# Локально-глобальные принципы и склейка для квадратов Нисневича

Анастасия Ставрова

11.04.2016

## 1 Топологии Гротендика

Напомним, что [пред]топология Гротендика состоит в задании набора покрытий каждого объекта. Многие топологии Гротендика задаются следующим образом: рассмотрим наименьшую топологию Гротендика такую, что все квадраты

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ U \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

с какими-нибудь определенными свойствами являются покрытиями.

Например, топология Зариского порождается декартовыми квадратами вида

$$\begin{tikzcd} U \times_X V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d, hook] \\ U \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

где $U, V$ — открытые подсхемы в $X$ такие, что $U \cup V = X$.

Топология Нисневича задается так:

$$\begin{tikzcd} U \times_X V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d, "\sigma"] \\ U \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

где $\sigma$ — этальный морфизм, и если мы обозначим $Z = (X \setminus U)_{red}$, то $\sigma|_{V \times_X Z}$ устанавливает изоморфизм между $V \times_X Z$ и $Z$.

Оказывается, для аффинной схемы $X = \operatorname{Spec} A$ эти определения можно упростить: в топологии Зариского можно рассмотреть покрытия вида

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(A_{fg}) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec}(A_f) \arrow[d] \\ \operatorname{Spec}(A_g) \arrow[r] & \operatorname{Spec}(A) \end{tikzcd}$$

Для топологии Нисневича достаточно квадратов вида

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(B_h) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec}(B) \arrow[d, "\sigma"] \\ \operatorname{Spec}(A_f) \arrow[r] & \operatorname{Spec}(A) \end{tikzcd}$$

где $B$ — этальная алгебра над $A$, $\sigma^*(f) = h$ (здесь $\sigma^* \colon A \to B$ — отображение, соответствующее $\sigma$) и $\sigma^*$ устанавливает изоморфизм между $A/f$ и $B/h$.

**Теорема 1.1** (Asok–Hoyois–Wendt, 2015)**.** Если $S$ квази-компактна, квази-отделимая схема, $\mathrm{Sm}/S^{aff}$ — категория конечно представимых аффинных схем над $S$. Тогда квадраты указанных видов порождают топологии Зариского и Нисневича.

# 2 Основные теоремы

Вспомним статьи Quillen, Projective modules over polynomial rings (1976), и Суслин, О структуре специальной линейной группы над кольцами многочленов (1977).

**Теорема 2.1** (Suslin, Теорема 3.1; «локально-глобальный принцип»)**.** Пусть $r \geq 3$, $A$ — коммутативное кольцо, $a \in \mathrm{GL}_r(A[X], XA[X])$. Тогда $a \in E_r(A[X])$ равносильно тому, что для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца $A$ выполнено $a_\mathfrak{m} = \lambda_\mathfrak{m}(a) \in E_r(A_\mathfrak{m}[X])$ (здесь $\lambda_\mathfrak{m}\colon \mathrm{GL}_r(A[X]) \to \mathrm{GL}_r(A_\mathfrak{m}[X])$ — гомоморфизм локализации).

Обозначим $K_1^{\mathrm{GL}_r}(A) = \mathrm{GL}_r(A)/E_r(A)$. Тогда $K_1^{\mathrm{GL}_r}$ задает функтор из категории колец в категории групп. Обозначим через $NK_1^{\mathrm{GL}_r}(A)$ ядро отображения $K_1^{\mathrm{GL}_r}(A[X]) \to K_1^{\mathrm{GL}_r}(A)$, $X \mapsto 0$. Тогда теорема 2.1 в точности утверждает, что $NK_1$ — отделимый предпучок, то есть, что $NK_1^{\mathrm{GL}_r}(A)$ вкладывается в $\prod_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(A)} NK_1^{\mathrm{GL}_r}(A_\mathfrak{m})$. Равносильно, $NK_1^{\mathrm{GL}_r}(A)$ вкладывается в $\prod_i NK_1^{\mathrm{GL}_r}(U_i)$ для любого открытого покрытия $\mathrm{Spec}\, A = \bigcup U_i$

**Лемма 2.2** (Suslin, Лемма 3.5)**.** Пусть $r \geq 3$, $s \in \mathrm{GL}_r(A[X], X)$, $f, g \in A$ таковы, что $fA + gA = A$. Если $a_f \in E_r(A_f[X])$, $a_g \in E_r(A_g[X])$, то $a \in E_r(A[X])$.

