28.12.2009

Е.П. Вдовин

Обобщения теоремы Силова

Группа = кон. группа

$\pi \subseteq P$ — мн-во простых чисел

π' — его дополнение

$n \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow \pi(n)$ — мн-во его простых делителей

n — <u>π-число</u>, если $\pi(n) \subseteq \pi$

$\pi(G) = \pi(|G|)$

G — π-группа, если $|G|$ — π-число

$H \leq G$ — <u>π-холлова</u>, если $\pi(H) = \pi$ и $(|H|, |G:H|) = 1$

$A, B, H \leq G, \quad B \trianglelefteq A \leq G$

$\rightarrow N_H(A/B) = N_H(A) \cap N_H(B)$ — нормализатор секции A/B.

Если $x \in N_H(A/B) \rightsquigarrow$

x индуцирует автоморфизм A/B:

$$Ba \longmapsto Bx^{-1}ax$$

$\rightarrow$ есть гомоморфизм

$$N_H(A/B) \longrightarrow Aut(A/B)$$

Образ — $Aut_H(A/B)$ — <u>группа индуцированных автоморфизмов на секции A/B подгруппой H</u>

<u>Т. Силова</u> G — группа, $|G| = p^\alpha m$, где p простое и $(p,m)=1$

$\Rightarrow$ (1) E $\quad \exists P \leq G : |P| = p^\alpha \rightsquigarrow Syl_p(G)$

(2) C $\quad \forall 2$ сопр.

(3) D $\quad \forall$ p-подгруппа G содержится в силовской

G обладает св-вом E_π, C_π, D_π, если E_π: G содержит π-холлову подгруппу

C_π.

D_π — $\forall$ π-подгруппа сод. в π-холловой

Трив. св-ва:

(1) $A \trianglelefteq H$, $H \in Hall_\pi(G) \rightsquigarrow HA/A \in Hall_\pi(G/A)$,

$H \cap A \in Hall_\pi(A)$

(2) (Чунихин) Пусть $\exists$ субнорм. ряд $\{e\} = G_0 < G_1 \ldots < G_n = G$

и $\forall$ секция либо π, либо π' $\rightsquigarrow G$ обладает D_π

$\boxed{\text{Thm}}$ G — разрешима $\Leftrightarrow D_\pi \ \forall \pi \subseteq P$.

Виландт, Единбург, 1958

Верно ли, что конечная группа обладает св-вом D_π

$\Leftrightarrow$ A и G/A обладают D_π для $\forall A \trianglelefteq G$

$\boxed{\text{Thm}}$ (Ревин, Вдовин, 2006)

$\exists A \trianglelefteq G \to G \in D_\pi \Leftrightarrow A, G/A \in D_\pi$

<u>Критерий существования</u>

Лемма о подъеме

$A \trianglelefteq G$, $\pi(G/A) \subseteq \pi$, $M \in Hall_\pi(A)$

$\Rightarrow \exists H \in Hall_\pi(G)$, удовлетворяющая $H \cap A = M$

$\Leftrightarrow M^A = M^G$

Пусть $\{e\} = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$

— комп. ряд конечной группы G, и явл-ся уплотнением некоторого главного

$(\forall i\ Aut_\pi(G_i/G_{i-1}) \in E_\pi) \Rightarrow G \in E_\pi$