Бесконечные каскады Костанта и центрально порождённые идеалы

Михаил Игнатьев

16.05.2016

1

Мы работаем над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}_-$. Пусть $U(\mathfrak{n})$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{n}$. Классификация неприводимых представлений $\mathfrak{n}$ (или $U(\mathfrak{n})$) — безумно сложная задача (разумеется, все они бесконечномерны). Нас интересуют аннуляторы неприводимых представлений, то есть, примитивные идеалы. Обозначим множество таких идеалов через $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{n})$.

Пусть $f \in \mathfrak{n}^*$, $\mathfrak{p}$ — ее поляризация (подалгебра в $\mathfrak{n}$, которая одновременно является максимальным f-изотропным подпространством: $f([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \mathfrak{p}$). За счет этого условия у нас есть представление W:

$$f|_{\mathfrak{p}} \colon \mathfrak{p} \to \mathbb{C}.$$

Пусть $V = \operatorname{Ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{n}} f|_{\mathfrak{p}} = U(\mathfrak{n}) \otimes W$. Оказывается, это представление неприводимо. Поэтому его аннулятор $J = \operatorname{Ann} V \in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{n})$.

Обозначим $N = \exp(\mathfrak{n})$. Заметим, что N действует на $\mathfrak{n}$, и потому действует на $\mathfrak{n}^*$ (это называется *коприсоединенным действием*).

Теорема 1.1 (J. Dixmier)**.**

1. $J \in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{n})$;
2. J не зависит от выбора поляризации $\mathfrak{p}$.
3. так получаются все примитивные идеалы: если $I \in \operatorname{Prim}(\mathfrak{n})$, то существует $f \in \mathfrak{n}^*$ такой, что $I = J(f)$;
4. $J(f) = J(f')$ тогда и только тогда, когда $N \cdot f = N \cdot f'$ (орбиты коприсоединенного действия совпадают).

Таким образом, отображение Диксмье $D \colon \mathfrak{n}^*/N \to \operatorname{Prim} U(\mathfrak{n})$ является изоморфизмом.

Замечание 1.2. Это версия метода орбит А. А. Кириллова для алгебр Ли (1962): пусть $\operatorname{Irr}(N)$ — множество всех классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы N. Тогда существует биекция между пространством коприсоединенных орбит и $\operatorname{Irr}(N)$. А именно, для любой поляризации $\mathfrak{p}$ формы $f \in \mathfrak{n}^*$ рассмотрим $P = \exp(\mathfrak{p}) \subseteq N$. Тогда $Z \colon g \mapsto f(\log g)$ — одномерное представление, и можно рассмотреть $S = \operatorname{Ind}_P^N(Z)$ — представление N. Снова S зависит только от f, и $S(f) = S(f')$ тогда и только тогда, когда $N \cdot f = N \cdot f'$.

В первой же работе Кириллова были описаны **регулярные орбиты** (орбиты максимальной размерности).

Пример 1.3. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Например, $n = 6$. Давайте рассмотрим линейную форму, которая принимает ненулевые значения только на $e_{1,6}$, $e_{2,5}$, $e_{3,4}$ (на последнем даже, может, нулевое). Тогда размерность ее орбиты максимальна, то есть, эта орбита регулярна. Все регулярные орбиты так устроены, и разным формам отвечают разные орбиты. Так для всех n; если n нечетно, то на последнем месте тоже должно быть ненулевое значение.

Каким идеалам соответствуют регулярные орбиты?

Теорема 1.4 (Duflo)**.** Каждый минимальный примитивный идеал в $U(\mathfrak{g})$ центрально порожден.

В нашем случае, конечно, такой теоремы быть не может. Пусть $J \trianglelefteq U(\mathfrak{n})$. Следующие условия эквивалентны:

1. $J \in \mathrm{Prim}(\mathfrak{n})$;
2. J максимален;
3. $U(\mathfrak{n})/J \cong \mathcal{A}_r$, где $\mathcal{A}_r$ — *алгебра Вейля.*

Более того, можно сказать чему равно это r. Пусть $J = J(f)$. Тогда $2r = \dim N \cdot f$.

Правда ли, что регулярные орбиты соответствуют центрально порожденным идеалам? Ответ: для A_l правда, а в общем случае известно, что каждый центрально порожденный идеал происходит из регулярной орбиты, но не наоборот. Мы опишем, как устроены f, для которых получается центрально порожденный идеал.

Пусть $Z(\mathfrak{n})$ — центр $U(\mathfrak{n})$.

Теорема 1.5 (J. Dixmier, A, Joseph, B. Kostant, ...)**.** $Z(\mathfrak{n})$ — алгебра многочленов.

Пример 1.6. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ (снова будем считать даже, что $n = 6$). Обозначим $\mathsf{A}^+_{n-1} = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\}$ и рассмотрим вектор $\Delta_1 = e_{\varepsilon_1-\varepsilon_6} = e_{1,6}$. Он централен (даже как элемент $\mathcal{U}(\mathfrak{n})$). Пусть теперь $\Delta_2 = \begin{vmatrix} e_{\varepsilon_1-\varepsilon_5} & e_{\varepsilon_1-\varepsilon_6} \\ e_{\varepsilon_2-\varepsilon_5} & e_{\varepsilon_2-\varepsilon_6} \end{vmatrix}$, и аналогично Δ_3. Оказывается, $Z(\mathfrak{n})$ порожден элементами $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

Определение 1.7. Пусть Φ — система корней $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$, Φ^+ — множество положительных корней. Рассмотрим максимальный корень $\beta_1 \in \Phi^+$, и рассмотрим систему корней $\{\alpha \in \Phi \mid (\alpha, \beta_1) = 0\}^+$. У нее тоже есть максимальный корень β_2, и так далее. Получаем **каскад Костанта** $K = \{\beta_1, \beta_2, \dots\}$. Нетрудно понять, что он состоит из строго ортогональных корней.

