Алгебры Титса и K-теория Моравы

Никита Семенов

11.07.2014

1 Алгебры Титса

Пусть F — поле, $\operatorname{char} F = 0$, G — простая алгебраическая группа над F. Как определить алгебры Титса?

1.1 Первая конструкция Титса

Если G расщепима и T — максимальный расщепимый тор, то неприводимые конечномерные представления G параметризуются своими старшими весами, то есть, элементами $\Lambda_{++} \cap T^*$.

Пусть теперь G нерасщепима: после скрутки представление может пропасть. Например, $G = \mathrm{SL}(A) = \{a \in A \mid Nrd(a) = 1\}$, где A — центральная простая алгебра степени 3. ω_1 соответствовало стандартному представлению $\mathrm{SL}_3 \to \mathrm{GL}_3$, которого нет у $\mathrm{SL}(A)$.

Пусть $\lambda \in \Lambda_{++} \cap T^*$, $G \to \mathrm{GL}(A_\lambda) = A_\lambda^*$ Центральная простая алгебра A называется алгеброй Титса для λ, если $G_{\overline{F}} \to \mathrm{GL}(A \otimes_F \overline{F}) = \mathrm{GL}_n(\overline{F})$ — представление со старшим весом λ. Для нашего примера с $\mathrm{SL}(A)$ алгебра A_λ совпадает с A.

Теорема Титса: для любого λ алгебра Титса существует и единственна, если λ инвариантна относительно действия группы Галуа.

Алгебра Клиффорда также является алгеброй Титса: нужно взять квадратичную форму q размерности $2n+1$ и группу $G = \mathrm{Spin}(q)$. Эта группа имеет тип B_n. Весу ω_n соответствует алгебра $A_n = C_0(q)$ (четная часть алгебры Клиффорда).

1.2 Вторая конструкция Титса

Пусть G — расщепимая группа [внутреннего типа]. рассмотрим $Z = Z(G)$ и ограничим представление $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_n$ на Z. Получим $\rho|_Z\colon Z \to Z(\mathrm{GL}_n) = \mathbb{G}_m$.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & Z \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d, "\rho"'] & G/Z \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{G}_m \arrow[r] & \mathrm{GL}_n \arrow[r] & \mathrm{PGL}_n \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Возьмем когомологии:

$$\begin{tikzcd}
H^1(F,G) \arrow[r] & H^1(F,G/Z) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\rho_*"'] & H^2(F,Z) \arrow[d, "\rho_*"'] \\
& H^1(F,\mathrm{PGL}_n) \arrow[r, "\partial"] & H^2(F,\mathbb{G}_m) = \mathrm{Br}(F)
\end{tikzcd}$$

Для коцикла $\xi \in H^1(F,G/Z)$ положим $[A_\rho] = \partial\rho_*(\xi)$. После скрутки коциклом ξ получим представление ${}_\xi G \to \mathrm{GL}(A_\rho)$.

1.3 Третья конструкция (Панин)

Пусть группа G расщепима; рассмотрим многообразие G/B и скрутим его коциклом $\xi \in H^1(F,G^{ad})$. Посмотрим на K-теорию: имеется отображение

$$f\colon K_0({}_\xi(G/B)) \to K_0({}_\xi(G/B)_{\overline{F}}).$$

Левая часть есть $\bigoplus_i K_0(A_i)$, правая часть равна $\bigoplus_i \mathbb{Z}$ (количество слагаемых равно порядку группы Вейля). Можно написать формулы для A_i. Если все алгебры Титса расщепимы, то отображение f тождественно.

1.4 Четвертая конструкция (Меркурьев)

Пусть $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, $X = {}_\xi(G/B)$, $\overline{X} = X_{\overline{F}}$. Тогда есть спектральная последовательность Хохшильда–Серра $H^p_{et}(\Gamma, H^q(\overline{X},\mathbb{G}_m)) \Rightarrow H^{p+q}_{et}(X,\mathbb{G}_m)$. Получаем точную последовательность

$$\begin{aligned}
0 &\to H^1_{et}(\Gamma, H^0_{et}(\overline{X},\mathbb{G}_m)) \to H^1_{et}(X,\mathbb{G}_m) \\
&\to H^0_{et}(\Gamma, H^1_{et}(\overline{X},\mathbb{G}_m)) \to H^2_{et}(\Gamma, H^0(\overline{X},\mathbb{G}_m)) \to \mathrm{Br}(F(X)).
\end{aligned}$$

При этом $H^0_{et}(\overline{X},\mathbb{G}_m) = F^*$; поэтому первый член равен 0 (теорема Гильберта 90). Кроме того, $H^1_{et}(X,\mathbb{G}_m) = \mathrm{Pic}(X)$, и потому

$$H^0_{et}(\Gamma, H^1_{et}(\overline{X},\mathbb{G}_m)) = \mathrm{Pic}(\overline{X})^\Gamma.$$

Наконец, $H^2_{et}(\Gamma, H^0(\overline{X},\mathbb{G}_m)) = \mathrm{Br}(F)$.

Мы получили точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})^{\Gamma} \to \mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(F(X)).$$

Наконец, $\mathrm{Pic}(\overline{X})^{\Gamma} = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\omega_n$. С учетом этого отождествления ω_i отправляется в $[A_{\omega_i}] \in \mathrm{Br}(F)$.

