# Алгебраическая геометрия*

Александр Лузгарев

13 декабря 2016 г.

## Содержание



*Конспект лекций спецкурса осени 2016 года; предварительная версия.

Курс основан на лекциях Ravi Vakil, *The Rising Sea: Foundations of Algebraic Geometry*, версия 29 декабря 2015 года, см. `http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/index.html`. Автор выражает свою признательность всем слушателям курса, в особенности Роману Лубкову, который указал на большое количество опечаток в тексте.

С тяжелым сердцем я должен
признаться, что все мои усилия
пропали даром и даже, к моему
ужасу, дали обратный результат.

Михаил Булгаков, *Театральный роман.*

# 1 Введение

## 1.1 Что изучает алгебраическая геометрия?

Одной из традиционных задач алгебры обычно называют решение систем полиномиальных уравнений. В первом приближении алгебраическая геометрия занимается именно этим. Базовое понятие *аффинной схемы*, изучением которого займемся вскоре и мы, можно описать так: *аффинная схема — это система полиномиальных уравнений*. После этого *схема* определяется как нечто склеенное из аффинных схем.

Посмотрим, например, на уравнение

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Множество его решений в поле вещественных чисел принято изображать окружностью на плоскости. Можно, впрочем, задаваться вопросом о решениях этого уравнения в поле рациональных чисел (это так называемые *пифагоровы тройки*, см. упражнение 4.8.9), или в целых числах (таких решений не очень много), или вообще над любым [ассоциативным, коммутативным] кольцом [с единицей]. Понятие схемы помогает, среди прочего, отвлечься от выбора конкретного кольца, в котором ищутся решения, и изучать само уравнение — или, говоря иначе, изучать его решения *над всеми кольцами одновременно*. Давайте обозначим через $X$ схему, заданную этим уравнением:

$$X = \{x^2 + y^2 = 1\}.$$

Мы, разумеется, пока не знаем точного определения схемы, так что эта запись совершенно условна. Однако для любого кольца $R$ мы можем определить $R$-*точки* схемы $X$ как множество решений нашего уравнения над $R$. Слово «кольцо» в нашем курсе всегда будет обозначать ассоциативное коммутативное кольцо с единицей.

Итак, для любого кольца $R$ положим

$$X(R) = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Выше мы отметили, что хотим изучать решения нашего уравнения над всеми кольцами сразу, то есть, помнить про $R$-точки схемы $X$ для всех колец $R$ одновременно. Оказывается, множества $X(R)$ для различных $R$ еще и связаны между собой. А именно, если $\varphi\colon R \to S$ — гомоморфизм колец (разумеется, сохраняющий единицу), то естественным образом возникает отображение множеств

$$X(\varphi)\colon X(R) \to X(S).$$

А именно, решению $(x, y) \in X(R)$ мы сопоставим решение $(\varphi(x), \varphi(y)) \in X(S)$. Необходимо проверить, что это действительно решение нашего уравнения над $S$. Это несложно: применяя $\varphi$ к равенству $x^2 + y^2 = 1$, получаем $\varphi(x)^2 + \varphi(y)^2 = 1$. Мы сопоставили, таким образом, каждому гомоморфизму колец отображение между соответствующими множествами решений; нетрудно проверить, что это сопоставление согласовано с композицией гомоморфизмов. Говоря категорным языком, мы получили *функтор* из категории колец в категорию множеств. Этот функтор несет себе всю информацию о решениях уравнения $x^2 + y^2 = 1$ над всеми кольцами, и потому несет себе всю информацию о схеме $X$. На самом деле, при желании можно *отождествить* схему $X$ с указанным функтором (см. раздел 4.4).