Эта лемма, конечно, на самом деле про квадрат

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(A_{fg}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}(A_f) \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(A_g) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(A) \end{tikzcd}$$

Применим к нему функтор $NK_1^{\mathrm{GL}_r}$:

$$\begin{tikzcd} NK_1^{\mathrm{GL}_r}(A) \arrow[r] \arrow[d] & NK_1^{\mathrm{GL}_r}(A_f) \arrow[d] \\ NK_1^{\mathrm{GL}_r}(A_g) \arrow[r] & NK_1^{\mathrm{GL}_r}(A_{fg}) \end{tikzcd}$$

Лемма утверждает, что если $\overline{a} \in NK_1^{\mathrm{GL}_r}(A)$ переходит в 1 и в $NK_1^{\mathrm{GL}_r}(A_f)$, и в $NK_1^{\mathrm{GL}_r}(A_g)$, то он равен 1.

Аналоги теоремы 2.1 доказаны для групп Шевалле в статье Abe, Whitehead groups. . . , а для изотропных редуктивных групп изотропного ранга хотя бы 2 — в статье Petrov, Stavrova, Elementary subgroups. . . .

**Лемма 2.3** (Suslin, Лемма 3.7)**.** Пусть $A$, $f$, $g$, $r$ — как в Лемме 2.2. Тогда для любого $a \in E_r(A_{fg})$ существуют $b \in E_r(A_f)$ и $c \in E_r(A_g)$ такие, что $a = bc$.

**Лемма 2.4** (Dilation principle)**.** Пусть $r \geq 3$, $f \in A$ — не нильпотент. Рассмотрим гомоморфизм локализации $\lambda_f\colon \mathrm{GL}_r(A[X]) \to \mathrm{GL}_r(A_f[X])$. Тогда существуют $a(X) \in E_r(A_f[X], X)$, $b(X) \in E_r(A[X], X)$ и $k \geq 0$ такие, что $\lambda_f(b(X)) = a(f^k X)$

Для групп Шевалле это доказано у Абе (Lemma 1.11), для изотропных редуктивных групп — в статье Stavrova, Homotopy invariance of non-stable $K_1$-functors, Lemma 2.4.

Что говорит лемма 2.3?

**Следствие 2.5.** Рассмотрим квадрат

$$\begin{array}{ccc} K_1^{\mathrm{GL}_r}(A) & \longrightarrow & K_1^{\mathrm{GL}_r}(A_f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_1^{\mathrm{GL}_r}(A_g) & \longrightarrow & K_1^{\mathrm{GL}_r}(A_{fg}) \end{array}$$

Если $\overline{x} \in K_1^{\mathrm{GL}_r}(A_f)$ и $\overline{y} \in K_1^{\mathrm{GL}_r}(A_g)$ таковы, что их образы в $K_1^{\mathrm{GL}_r}(A_{fg})$ совпадают, то они приходят из одного элемента $\overline{z} \in K_1^{\mathrm{GL}_r}(A)$.

*Доказательство.* Действительно, переходя к прообразам $x$ и $y$ в $\mathrm{GL}_r$, получаем, что $\lambda_g(x)\lambda_f(y)^{-1} \in E_r(A_{fg})$ Это равно $\lambda_f(c)\lambda_g(b)$, где $b \in E_r(A_f)$, $c \in E_r(A_g)$. Обозначим $y' = by$, $x' = cx$, тогда $\overline{y'} = \overline{y}$ и $\overline{x'} = \overline{x}$. При этом $\lambda_f(by) = \lambda_g(cx)$. Заметим, что $by \in \mathrm{GL}_r(A_g)$, $cx \in \mathrm{GL}_r(A_f)$. Но $\mathrm{GL}_r$ — пучок в топологии Зариского, и поэтому эти элементы можно склеить и найти $z \in \mathrm{GL}_r(A)$ такой, что $\lambda_g(z) = by$ и $\lambda_f(z) = cx$ $\square$

Можно переформулировать следствие 2.5 так:

$$K_1^{\mathrm{GL}_r}(A) \to K_1^{\mathrm{GL}_r}(A_f) \times K_1^{\mathrm{GL}_r}(A_g) \to K_1^{\mathrm{GL}_r}(A_{fg})$$

является точной последовательностью (второе отображение переводит пару $(g_1, g_2)$ в $g_1 g_2^{-1}$).

Квиллен в упомянутой выше статье предложил доказательство проблемы Серра: любой конечно порожденный проективнй модуль $P$ над кольцом $k[x_1, \dots, x_n]$ свободен (здесь $k$ — поле).