1.5 Пятая конструкция (Воеводский)

Пусть снова $X = {}_{\xi}(G/B)$ для $\xi \in H^1(F, G)$. С этим многообразием можно связать стандартную симплициальную схему $\mathcal{X} = \mathcal{X}_X$: $(\mathcal{X}_X)_i = X \times \cdots \times X$.

Пусть $n \geq 2$. Рассмотрим следующую точную последовательность:

$$0 \to H_M^{n,n-1}(\mathcal{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H_{et}^n(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n-1)) \to H_{et}^n(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Здесь первое отображение — это замена мотивных когомологий на этальные (что соответствует замене топологии с топологии Нисневича на топологию Зариского), а второе – расширение скаляров с F до $F(X)$. Подставим $n = 2$:

$$0 \to H_M^{2,1}(\mathcal{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(F(X)).$$

Совмещая эту точную последовательность с точной последовательностью, полученной в предыдущем пункте, получаем, что $H^{2,1} = \Lambda/T^*$.

Таким образом, по коциклу ξ мы умеем строить элемент из $H^2(F, \mathbb{G}_m)$. Можно попытаться вместо 2 написать 3: это инвариант Роста. Допустим, что $\xi \in H^1(F, G^{sc})$. У группы, скрученной таким коциклом, все алгебры Титса расщепимы. Тогда у ${}_{\xi}G$ есть инвариант в $H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. Можно доказать (это сделал Рост), что ядро этого инварианта — циклическая группа (и ее порядок известен).

2 K-теория Моравы

Мы определим $K(2), K(3), K(4), \ldots$, обобщающие $K_0 = K(1)$. Аналогичные обобщения $K_1, K_2, K_3, \ldots$ пока не придуманы.

Начнем с алгебраических кобордизмов Левина–Мореля (для этого нужно $\mathrm{char}\, F = 0$). Это функтор $\Omega\colon \mathrm{Sm}_F \to \mathrm{GrRings}$, удовлетворяющий аксиомам типа

- *Гомотопическая эквивалентность*: $\Omega(X \times \mathbb{A}^n) \cong \Omega(X)$;
- $\ldots$;

- *Точная последовательность локализации*: если $Y \subseteq X$ — замкнутое, то
$$\Omega(Y) \to \Omega(X) \to \Omega(X \setminus Y) \to 0;$$

кроме того, заданы *обобщенные классы Черна*: имеются отображения $c_i^\Omega \colon K_0(X) \to \Omega^i(X)$, удовлетворяющие некоторым свойствам (формула Уитни,…). Первый класс Черна c_1^Ω довольно интересен. Пусть L, M — линейные расслоения над $X \in \mathrm{Sm}_F$. Тогда $c_1^\Omega(L \otimes M) = c_1^\Omega(L) + c_1^\Omega(M) + \dots$; правая часть равна $FGL_\Omega(c_1^\Omega(L), c_1^\Omega(M))$, где FGL_Ω — некоторый формальный групповой закон. Напомним, что формальный групповой закон — это ряд $F \in \mathbb{R}[[x, y]]$ такой, что

1. $F(x, 0) = F(0, x) = x$;
2. $F(x, y) = F(y, x)$;
3. $F(x, F(y, z)) = F(F(x, y), z)$.

Примеры: $x+y$, $x+y-xy$, $\frac{x+y}{1-xy}$. Универсальный формальный групповой закон — это такой, специализацией которого можно получить любой формальный групповой закон. Если взять в качестве FGL_Ω универсальный формальный групповой закон, получим как раз алгебраические кобордизмы Левина–Мореля.

Можно взять $\Omega \otimes_{\mathbb{L}} FGL$, где FGL — любой формальный групповой закон, а $\mathbb{L} = \Omega(pt) = R$ — кольцо Лазара.

Можно проверить, что $CH = \Omega \otimes_{\mathbb{L}} (\mathbb{Z}, x+y)$, $K_0 = \Omega \otimes_{\mathbb{L}} (\mathbb{Z}, x+y-xy)$.

Для построения K-теории Моравы мы возьмем формальный групповой закон Любина–Тейта. Такой закон зависит от двух параметров: простого числа p и высоты n. По этому закону строится функтор $K(n)$ (по определению положим $K(0) = CH \otimes \mathbb{Q}$). Он, конечно, зависит и от выбора p, однако p в обозначении не фигурирует.

Теорема 1. *1. G — группа внутреннего типа тогда и только тогда, когда $K(0)(G/B)$ расщепляется.*

2. (Панин) Допустим, что G — группа внутреннего типа. Все алгебры Титса G расщепимы тогда и только тогда, когда $K_0(G/B)$ расщепляется.

3. Допустим, что G — группа внутреннего типа, и все алгебры Титса G тривиальны. Тогда p-компонента инварианта Роста равна 0 тогда и только тогда, когда $K(2)(G/B)$ расщепляется.

4. *Пусть* G — *группа типа* E_8, $p = 2$. *Группа* G *расщепляется расширением базового поля нечетной степени тогда и только тогда, когда* $K(m)(G/B)$ *расщепляется для какого-то (или для любого)* $m \geq 4$.

5. *Пусть* q — *квадратичная форма четной размерности,* $Q = \{q = 0\}$ — *соответствующая проективная квадрика. Тогда* $q \in I^m$ *тогда и только тогда, когда* $K(n)(Q)$ *расщепляется для любого* n: $0 \leq n < m - 1$.