### 1.2 Аффинная схема как представимый функтор

Сейчас мы опишем множество $X(R)$ (которое мы будем называть множеством $R$-точек схемы $X$) несколько другим способом. Для этого нам нужно вспомнить *универсальное свойство кольца многочленов*: если $R$ — любое кольцо, то задание гомоморфизма из $\mathbb{Z}[x]$ в $R$ равносильно заданию образа элемента $x$ в $R$. Это можно записать следующим образом:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rings}}(\mathbb{Z}[x], R) \cong \{x \in R\}.$$

Несложно понять, что есть аналог этого свойства и для кольца многочленов от двух переменных. А именно, задание гомоморфизма из $\mathbb{Z}[x, y]$ в $R$ равносильно заданию образов элементов $x$ и $y$ в $R$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rings}}(\mathbb{Z}[x, y], R) \cong \{(x, y) \in R^2\}.$$

Разумеется, пафос этого соответствия в том, что оно *функториально*. Действительно, обе части этого соответствия являются функторами по $R$: слева стоит представимый функтор $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rings}}(\mathbb{Z}[x], -)$, а справа — функтор взятия декартова квадрата $(-)^2$.

Теперь мы хотим слегка подправить полученное соответствие, чтобы в правой части оказалось множество не *всех* пар $(x, y)$ из $R^2$, а только тех, которые удовлетворяют равенству $x^2 + y^2 = 1$. Для этого полезен еще один факт из элементарной коммутативной алгебры: если $A$ — кольцо, а $I \trianglelefteq A$ — его идеал, то гомоморфизм колец $\varphi\colon A \to B$ пропускается через фактор-кольцо $A/I$ тогда и только тогда, когда $\varphi(I) = 0$, то есть, когда $I \leqslant \ker(\varphi)$. В применении к нашей ситуации (возьмем $\mathbb{Z}[x, y]$ в качестве $A$ и идеал, порожденный многочленом $x^2+y^2-1$ в качестве $I$) это означает, что имеется взаимно однозначное соответствие между множеством

$$X(R) = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

и множеством

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rings}}(\mathbb{Z}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1), R).$$

Разумеется, снова важно, что эта биекция *функториальна*: на самом деле речь идет о естественном изоморфизме между функтором $X$ (который был построен выше) и представимым функтором $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rings}}(\mathbb{Z}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1), -)$.

Из этого можно сделать важное заключение: раз мы решили, что изучение схемы $X$ равносильно изучению функтора точек $X(-)$, а этот функтор представим, то, стало быть, вся информация о схеме $X$ содержится в одном кольце $\mathbb{Z}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$. Такое кольцо, несущее информацию о схеме $X$, часто обозначается через $\mathbb{Z}[X]$ Чуть ниже мы построим по произвольному кольцу некоторый геометрический объект (называемый *спектром* этого кольца), и получим, таким образом, первое строгое определение [аффинной] схемы.

Заметим также, что в нашем исходном уравнении $x^2 + y^2 = 1$ все коэффициенты — целые числа, что позволяет нам говорить о его решениях над произвольным кольцом. Можно зафиксировать некоторое поле $k$ (классические геометры брали $k = \mathbb{R}$ или $k = \mathbb{C}$) и рассматривать уравнения с коэффициентами в этом поле; тогда разумно говорить о решениях этих уравнений над любой $k$-алгеброй $R$. Все вышесказанное переносится на этот случай посредством замены $\mathbb{Z}$ на $k$: то есть, нужно говорить о гомоморфизмах $k$-алгебр, рассматривать $k$-алгебры вида $k[X] = k[x, y]/I$, и так далее.

