Теорема Крулля–Шмидта, теорема Маранды и мотивы Чжоу

Никита Семенов

06.04.2015

Содержание

1 Введение

Рассмотрим категорию $\mathcal{M}_F = \mathcal{M}_{F,\Lambda}$ мотивов Чжоу над полем F с коэффициентами в кольце Λ (классически $\Lambda = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_{(p)}, \mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/m$). Мы обычно считаем, что $\Lambda = \mathbb{Z}$.

Теорема Крулля–Шмидта: пусть $M \in \mathcal{M}_F$ и есть разложение $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n = N_1 \oplus \cdots \oplus N_m$, причем все M_i, N_j. Говорят, что выполнена теорема Крулля–Шмидта, если отсюда следует, что $m = n$ и существует перестановка $\sigma \in S_m$ такая, что $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ для всех i.

Поднятие разложений: пусть $M \in \mathcal{M}_{F,\mathbb{Z}}$. Рассмотрим функтор $\mathcal{M}_{F,\mathbb{Z}} \to \mathcal{M}_{F,\mathbb{Z}/p}$. Предположим, что M по модулю p (то есть, образ M при этом функторе) имеется разложение $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$. Следует ли из этого, что $M = \widetilde{M_1} \oplus \cdots \oplus \widetilde{M}_n$, где $\widetilde{M}_i \pmod p \cong M_i$?

Относительная теорема Крулля–Шмидта появится позже. Это модификация теоремы Крулля–Шмидта, которая нужна, когда теорема Крулля–Шмидта буквально неверна.

Известны результаты про квадрики (Вишик, Haution) для $p = 2$. В общем случае ответ отрицателен, контрпримеры принадлежат Черноусову и Меркурьеву. Например, в качестве M можно взять мотив произведения двух многообразий Севери–Брауэра: $M = \mathcal{M}(\mathrm{SB}(A) \times \mathrm{SB}(B))$, где A, B — центральные простые алгебры степени $p \geq 5$, и они порождают одну подгруппу в группе Брауэра $\mathrm{Br}(F)$. Многообразие $\mathrm{SB}(A) \times \mathrm{SB}(B)$ является однородным проективным многообразием относительно группы $\mathrm{SL}_1(A) \times \mathrm{SL}_1(B)$. Оказывается, M раскладывается в прямую сумму вида

$$\bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{M}(\mathrm{SB}(A))(i),$$

и можно рассмотреть то же разложение для B.

Еще один пример (Calmes, Petrov, Semenov, Zainoulline): Пусть A — алгебра с делением степени 5. Тогда $\mathrm{SB}_2(A)$ — однородное многообразие с действием группы $\mathrm{SL}_1(A)$; его размерность равна 6. Здесь $\Lambda = \mathbb{Z}$.

Есть и положительные результаты (Черноусов, Меркурьев). Здесь $\Lambda = \mathbb{Z}_p$, M — мотив однородного проективного многообразия относительно полупростой группы. В этом случае теорема Крулля–Шмидта верна. Для $\Lambda = \mathbb{Z}_{(p)}$ пусть M — мотив полного однородного многообразия относительно простой группы. Тогда ответ положителен. Если же слово «простой» заменить на «полупростой», то есть контрпример.

Относительная теорема Крулля–Шмидта получится, если в заключении теоремы Крулля–Шмидта потребовать лишь, чтобы M_i и $N_{\sigma(i)}$ были изоморфны над алгебраическим замыканием поля F.

2 Мотивы Чжоу

Объекты нашей категории — пары (X, π), где X — гладкие проективные многообразия над F, а $\pi \in \mathrm{CH}(X \times X) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ такой, что $\pi \circ \pi = \pi$. Морфизмы из (X, π) в (Y, ρ) определяются так: если X неприводимо, то это $\rho \circ (\mathrm{CH}_{\dim X}(X \times Y) \otimes \Lambda) \circ \pi$.

3 Целочисленные разложения

Определение 3.1. Пусть $M \in \mathcal{M}_{F,\mathbb{Z}}$. Расширение E/F называется **полем расщепления** мотива M, если M_E изоморфен конечной прямой сумме мотивов Тэйта, то есть, мотивов вида $\mathbb{Z}(i)$. Пусть теперь Λ — коммутативное кольцо, и есть разложение вида

$$M_E = \widetilde{M}_1 \oplus \cdots \oplus \widetilde{M}_k \tag{1}$$

(возможно, $\widetilde{M}_i$ разложимы). Такое разложение называется **Λ-допустимым**, если существует F-разложение с Λ-коэффициентами вида $M \otimes \Lambda = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k$ такое, что $(M_i)_E = \widetilde{M} \otimes \Lambda$.

