Подгруппы группы Шевалле, содержащие группу точек максимальной групповой подсхемы

Алексей Степанов

10.05.2016

1

Нас часто интересуют такие вопросы: описать промежуточные подгруппы в

$$EO_{2n}(R) \leq \cdots \leq \mathrm{GL}_{2n}(R)$$

или, скажем,

$$E_n(R) \otimes E_m(R) \leq \cdots \leq \mathrm{GL}_{mn}(R).$$

Рассмотрим вообще

$$D(R) \leq \cdots \leq G(R),$$

где G — группа Шевалле, а D — групповой подфунктор в G.

Теорема 1.1. Если D и G удовлетворяют условиям (1)–(8), то для любого кольца R и для любой подгруппы H такой, что $D(R) \leq H \leq G(R)$, существует единственный идеал $I \trianglelefteq R$ такой, что

$$D(R) \cdot E(R, I) \leq H \leq N(R, I),$$

где $N(R, I) = N_{G(R)}(D(R) \cdot E(R, I)$.

Пусть Φ — система корней группы Шевалле G. Обозначим $N(R) = N(R, 0)$. Пусть A — аффинная алгебра G, $g \in A$ — общий элемент. Перечислим упомянутые в теореме условия.

1. Функтор D сохраняет сюръективность и коммутирует с прямыми пределами.
2. Для любых $r \in R$, $\alpha \in \Phi$ выполнено $\langle x_\alpha(r), D(R)\rangle = D(R) \cdot E(R, rR)$.
3. Для любого $I \trianglelefteq R$ выполнено $[D(R), D(R)E(R, I)] = D(R)E(R, I)$.
4. N — замкнутая подсхема в G.
5. Если $h \in G(R)$ таков, что $D(R)^h \leq N(R)$ следует, что $h \in N(R)$.
6. Если F — поле, то теорема верна: если $D(F) \leq H \leq G(F)$, то либо $H \leq N(F)$, либо $E(F) \leq H$.
7. В подгруппе $G(A)$, порожденной $D(A)$ и g, содержится $x_\alpha(a) \notin D(A)$ для некоторых $\alpha \in \Phi$, $a \in A$, и для любого поля F существует $z \in E(F)$ такой, что $z(a) \neq 0$.
8. Если $h \in G(R, \operatorname{Rad} R) \setminus N(R)$, то $\langle h, D(R)\rangle$ содержит $x_\alpha(r) \notin D(R)$.

Пусть H — подгруппа в $G(R)$, содержащая $D(R)$. Обозначим

$$I_\alpha = \{r \in R \mid x_\alpha(r) \in H \text{ для некоторого } \alpha\}.$$

Потом мы показываем, что $I = I_\alpha$ не зависит от α и является идеалом в R. Положим $\overline{R} = R/I$ и обозначим через $\rho_I \colon R \to \overline{R}$ каноническую проекцию. Пусть $\overline{H} = \rho_I(H)$. Тогда $D(\overline{R}) \leq \overline{H}$ по условию (1).

Предположим, что $x_\alpha(\overline{r}) \in \overline{H}$. Тогда $D(\overline{R})E(\overline{R}, \overline{r}\overline{R}) \leq \overline{H}$, и потому $D(R)E(R, rR) \leq H \cdot G(R, I)$, а отсюда следует (можно доказать!), что $D(R) \cdot E(R, rR) \leq H \cdot E(R, I) \leq H$.

Поэтому $x_\alpha(r) \in H$, и, стало быть, $r \in I$, то есть, $\overline{r} = 0$.

Теперь можно считать, что $I = 0$, $R = \overline{R}$, $H = \overline{H}$: если $x_\alpha(r) \in H$, то $r = 0$. Возьмем $a \in A$ из условия (7), и $h \in H \leq G(R)$. Это означает, что $h \colon A \to R$. Рассмотрим $h(a) \in R$. Тогда $x_\alpha(h(a)) = h(x_\alpha(a)) \in h(\langle D(A), g\rangle) \leq H$, и потому $h(a) = 0$.

Пусть S — подсхема в G, определенная уравнением $a = 0$. Мы получили, что $H \leq S(R)$. Пусть $\mathfrak{m} \trianglelefteq R$ — максимальный идеал, $F = R/\mathfrak{m}$. Мы знаем, что $E(F) \not\subseteq S(F)$ (по условию (7)), но $\rho_\mathfrak{m}(H) \leq S(F)$, откуда (по условию (6)) следует, что $\rho_\mathfrak{m} \leq N(F)$.

Таким образом, $\rho_\mathfrak{m} \leq N(R/\mathfrak{m})$ для любого максимального идеала $\mathfrak{m} \trianglelefteq R$. По условию (4) из этого следует, что $\rho_{\operatorname{Rad} R}(H) \leq N(R/\operatorname{Rad} R)$. Тогда $D(R/\operatorname{Rad} R)^{\rho_{\operatorname{Rad} R}(H)} \leq D(R/\operatorname{Rad} R)$. Значит, $D(R)^H \leq D(R) \cdot G(R, \operatorname{Rad} R)$. Возьмем $uv \in D(R)^H$, где $u \in D(R)$, $v \in G(R, \operatorname{Rad} R)$. Тогда $v \in D(R)^H \cap G(R, \operatorname{Rad} R)$, и $\langle v, D(R)\rangle \leq D(R)^H$. По условию (8) теперь $v \in N(R)$ (иначе бы H содержала нетривиальный корневой унипотент). Мы получили, что для любого $h \in H$ выполнено $D(R)^h \in N(R)$, откуда $h \in N(R)$.