ldots\right\}$ — открыты те, кот. а) не сод. 0

б) если содержат 0, то и эту посл-сть.

τ_x, τ_y — локально компактны

$\leadsto (Z, \tau_Z)$ — лок. комп. пр-во

левый, правый сдвиги — непрерывны,

но операция умножения — не непрерывна

(X, τ) — топологическая полугруппа, если

$(x, y) \longmapsto xy$ непрерывна

(X, τ) — топ. группа, если $(x, y) \longmapsto xy$, $x \longmapsto x^{-1}$ — непрерывны

Алг. вложение — инъекция $X \hookrightarrow G$ ~~т.что~~

если $(X, \tau_X) \to (G, \tau_G)$ — гомеоморфизм, то это топологич. вложение

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Мухин) 1997-8

Пусть X — полугруппа с лок. комп. топ. τ т.ч.

λ_a, ρ_a — непрерывные, открытые $X \longrightarrow X$ $(\forall a \in X)$

$\varphi: X \longrightarrow G$ — алг. вложение

$\leadsto (X, \tau)$ топ. вкладывается в топ. полугруппу с лок. комп. топологией

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ Пусть $W \subset G$ — подмножество

W — система образующих G

Зададим на W топологию τ т.ч.

$\forall\, x_1, \dots, x_n,$
$y_1, \dots, y_m$
$s_1, \dots, s_k$
$t_1, \dots, t_l \in W$

$\forall V \in \tau \quad W \cap s^{-1} x V y \in \tau$

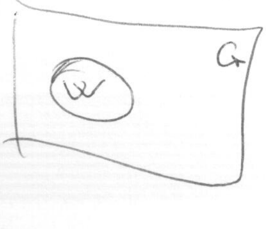
$\qquad\qquad W \cap x V y t^{-1} \in \tau$

где s, x, y, t — произведения ~~элем~~ соотв. последовательностей

Тогда на G $\exists!$ топология τ_G

т.ч. λ_a и ρ_a — непрерывны

$W \in \tau_G$ и сужение τ_G на W совпадает с τ.



Кроме того,

(i) для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$\forall x_1, \dots, x_n \in W \quad x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \in W$

$\Rightarrow \tau_G$ отделима $\Leftrightarrow \tau$ отделима

(ii) (G, τ_G)

умн. непрерывно по совокупности арг.

$\iff \exists x_1, \dots, x_n \in W$

$x_1 \circ \dots \circ x_n \in W$

и $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1 \cdots x_n$ непр. в т. $x_1, \dots, x_n$

(iii) Если τ – лок. комп., τ отделима,

то (G, τ_G) – топ. группа

$\boxed{\text{Теорема 2}}$

$\boxed{\text{Опр.}}$ X. <u>Отклонение</u> на X – это

$$f : X \times X \longrightarrow [0, +\infty]$$

т.ч. 1) $f(x,x) = 0$

2) $f(x,y) = f(y,x)$

3) $f(x,y) \leqslant f(x,z) + f(z,y)$ $\quad \forall x, y, z \in X$

$\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ порождает топ. на X

База – кон. пересечения

мн-в вида $\{x \in X \mid f_\alpha(x,y) < \varepsilon, \varepsilon > 0, \alpha \in A\}$

– окр-сть точки $y \in X$

$\boxed{\text{Т.2}}$ X – полугруппа

τ порожд. семейством отклонений $\{f\}$ т.ч.

$(*) \left(\forall f \in \{f\}\right) \left(\forall a \in X\right)$

$\exists \tilde{f} \in \{f\}, \exists V(a, f)$ – окр-сть

т.ч. $\forall b \in V, \forall x, y \quad f(bx, by) \leqslant \tilde{f}(x,y)$

Тогда равносильны условия

① $x \longrightarrow xa$ непрерывны $\forall a \in X$

② $(x,y) \longmapsto xy$ непрерывно

③ $\forall \alpha > 0 \ \forall f \in \{f\} \ \forall a, x \in X$

$\exists \beta > 0 \ \exists f_1, \dots, f_n \in \{f\}$

т.ч. $\forall s \in X \quad f_i(s,x) < \beta, \ i = 1, \dots, n \implies f(sa, xa) < \alpha$.