Давайте на секунду представим, что $k = \mathbb{C}$, и мы ищем решения не где попало, а в самом поле $\mathbb{C}$. Как и выше,

$$X(\mathbb{C}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[X], \mathbb{C}).$$

Рассмотрим какую-нибудь точку $p \in X(\mathbb{C})$. Соответствующий ей гомоморфизм $\mathbb{C}$-алгебр обозначим через $\varphi_p \colon \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}$. Теорема о гомоморфизме говорит нам, что $\mathrm{im}(\varphi_p) \cong \mathbb{C}[X]/\ker(\varphi_p)$. Образ $\mathrm{im}(\varphi_p)$, разумеется, является $\mathbb{C}$-подалгеброй в $\mathbb{C}$, содержащей единицу, и потому совпадает с $\mathbb{C}$. Нетрудно понять, что тогда гомоморфизм $\varphi_p$ однозначно определяется своим ядром $\ker(\varphi_p)$. Это ядро всегда является максимальным идеалом. Обратно, если $I$ — некоторый максимальный идеал, то фактор-кольцо $\mathbb{C}[X]/I$ является полем, причем расширением поля $\mathbb{C}$. Если теперь наложить на $X$ некоторые разумные условия (достаточно того, чтобы уравнения, задающие $X$, содержали конечное число неизвестных — и, таким образом, чтобы $\mathbb{C}[X]$ было конечно порожденной $\mathbb{C}$-алгеброй), то это расширение должно быть алгебраическим, откуда следует, что оно изоморфно $\mathbb{C}$, и потому идеал $I$ задает элемент множества $X(\mathbb{C})$.

Это рассуждение (конечно, опирающееся на сильные факты из коммутативной алгебры) показывает, что точки $X(\mathbb{C})$ взаимно однозначно соответствуют максимальным идеалам в $\mathbb{C}[X]$. Более того, оказывается, что простым идеалам в $\mathbb{C}[X]$ соответствуют *неприводимые замкнутые подмножества* в $X(\mathbb{C})$ (замкнутые подмножества — неформально говоря, те, которые выделяются полиномиальными равенствами). Поэтому полезно изучать простые идеалы алгебры $\mathbb{C}[X]$.

Удивительный факт состоит в том, что именно простые идеалы лежат в основе подхода, позволяющего перенести алгебраическую геометрию с классического контекста (когда $k = \mathbb{C}$) на произвольные кольца, включив значительную часть арифметики (алгебраической теории чисел).

### 1.3 Пучки

Важная часть определения схемы — так называемый *структурный пучок*. Для мотивации понятия пучка перейдем в чисто аналитический контекст *дифференциальных многообразий*. Пусть $X$ — дифференциальное многообразие (для простоты можно считать, что $X = \mathbb{R}^n$). С этой ситуацией связан следующий пучок: всевозможные дифференцируемые функции на всевозможных открытых подмножествах $X$. А именно, для каждого открытого подмножества $U \subseteq X$ рассмотрим множество

$$\mathcal{F}(U) = \{f \colon U \to \mathbb{R} \mid f \text{ дифференцируема}\}.$$

Функции из $\mathcal{F}(U)$ можно [поточечно] складывать, перемножать, умножать на константы из $\mathbb{R}$. Поэтому каждое $\mathcal{F}(U)$ — не просто множество, а $\mathbb{R}$-алгебра. Эти $\mathbb{R}$-алгебры для разных $U$ связаны между собой: если $V \subseteq U$ — меньшее открытое подмножество в $X$, то можно функции на $U$ ограничивать на подмножество $V$. То есть, задано отображение множеств

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{V,U} \colon \mathcal{F}(U) &\to \mathcal{F}(V), \\ f &\mapsto f|_V. \end{aligned}$$

Нетрудно понять, что это отображение является гомоморфизмом $\mathbb{R}$-алгебр (ограничение суммы функций совпадает с суммой ограничений,...). Кроме того, если $W \subseteq V \subseteq U$ —

цепочка из трех вложенных открытых подмножеств в $X$, то $\mathrm{res}_{W,V} \circ \mathrm{res}_{V,U} = \mathrm{res}_{W,U}$ (ограничить функцию с $U$ на $W$ — то же самое, что ограничить ее сначала на $V$, а уже потом на $W$). Разумеется, $\mathrm{res}_{U,U}$ — тождественное отображение для всех $U$. Это показывает, что алгебры $\mathcal{F}(U)$ при варьировании $U$ дают нам [контравариантный] функтор из категории открытых множеств многообразия $X$ в категорию $\mathbb{R}$-алгебр.

