20.02.2012
[redacted]

Витя Петров
+ И. А. Панин

# Изотропность групповых схем над локальными регулярными кольцами

$R$ — локальное регулярное кольцо, содержащее поле $k \subset R$
совершенное поле

$K = \mathrm{Frac}(R)$. Основной пример

$X/_k$ — гладкое многообразие, $x \in X$

$R = \mathcal{O}_{X,x}$, $K = k(X)$

Общий принцип: „редуктивные групповые схемы над $R$ = неразветвленные редуктивные группы над $K$"

$G$ — группа над $K$. При каких обстоятельствах она приходит из $\mathcal{G}$ над $R$?

Смотрим над $R_p$ — кольцо дискретного нормирования
$p$ простой высоты 1

Предположим, что над каждым $R_p$ $G$ приходит из некоторой $\mathcal{G}_p$.
Тогда она называется неразветвленной

$\exists A$ — центральная простая над $K$

$\exists A_p$ над $R_p$: $A_p \otimes_{R_p} K \cong A$

$\Longleftrightarrow \exists A_0$ над $R$ $A_0 \otimes_R K \simeq A$
алг. Адзумайи

$$R \hookrightarrow R_p \hookrightarrow K$$

$k[x,y]_{(0)}$, $k[x,y]_{(x)}$, $k(x,y)$, $k[x,y]_{(f)}$, $f(0,0)=0$

это почти то же, что

$$Br(R) = \bigcap_{p:\, ht\, p=1} Br(R_p)$$ внутри $Br(K)$

более общо: рассмотрим

$H^1(-, PGL_n)$

тогда есть вложение $H^1(R, PGL_n) \hookrightarrow H^1(K, PGL_n)$

и $H^1(R, PGL_n) = \bigcap_p H^1(R_p, PGL_n)$

## Гипотеза Гротендика

$G$ — редуктивная групповая схема над $R$

$\Rightarrow H^1(R, G) \longrightarrow H^1(K, G)$ имеет тривиальное ядро

- Доказана (Панин–Вавилов–Ставрова) если $G$ — простая изотропная.

## Гипотеза чистоты

$$\mathrm{Im}(H^1(R,G) \longrightarrow H^1(K,G)) = \bigcap_{p:\, ht\, p=1} \mathrm{Im}(H^1(R_p, G) \to H^1(K,G))$$

например, $\quad$ char $k \neq 2$

$G = O_n,\ O_n^+$ (Панин, Пименов)

$GO_n,\ GO_n^+$ (Панин)

$$q \rightsquigarrow O_n = \{g \in GL_n \mid q(gv) = q(v)\ \forall v \in R^n\}$$

$$GO_n = \{g \in GL_n \mid q(gv) = \underset{R^\times}{\lambda_g}\, q(v)\ \forall v \in R^n\}$$

<u>Теорема</u>: для таких $G$ выполнена гипотеза чистоты

<u>Теорема</u> (Панин) $\quad G, G'$ – редуктивные группы

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow G \longrightarrow G' \longrightarrow 1$$

где $Z$ содержится в центре $G$

и является группой мультипликативного типа

$(\cong \mathbb{G}_m \times \ldots \times \mathbb{G}_m \times \mu_n \times \ldots$ над $\bar{k})$

Пусть для $G'$ верна гипотеза чистоты.

Тогда для $G$ верна гипотеза чистоты

$$1 \to \mu_2 \to Spin_n \longrightarrow O_n^+ \longrightarrow 1$$

<u>Гипотеза</u> $\quad G$ – простая групповая схема над $R$

Тогда $G$ изотропна $\Leftrightarrow G_K$ изотропна,

причем индексы Титса совпадают

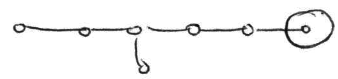
<u>Переформулировка</u>:

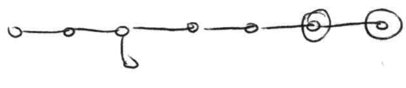
$Y$ – однородное проективное многообразие относительно $G$

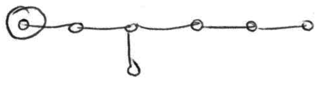
$$Y(R) \neq \emptyset \Leftrightarrow Y(k) \neq \emptyset$$

<u>Теорема</u> $\quad G$ – исключительная $(E_6, E_7, E_8, F_4, G_2)$

$Y$ – любое, кроме

$E_7$ 

$E_8$ 

$E_7$  если коцикл, соответствующий $Y$ не приходит из односвязной группы $E_7^{sc}$

$\rightsquigarrow$ Гипотеза верна

Панин, Шринхаран

т. Шпрингера над алгеброй кватернионов

(из этого нужно вывести гип. чистоты)

Док-во

Пусть $Y$ соответствует $\xi \in H^1(R, G_{split})$

① Редукция: м. считать, что $Y$ содержится в списке Титса

(максимальные многообразия, мин. изотропных)
(= мин. параболич.)

② $\xi_K$ приходит из $H^1(K, L)$
подгруппа Леви

$Y$ – проективно $\Rightarrow$ $\xi_{R_p}$ приходит из $H^1(R_p, L)$
Леви

Для таких $L$ всегда можно найти

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow L \longrightarrow L' \longrightarrow 1$$

т.ч. для $L'$ мы умеем доказывать гипотезу чистоты
(т.е. ортогональные и $PGL$)

$\rightsquigarrow$ $\xi$ поднимается до $\xi_0 \in H^1(R, L) \longrightarrow H^1(R, G_{split})$

Теперь в $H^1(R, G_{split})$ есть $\xi, \xi^0$, причем

$\xi_0$ задает изотропную группу

Теперь можно применить гипотезу Гротендика: $\xi_K = (\xi_0)_K$

$\rightsquigarrow \xi = \xi_0$ над $R$