$\eta(x,y) = (x, xy)$ $\qquad \delta(x,y) = (xy, y)$

$X \times X \longrightarrow X \times X$

$\boxed{\text{т. 3}}$ (X, τ) — полугр. топ.

Равносильности

① $(x,y) \longmapsto xy$ — непр.

② η — непр.

③ δ — непр.

$\boxed{\text{т. 4}}$ G — группа, τ — топ. на G

Тогда (G,τ) — топ. группа $\Leftrightarrow$ η $[\delta]$ непрерывна

и образ $\eta(G \times U)$ $[\delta(U \times G)]$ $\forall U \in \tau$

открыто в $G \times G$.

X — полугр. X — <u>правая группа</u>, если

она проста справа, т.е. $X = aX$ $\forall a \in X$

и с левыми сокращениями

$\Leftrightarrow$ $ax = b$ имеет ед. решение $\forall a, b \in X$

$\boxed{\text{т. 5}}$ Пусть X — правая группа,

над. лок. комп. топ. τ т.ч.

λ_a, ρ_a — непрерывны, ρ_a — открыты

$\Rightarrow$ ① X — объединение открыто замкнутых топ. групп.

② $x \longmapsto xf$ $(x \in Xe,\ e, f$ — идемпотенты $X)$

— топ. изоморфизм Xe на Xf

③ X топ. изоморфна X_g (g — идемпотент) и E — подполугруппа идемпотентов

④ (X, τ) — топологическая полугруппа

X — <u>инверсная полугруппа</u>, если $\forall x \in X$

$\exists!\, a \in X$: $axa = a$ и $xax = x$

a — <u>инверсный</u> к x, $a = x^{-1}$

X — инверсна, τ — топ. на X

(X, τ) — <u>топ. инв. полугруппа</u>,

если $\left.\begin{array}{l}(x,y) \longmapsto xy \\ x \longmapsto x^{-1}\end{array}\right\}$ непрерывны

$\boxed{T6}$ $(X,\cdot)$ — инверсная

(X,τ) — топ. инв. полугруппа

$\Leftrightarrow$ $(x,y) \longmapsto xy^{-1}$ и $(x,y) \longmapsto x^{-1}y$ непрерывны

$\boxed{T.7}$ X — инв. полугруппа, τ — топ. комп.

(X,τ) — топ. полугруппа. разбивается на непересек. группы

H_e $(e \in E)$ — открыта в τ, H_e — max подгруппа, содерж. e.

$\Rightarrow$ (X,τ) — объед. откр. замкнутых и ~~топол~~

топ. инверсная полугруппа

$X_{\neq\emptyset}$, $n>0$, $()$ — n-арная операция

$X^n \longrightarrow X$

— <u>n — полугруппа</u>, если

$$((x_1,\dots,x_n)x_{n+1},\dots x_{2n-1}) = (x_1,\dots, x_n(x_{n+1}\dots x_{n+n})x_{n+n+1}, x_{2n-1})$$

<u>топ. n-полугруппа</u> — если она непр.

<u>n-группа</u>: каждое из $(xa_1^{n-1}) = a$ и $(a_1^{n-1}x) = a$

имеет ед. решение

$\forall a_1^{n-1} \in X^{n-1}$ это пос-сти эл-тов

$\boxed{T.8}$ $\langle X,()\rangle$ n-группа с топ. τ т.ч.

$\langle X,()\rangle$ — топологическая n-полугруппа

Тогда $\langle X,()\rangle$ — топ. n-группа

$$\Leftrightarrow \{(x, xa_1^{n-2}y) \mid x\in X, y\in U, U\in\tau\}$$

для нек. $a_1^{n-2} \in X^{n-2}$ открыто