Если теперь $X$ — произвольное топологическое пространство, то произвольный контравариантный функтор из категории открытых множеств $X$ в категорию $\mathbb{R}$-алгебр называется **предпучком** $\mathbb{R}$**-алгебр на** $X$. Это можно сформулировать, разумеется, и без слова «функтор»: задание предпучка состоит в задании набора $\mathbb{R}$-алгебр (для всех открытых множеств в $X$) и отображений res (для всех вложений открытых множеств) таким образом, что выполняются условия про композицию вложений и про тождественное отображение.

Вернемся к аналитической ситуации, многообразию $X$ и предпучку $\mathcal{F}$ дифференцируемых функций на нем. Пусть открытое множество $U \subseteq X$ покрыто открытыми множествами $U_i$, $i \in I$:

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Предположим, что на каждом элементе $U_i$ этого покрытия задана своя дифференцируемая функция $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$. Нам хочется склеить из этого набора данных одну функцию $f$ на всем множестве $U$. Понятно, что это можно сделать только при условии согласованности $f_i$ на пересечениях элементов покрытия. То есть, нужно потребовать выполнения условия $\mathrm{res}_{U_i \cap U_j, U_i}(f_i) = \mathrm{res}_{U_i \cap U_j, U_j}(f_j)$ для всех пар индексов $i, j$. Это условие, как нетрудно видеть, является и достаточным, то есть, тогда существует функция $f \in \mathcal{F}(U)$, для которой $\mathrm{res}_{U_i, U}(f) = f_i$. Вот это свойство склейки и отличает пучок от предпучка.

Суммируем сказанное в точных определениях.

**Определение 1.3.1.** Пусть $X$ — топологическое пространство, $k$ — кольцо. **Предпучком** $k$**-алгебр** $\mathcal{F}$ на $X$ называется задание

- $k$-алгебры $\mathcal{F}(U)$ для каждого открытого множества $U \subseteq X$;
- гомоморфизма $k$-алгебр $\mathrm{res}_{V,U} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ для каждой пары вложенных открытых множеств $V \subseteq U$ в $X$,

таким образом, что выполняются следующие условия:

- $\mathrm{res}_{W,V} \circ \mathrm{res}_{V,U} = \mathrm{res}_{W,U}$ для каждой тройки вложенных открытых множеств $W \subseteq V \subseteq U$ в $X$;
- $\mathrm{res}_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$ для каждого открытого множества $U$ в $X$.

Предпучок $\mathcal{F}$ называется **пучком**, если, кроме того, выполняется следующее *условие склейки* (часто называемой *аксиомой пучка*):

- для любого открытого множества $U$ в $X$, любого открытого покрытия $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, и любого набора элементов $(f_i \in \mathcal{F}(U_i)_{i \in I}$, удовлетворяющего условию согласованности $\mathrm{res}_{U_i \cap U_j, U_i}(f_i) = \mathrm{res}_{U_i \cap U_j, U_j}(f_j)$ при $i, j \in I$, существует единственный элемент $f \in \mathcal{F}(U)$ такой, что $\mathrm{res}_{U_i, U}(f) = f_i$ для всех $i \in I$.

В случае $k = \mathbb{Z}$ говорят, что $\mathcal{F}$ — предпучок (или пучок) колец на $X$ (поскольку $\mathbb{Z}$-алгебры — это просто кольца).

Выше мы фактически убедились, что дифференцируемые функции на дифференциальном многообразии образуют пучок.