Теорема 3.2 (Жихович–Семенов)**.** Пусть M — прямое слагаемое мотива проективного однородного многообразия X внутреннего типа, и E/F — поле расщепления многообразия X, где расширение E/F конечно. Следующие условия равносильны:

1. разложение (1) $\mathbb{Z}$-допустимо;
2. разложение (1) $\mathbb{Z}/p$-допустимо для любого простого p, делящего степень расширения $[E : F]$.

Заметим, что из (1) следует (2) очевидным образом. В обратную сторону: сначала нужно перейти от $\mathbb{Z}/p$ к $\mathbb{Z}/p^\alpha$. Это всегда возможно; ключевой аргумент — лемма Фиттинга. Дальше хочется собрать разные p и перейти от $\mathbb{Z}/p^\alpha$ к $\mathbb{Z}/m$, где $m = [E : F]$. Это китайская теорема об остатках. Следующий шаг: перейти от $\mathbb{Z}/m$ к $\mathbb{Z}$. Здесь существенно используется, что тип внутренний. Кроме того, важно, что $\mathrm{SK}_1(\mathbb{Z}/m)$ тривиально. Здесь подвох: все эти поднятие производятся над E, а хочется над F. Последний шаг: перейти от E к F. Здесь используется нильпотентность Роста.

Следствие 3.3. Пусть X — проективное однородное многообразие внутреннего типа такое, что существует поле расщепления E/F степени p^l. Тогда относительная теорема Крулля–Шмидта верна для любого прямого слагаемого мотива $M(X)$.

Следствие 3.4. Мотив M из теоремы неразложим с целыми коэффициентами, если не существует никакого разбиения, которое было бы $\mathbb{Z}/p$-допустимым для любого p.

Следствие 3.5. Контрпример к относительной теореме Крулля–Шмидта. Пусть $m = 6$, A — нерасщепимая алгебра Альберта (27-мерная исключительная коммутативная простая йорданова алгебра), которая не расщепляется ни расширением степени 2, ни расширением степени 3 (а расширением степени 6 любая алгебра Альберта расщепляется). Равносильно: инвариант Роста является 6-кручением, но не 2- и не 3-кручением.

Рассмотрим соответствующую группу типа F_4. Возьмем многообразие параболических подгрупп «типа P_1» (где 1 — длинный корень). Мы хотим найти два существенно разных целочисленных разложения мотива X.

Следствие 3.6. Пусть $\leq k \leq \deg A$. Мотив обобщенного многообразия Севери–Брауэра $\mathrm{SB}_k(A)$ неразложим над $\mathbb{Z}$ только в следующих случаях:

1. $k = 1$, A — алгебра с делением;
2. $k = 2$, A — алгебра с делением, $\deg A$ — степень двойки.

4 Внешний тип

Предложение 4.1. Разложение (1) $\mathbb{Z}_p$-допустимо тогда и только тогда, когда оно $\mathbb{Z}/p$-допустимо. Для $\mathbb{Z}_p$ следствие слева направо верно, а обратно неверно.

Теорема 4.2 (Маранды)**.** Пусть Λ — кольцо дискретного нормирования (будем считать, что $\Lambda = \mathbb{Z}_{(p)}$), G — конечная группа, $R = \Lambda G$, M, N — две R-решетки. Если $M/p^k M \cong N/p^k N$ для некоторого $k \geq k+1$, где p^k точно делит $|G|$, то $M \cong N$.

Следствие 4.3. Пусть M_1, M_2 — два прямых слагаемых мотивов двух проективных однородных многообразий. Если $M_1 \otimes \mathbb{Z}/p \cong M_2 \otimes \mathbb{Z}/p$, то $M_1 \cong M_2$.

Следствие 4.4 (частный случай теоремы Conlon)**.** Пусть H — конечная группа, N_1, N_2 — обратимые $\mathbb{Z}_{(p)}[H]$-модули (обратимый = прямое слагаемое перестановочного). Если $N_1 \otimes \mathbb{Z}/p \cong N_2 \otimes \mathbb{Z}/p$, то $N_1 \cong N_2$.