В примере 1.6 получаем $\beta_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_6$, $\beta_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_5$, $\beta_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4$.

В случае C_n каскад Костанта выглядит так: $2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \dots, 2\varepsilon_n$. Для D_n он такой: $\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2, \varepsilon_2 \pm \varepsilon_4, \dots$.

Теорему 1.5 теперь можно уточнить: $Z(\mathfrak{n})$ — алгебра многочленов от $|K|$ переменных.

Следующую конструкцию предложили R. Lipsman, J. Wolf, A. H. Панов. Пусть V — какое-нибудь фундаментальное представление G (или $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$). Пусть v — старший вектор в V, l — старший вектор в V^*. Возьмем $x \in \mathfrak{n}_-$ и рассмотрим ряд

$$l(\exp tx) \cdot v = t^k S_0(x) + t^{k+1} S_1(x) + \dots.$$

$S_0(x)$ — полиномиальная функция на $\mathfrak{n}_-$, то есть, элемент $S(\mathfrak{n}_-^*) \cong S(\mathfrak{n})$ (с помощью формы Киллинга). Получившийся многочлен, оказывается, либо неприводим, либо квадрат неприводимого; если квадрат — извлечем из него корень. Отправим его отображением симметризации в $\Delta(S_0) \in U(\mathfrak{n})$. (например, $e_1 e_2^2 \mapsto (e_1 e_2^2 + e_2 e_1 e_2 + e_2^2 e_1)/3$).

Эти элементы вида $\Delta(S_0)$ и являются образующими центра, если проварьировать V по всем фундаментальным представлениям. На самом деле, даже не по всем, а только по некоторым.

Пример 1.8. Пусть $V_1 = V$ — естественное представление, V_2 — его внешний квадрат, $V_3 = \Lambda^3 V$, и так далее. Получаем как раз элементы в правом верхнем углу для векторного представления, его внешнего квадрата, и так далее — то есть, описанные выше миноры.

Определение 1.9. $f \in \mathfrak{n}^*$ называется **формой Костанта**, если

1. $f(e_\alpha) = 0$, если $\alpha \notin K$;
2. $f(e_\beta) \neq 0$, если $\beta \notin K$ (и существуют $\gamma, \gamma' \in \Phi^+$ такие, что $\gamma + \gamma' = \beta$).

Орбиты формы Костанта всегда регулярны (но не всякая регулярная орбита такова).

Теорема 1.10 (I. Pentov, M. Ignatyev)**.** В случаях A_n и C_n идеал $J(f)$ центрально порожден тогда и только тогда, когда f — форма Костанта.

Пусть $\mathfrak{g}_1 \subseteq \mathfrak{g}_2 \subseteq \dots$ — цепочка простых алгебр. Рассмотрим их предел $\mathfrak{g} = \varinjlim \mathfrak{g}_n$. У нее есть картановская подалгебра $\mathfrak{h}$, система корней Φ. Например, $A_\infty = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$. Но теперь уже не все борелевские подалгебры сопряжены (например, уже верхнетреугольная не сопряжена с нижнетреугольной). Однако, существует биекция между борелевскими подалгерами $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ и линейными порядками на $\mathbb{Z}_{>0}$: пусть $\mathfrak{n} = \langle e_\alpha \mid \alpha \in \Phi^+ \rangle_{\mathbb{C}}$, $\Phi^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i < j\}$. Теперь возникают те же вопросы: как описать $Z(\mathfrak{n})$? Как описать $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{n})$?

Пусть i_1 — минимальный элемент, j_1 — максимальный элемент в $\mathbb{Z}_{>0}$. Рассмотрим $\beta_1 = \varepsilon_{i_1} - \varepsilon_{j_1}$. Пусть далее i_2 — минимальный, j_2 — максимальный элемент в $\mathbb{Z}_{>0} \setminus \{i_1, j_1\}$, и $\beta_2 = \varepsilon_{i_2} - \varepsilon_{j_2}$, и так далее. Рассмотрим «бесконечный» каскад Костанта $K = \{\beta_1, \beta_2, \dots\}$. Заметим, что он может вообще оказать пустым (если в нашем порядке нет ни минимального, ни максимального элемента). Например, для порядка $1 < 2 < 3 < \dots$ получаем $K = \varnothing$, а для $1 < 3 < 5 < \dots < 6 < 4 < 2$ получаем $K = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \dots\}$.

Теорема 1.11.
1. Пусть $\Phi = A_\infty, B_\infty, C_\infty$ или D_∞. Тогда $Z(\mathfrak{n})$ — алгебра многочленов от $|K|$ переменных.
2. Для $\mathfrak{n}$ «специального вида» (когда каскад Костанта достаточно большой) идеал $J \in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{n})$ центрально порожден тогда и только тогда, когда $J = J(f)$ для формы Костанта f.

Строятся образующие примерно так же: это тоже какие-то миноры.