Введем полезную терминологию: если на топологическом пространстве $X$ задан предпучок $k$-алгебр $\mathcal{F}$, и $U$ — открытое множество в $X$, элементы $k$-алгебры $\mathcal{F}(U)$ мы будем часто называть **сечениями** пучка $\mathcal{F}$ на открытом множестве $U$. Если, кроме того, $V \subseteq U$ — меньшее открытое множество, то элемент $\mathrm{res}_{V,U}(f) \in \mathcal{F}(V)$ будет называться **ограничением** сечения $f$ на $V$ и обозначаться через $f|_V$.

Еще одно полезное обозначение: множество $\mathcal{F}(U)$ сечений [пред]пучка $\mathcal{F}$ на открытом множестве $U$ обозначается через $\Gamma(U, \mathcal{F})$. Такое обозначение полезно, когда мы фиксируем $U$ и варьируем $\mathcal{F}$; получается функтор $\Gamma(U, -)$.

## 1.4 Стебли пучка

Перенесем еще одно классическое понятие в более общий контекст. Пусть $x \in X$ — точка на дифференциальном многообразии $X$, и, как и выше, рассмотрим пучок дифференцируемых функций $\mathcal{F}$ на нем. Теперь нас интересует локальное поведение дифференцируемых функций вблизи точки $x$. А именно, будем рассматривать функции, каждая из которых определена в некоторой (своей) окрестности точки $x$, и отождествлять две функции, если они совпадают в какой-нибудь (достаточно малой) окрестности $x$. Более точно, рассмотрим множество пар вида

$$\{(U, f) \mid U \subseteq X \text{ открыто и содержит } x, f \in \mathcal{F}(U)\},$$

и введем на нем отношение эквивалентности: пары $(U, f)$ и $(U', f')$ назовем эквивалентными, если найдется окрестность $V \subseteq U \cap U'$ точки $x$ такая, что $f|_V = f'|_V$.

**Упражнение 1.4.1.** Проверьте, что это действительно отношение эквивалентности.

Теперь можно профакторизовать указанное множество пар по этому отношению. Полученное множество обозначается через $\mathcal{F}_x$ и называется **стеблем** пучка $\mathcal{F}$, а его элементы — **ростками функций** в точке $x$. Заметим, что элементы $\mathcal{F}_x$ можно складывать, перемножать, и умножать на скаляры из $\mathbb{R}$: если нам хочется сложить две пары $(U, f)$ и $(U', f')$, можно ограничить их на пересечение $U \cap U'$, сложить ограничения, и рассмотреть его класс в фактор-множестве.

**Упражнение 1.4.2.** Проверьте, что указанное определение корректно (не зависит от выбора пар в классе) и (вместе с аналогичным определением других операций) превращает $\mathcal{F}_x$ в $\mathbb{R}$-алгебру.

Заметим, что указанное определение дословно переносится на ситуацию, когда $X$ — произвольное топологическое пространство, $x \in X$, и $\mathcal{F}$ — предпучок $k$-алгебр на нем. Мы получили определение **стебля** $\mathcal{F}_x$ предпучка $\mathcal{F}$ в точке $x$. Его элементы называются **ростками сечений** в точке $x$. Для любого открытого множества $U$ в $X$, содержащего точку $x$, определено отображение $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$, отправляющее сечение $f \in \mathcal{F}(U)$ в класс пары $(U, f)$. Этот класс называется **ростком сечения** $f$ **в точке** $x$.

**Упражнение 1.4.3.** Проверьте, что построенное отображение является гомоморфизмом $k$-алгебр.

Вернемся к случаю дифференциального многообразия $X$ и пучка дифференцируемых функций $\mathcal{F}$ на нем, чтобы сделать еще одно наблюдение. Пусть $x \in X$. Мы утверждаем, что стебель $\mathcal{F}_x$ является локальным кольцом.

**Определение 1.4.4.** Кольцо $R$ называется **локальным**, если у него есть единственный максимальный идеал.

**Упражнение 1.4.5.** Докажите, что кольцо $R$ локально тогда и только тогда, когда множество всех его необратимых элементов образует идеал.