**Теорема 2.6** (Quillen, Theorem 1)**.** Пусть $P$ — конечно порожденный проективный модуль над кольцом $A[X]$, где $A$ — коммутативное кольцо. Пусть модуль $P|_{X=0}$ свободен, и пусть для любого максимального идеала $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$ модуль $P_{\mathfrak{m}} = P \otimes_{A[X]} A_{\mathfrak{m}}[X]$ свободен как $A_{\mathfrak{m}}[X]$-модуль.

*Идея доказательства.* Докажем, что $\{f \in A \mid P_f \text{ свободен}\}$ — идеал в $A$. Заметим, что $A_{f+g} = A_{f+g}f + A_{f+g}g$, и рассмотрим квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(A_{fg(f+g)}) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(A_{f(f+g)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(A_{g(f+g)}) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(A_{f+g}) \end{array}$$

Нужно доказать, что если $P_{f(f+g)}$ и $P_{g(f+g)}$ свободны, то и $P_{f+g}$ свободен. Для этого достаточно доказать, что $\mathrm{GL}_r(B_{fg}) = \mathrm{GL}_r(B_f) \cdot \mathrm{GL}_r(B_g)$ (здесь мы обозначили $B = A_{f+g}$). По условию $P \otimes_{A[X]} B_{fg} \cong (B_{fg})^r$. На этом действует $\mathrm{GL}_r(B_{fg})$. Подправим базисы так, чтобы образы над $B$ совпадали — после этого их можно поднять на $B_{fg}$. $\square$

Обратите внимание, что в теореме 2.6 нет никакого ограничения на $r$ (то есть, $r \geq 1$).

Приведенное рассуждение является аналогом Леммы 2.3, в которой использовано разложение $E_r(A_{fg}) = E_r(A_f) \cdot E_r(A_g)$.

**Теорема 2.7** (Moser, Rational triviale Torseure und die Serre-Grothendicksche Vermutung, 2008, Theorem 3.5.1)**.** Пусть $A$ — коммутативное кольцо, $G$ — конечно представимая групповая схема над $A$, снабженная замкнутым вложением $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_r$. Пусть $E$ — главное $G$-расслоение над $\mathbb{A}^1_A$ такое, что $E|_0$ — тривиальное $G$-расслоение, и пусть существует открытое покрытие $\mathrm{Spec}\, A = \bigcup_i U_i$ в топологии Зариского такое, что $E|_{U_i}$ тривиально для всех $i$. Тогда $E$ тривиально.

**Лемма 2.8** (Moser, Lemma 3.5.5)**.** В условиях 2.7 для любых $f, g \in A$ таких, что $Af + Ag = A$ выполнено $G(A_{fg}[X], X) = G(A_f[X], X) \cdot G(A_g[X], X)$.

Доказательство Леммы 2.8 опирается на следующую лемму.

**Лемма 2.9** (Moser, Lemma 3.5.4)**.** В условиях 2.7 пусть $a(X) \in \mathrm{GL}_r(A[X])$ такой, что $a(0) \in G(A) \leq \mathrm{GL}_r(A)$, и пусть $a_f \in G(A_f[X])$. Тогда существует $n \geq 0$ такое, что $a(f^n X) \in G(A[X])$.

# 3 Случай квадратов Нисневича

**Лемма 3.1** (Ton Vorst, The general linear group of polynomial rings over regular rings, Lemma 2.4)**.** Пусть $r \geq 3$, $A \subseteq B$ — кольца, $h \in A$ — не нильпотент, тогда

1. если $Bh + A = B$ (то есть, $A/h \twoheadrightarrow B/h$), то $E_r(B_h) = E_r(A_h) \cdot E_r(B)$.
2. если $A/h \cong B/h$, $h$ не делитель 0 в $B$, то последовательность

$$K_1(A) \to K_1(B) \times K_1(A_h) \to K_1(B_h)$$

точна.

**Следствие 3.2.** То же самое верно для квадратов, порождающих топологию Нисневича.

**Задача 3.3.** Порождают ли такие квадраты, как в лемме 3.1, топологию Нисневича, или что-то другое?

**Следствие 3.4.**
1. $K_1^{\mathrm{GL}_r}(R[X]) = K_1^{\mathrm{GL}_r}(R)$, где $R$ — существенно гладкая $K$-алгебра, где $K$ — поле (то есть, локализация гладкой $K$-алгебры).
2. Пусть $R$ — локальная существенно гладкая $K$-алгебра, и $F = \mathrm{Frac}(R)$. Тогда $K_1^{\mathrm{GL}_r}(R) \hookrightarrow K_1^{\mathrm{GL}_r}(F)$.