Что же за максимальный идеал содержится в $\mathcal{F}_x$? Это просто множество ростков функций, которые обращаются в 0 в точке $x$. Заметим, что слова «значение ростка функции в точке $x$» корректно определены: если пары $(U, f \in \mathcal{F}(U))$ и $(U', f' \in \mathcal{F}(U'))$ эквивалентны, то $f$ и $f'$ совпадают в некоторой окрестности точки $x$, а потому $f(x) = f'(x)$. Нетрудно понять, что сопоставление каждому ростку функции его значения задает гомоморфизм $k$-алгебр $\mathcal{F}_x \to \mathbb{R}$. Этот гомоморфизм сюръективен (поскольку в $\mathcal{F}_x$ есть ростки постоянных функций), а его ядро $\mathfrak{m}_x$ — это в точности функции, обращающиеся в 0. По теореме о гомоморфизме фактор по этому ядру изоморфен полю $\mathbb{R}$, и, значит, $\mathfrak{m}_x$ — максимальный идеал кольца $\mathcal{F}_x$.

Осталось заметить, что все элементы из разности $\mathcal{F}_x \setminus \mathfrak{m}_x$ обратимы в кольце $\mathcal{F}_x$. Действительно, если класс пары $(U, f)$ лежит в $\mathcal{F}_x \setminus \mathfrak{m}_x$, то $f(x) \neq 0$. Из непрерывности $f$ следует, что $f$ отлична от нуля во всех точках некоторой окрестности $V$ точки $x$. Но тогда $(V, f|_V)$ — представитель того же класса, что и $(U, f)$, а функция $f|_V$ уже обратима (и обратная к дифференцируемой функции дифференцируема).

Приведенное выше рассуждение, разумеется, существенным образом использует специфику нашей аналитической ситуации. Для произвольного предпучка (и даже пучка) $k$-алгебр $\mathcal{F}$ на топологическом пространстве $X$ и точки $x \in X$ кольцо $\mathcal{F}_x$ совершенно не обязано быть локальным.

**Определение 1.4.6.** Топологическое пространство $X$ вместе с пучком $\mathcal{F}$ колец на нем называется **локально окольцованным пространством**, если все стебли $\mathcal{F}_x$ пучка $\mathcal{F}$ во всех точках $x \in X$ являются локальными кольцами.

# 2 Определение схемы

## 2.1 Спектр кольца: план

Сейчас по каждому кольцу $R$ мы построим локально окольцованное пространство $\mathrm{Spec}(R)$. Для этого мы должны

- задать $\mathrm{Spec}(R)$ как множество;
- ввести на $\mathrm{Spec}(R)$ структуру топологического пространства;
- определить предпучок колец на $\mathrm{Spec}(R)$;
- проверить, что он является пучком;
- проверить, что его стебли — локальные кольца.

Первый шаг несложен: $\mathrm{Spec}(R)$ — это множество простых идеалов кольца $R$:

$$\mathrm{Spec}(R) = \{\mathfrak{p} \trianglelefteq R \mid \mathfrak{p} \text{ прост}\}.$$

Для краткости введем обозначение $X = \mathrm{Spec}(R)$.

Вместо того, чтобы задавать топологию на $X$, мы зададим **базу** топологии, то есть, укажем не все открытые подмножества, а только некоторые, а потом рассмотрим наименьший способ дополнить этот набор открытых подмножеств до топологии. Элементы базы будут называться **главными открытыми подмножествами** пространства $X = \mathrm{Spec}(R)$. Выглядят они так: для каждого элемента $f \in R$ рассмотрим следующее подмножество $X_f \subseteq X$:

$$X_f = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid f \notin \mathfrak{p}\}.$$

**Упражнение 2.1.1.** Докажите, что

1. $X_f \cap X_g = X_{fg}$;
2. $X_{f^n} = X_f$ для всех $n \geqslant 1$;
3. если $X_h \subseteq X_f$, то $h^n = fg$ для некоторых $g \in R$, $n \geqslant 1$.

Первый пункт упражнения 2.1.1 показывает, что пересечение двух (а значит, и любого конечного числа) главных открытых подмножеств — снова главное открытое подмножество. Поэтому для того, чтобы породить топологию этими подмножествами, достаточно рассмотреть всевозможные объединения главных открытых.

Смысл определения множеств $X_f$ очень простой. Сейчас мы добьемся того, что само кольцо $R$ станет «кольцом функций» на «многообразии» $\mathrm{Spec}(R)$. Существенное отличие от аналитической ситуации будет состоять в том, что там все функции принимали значения в $\mathbb{R}$, а тут область значений функции будет зависеть от точки. А именно, в точке $\mathfrak{p}$ «функция» $f \in R$ будет принимать значение $f \bmod \mathfrak{p} \in R/\mathfrak{p}$. При такой трактовке множество $X_f$ превращается в множество точек $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, в которых функция $f$ отлична от нуля в буквальном смысле: ее значение $f \bmod \mathfrak{p}$ не равно $0 \in R/\mathfrak{p}$. Это согласуется с тем, что в классической алгебраической геометрии множества нулей полиномиальных функций объявляются замкнутыми, а множество, где некоторая функция отлична от нуля, таким образом, становится открытым.

Следующий шаг — задание пучка в полученной топологии. Наше описание топологии не вполне явное, поскольку фактически мы определили только ее базу. Оказывается, и пучки можно задавать на базе топологии, если аккуратно подправить свойства из определения пучка. Это сделано, например, в [V, 2.7]. Мы не будем заострять на этом внимание: идея в том, что достаточно знать, как задаются кольца сечений на главных открытых множествах, а произвольное открытое можно покрыть главными, и воспользоваться условием склейки из определения пучка.

Итак, определим пучок $\mathcal{O}_X$, называемый **структурным пучком** схемы $X = \mathrm{Spec}(R)$. На главном открытом множестве вида $X_f$ для $f \in R$ положим $\mathcal{O}_X(X_f) = R_f$, где через $R_f$ обозначена *локализация кольца* $R$ *в элементе* $f$. Неформально говоря, это «минимальное» кольцо, в котором элемент $f$ становится обратимым. Его можно построить, например, так: $R_f = R[t]/(f \cdot t - 1)$. Почему именно так? Потому что как раз на том множестве, где функция $f$ отлична от нуля, она становится обратимой. С этой конструкцией связан естественный *гомоморфизм локализации* $R \to R_f$ — это просто композиция вложения $R \to R[t]$ и факторизации $R[t] \to R[t]/(f \cdot t - 1)$.

**Упражнение 2.1.2.** Пусть $R$ — кольцо, $f, g, h \in R$. Докажите, что

1. $R_h = R_{h^n}$ для всех $n \geqslant 1$;
2. $R_{fg} = (R_f)_g$.

Также мы должны задать гомоморфизмы ограничения: если $X_h \subseteq X_f$, то (по третьему пункту упражнения 2.1.1) можно записать $h^n = fg$. Пользуясь упражнением 2.1.2, видим, что нам нужно построить в этой ситуации гомоморфизм $R_f \to R_h = R_{h^n} = R_{fg} = (R_f)_g$. Теперь понятно, что можно взять просто гомоморфизм локализации (в $g$). Неформально говоря, обратить $f$, а потом обратить $g$ — это то же самое, что сразу обратить $fg$.