*Доказательство.* Следует из Леммы 3.1 и равенства $K_1^{\mathrm{GL}_r}(K[X_1, \ldots, X_n]) = K_1^{\mathrm{GL}_r}(K)$. □

**Лемма 3.5** (Panin–Stavrova, On the Grothendieck–Serre conjecture concerning principal $G$-bundles over semi-local Dedekind domains (2016), Lemma 3.2)**.** Пусть $G$ — редуктивная группа над коммутативным кольцом $A$ изотропного ранга хотя бы 1, $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_r$ — замкнутое вложение, $r \geq 3$. Пусть $P \subseteq G$ — параболическая подгруппа, $A \subseteq B$, $h \in A$ — не нильпотент такой, что $A/h \twoheadrightarrow B/h$. Тогда $E_P(B_h) \subseteq G(B) \cdot E_P(A_h)$.

**Задача 3.6.** Пусть $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_r$ — конечно представимая групповая схема. Тогда

$$G(B_h[X], X) = G(B[X], X) \cdot G(A_h[X], X)$$

(аналог Леммы Мозера).

**Задача 3.7.** Доказать аналог Теоремы Мозера для $G$ — редуктивной группы изотропного ранга хотя бы 1 и топологии Нисневича вместо Зариского. То есть, взять $E|_{\mathbb{A}^1_A}$ — $G$-расслоение, и покрытие $\operatorname{Spec} A = \bigcup U_i$ в топологии Нисневича.

*Доказательство леммы 3.5.* Для упрощения предположим, что изотропный ранг $G$ равен 1, и относительная система корней $\Phi_P$ имеет вид $\Phi_P = \{-n\alpha, \ldots, -\alpha, \alpha, \ldots, n\alpha\}$. Тогда $E_P(R) = \langle X_\alpha(R \otimes_A V_\alpha) \mid \alpha \in \Phi_P \rangle$ для любой $A$-алгебры $R$. Пусть $x \in E_P(B_h)$, то есть, $x = \prod X_\beta(c_\beta)$, где $c_\alpha \in B_h \otimes_A V_\beta$, $\beta \in \Phi_P$. Нужно доказать, что $x \in G(B) \cdot E_P(A_h)$. Достаточно доказать, что $E_P(A_h) \cdot X_\beta(c) \subseteq G(B) E_P(A_h)$ для любого $\beta \in \Phi_P$ и для любого $c \in B_h \otimes V_\beta$.

Можно считать, что $\beta \in \Phi_P^+$. Используем индукцию по убыванию высоты корня $\beta$. Фиксируем $z \in E_P(A_h) \leq E_r(A_h)$ (в $\mathrm{GL}_r$ можно выбрать базис, в котором это так). Рассматриваем $E_r(A_h)$ как подгруппу в $E_r(B_h)$. Теперь используем dilation principle для $\mathrm{GL}_r$ (Лемма 2.4): существует достаточно большое натурально $N$ такое, что для любого $u \in B \otimes V_\beta$ выполнено

$$zX_\beta(h^N Xu)z^{-1} \in E_r(B[X], X).$$

С другой стороны, $X_\beta(h^N Xu) \in E_P(B[X])$. По лемме Мозера для достаточно большого $N'$ выполнено $zX_\beta(h^{N'} Xu)z^{-1} \in G(B[X])$.

Вернемся к $X_\beta(c)$. Найдется достаточно большое $M$ такое, что $h^M \cdot c \in B \otimes_A V_\beta$. Запишем $B = B \cdot h^{N'+M} + A$ (это верно, так как $B = Bh + A$). Тогда $c = h^{-M}a + h^{N'}b$, где $a \in V_\beta = A \otimes_A V_\beta$, $b \in V_\beta \otimes_A B$. Тогда

$$X_\beta(c) = X_\beta(h^{N'}b)X_\beta(ah^{-M}) \cdot \prod_{i \geq 2} X_{i\beta}(v_i).$$

К последнему множителю мы применяем предположение индукции. Получаем, что по модулю этого множителя $zX_\beta(c)z^{-1}$ раскладывается в произведение $zX_\beta(h^{N'}b) \in G(B)$ и $zX_\beta(h^{-M}a)z^{-1} \in E_P(A_h)$. $\square$