## 2.2 Спектр кольца как множество

Напомним, что для кольца $R$ мы определили множество $\operatorname{Spec} R$ как множество простых идеалов $R$. Мы часто будем обозначать через $[\mathfrak{p}]$ точку $\operatorname{Spec} R$, соответствующую простому идеалу $\mathfrak{p} \trianglelefteq R$ Мы хотим думать об элементах $R$ как о функциях на $\operatorname{Spec} R$. В частности, **значением** элемента $f \in R$ в точке $[\mathfrak{p}] \in \operatorname{Spec} R$ будет называться $(f \bmod \mathfrak{p}) \in R/\mathfrak{p}$. Обратите внимание, что значения функции в разных точках лежат в разных кольцах. В этой терминологии функция $f \in R$ обращается в нуль в точке $[\mathfrak{p}] \in \operatorname{Spec} R$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathfrak{p}$.

**Пример 2.2.1.** Посмотрим на $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x]$. Итак, $R = \mathbb{C}[x]$ — кольцо многочленов от одной переменной над полем комплексных чисел. Нетрудно понять, что это область главных идеалов (как и любое кольцо многочленов от одной переменной над полем). Разумеется, нулевой идеал $0$ прост, поскольку $R$ — область целостности. Ненулевой идеал, порожденный элементом $f \in R$, прост тогда и только тогда, когда этот элемент — неприводимый многочлен. Поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто, поэтому неприводимые многочлены над ним — это в точности линейные многочлены вида $(x - a)$, $a \in \mathbb{C}$.

Пусть $f \in \mathbb{C}$ — некоторый многочлен. Как найти значение $f$ в точке $[(x-a)]$? Поделим $f$ на $(x - a)$ с остатком: $f = (x - a) \cdot q + f(a)$. Поэтому $f$ и $f(a)$ дают один и тот же элемент в фактор-кольце $\mathbb{C}[x]/(x-a)$; после отождествления $\mathbb{C}[x]/(x-a)$ с $\mathbb{C}$ получаем, что значение $f$ в точке $[(x-a)]$ — это в точности $f(a)$. Напомним, что отождествление $\mathbb{C}[x]/(x-a)$ связано с *гомоморфизмом эвалюации*

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_a \colon \mathbb{C}[x] &\to \mathbb{C}, \\ f &\mapsto f(a), \end{aligned}$$

ядром которого и является идеал $(x - a)$. Поэтому мы будем думать про точку $[(x - a)] \in \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x]$ как про элемент $a \in \mathbb{C}$.

Получаем, что точки $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x]$ — это просто все точки $a \in \mathbb{C}$ плюс одна точка $0$. Точки $a \in \mathbb{C}$ соответствуют *максимальным* идеалам (поскольку факторы по ним изоморфны $\mathbb{C}$); такие точки мы будем называть *замкнутыми* — позже мы поймем, что они действительно замкнуты в топологии на $\operatorname{Spec} R$. Наконец, точка $[(0)] \in \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x]$ находится в некотором смысле «везде» на плоскости $\mathbb{C}$. Значение функции $f \in \mathbb{C}[x]$ в этой точке — это сама $f$ как элемент $\mathbb{C}[x]/(0) \cong \mathbb{C}[x]$.

**Пример 2.2.2.** Поле $\mathbb{C}$ в примере 2.2.1 можно заменить на любое алгебраическое замкнутое поле $k$. Так мы получим описание множества $\mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[x]$ для $k = \overline{k}$.

**Пример 2.2.3.** Посмотрим на $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Удивительный факт состоит в том, что это множество очень похоже на $\mathbb{A}^1_k$ из примера 2.2.2. Действительно, кольцо $R = \mathbb{Z}$ снова является областью главных идеалов, и потому его простые идеалы — это $(0)$ и $(p)$ для простых чисел $p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$. Аналогично предыдущим примерам, можно вычислять значения функций в разных точках. Например, функция $100$ обращается в нуль в точках $[(2)]$ и $[(5)]$ (более того, это нули кратности $2$), а ее значение в точке $[(3)]$ равно $\overline{1} \in \mathbb{Z}/(3) \cong \mathbb{F}_3$. Можно осмелеть и рассмотреть *рациональные функции*: функция $9/8$ определена на $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, кроме точки $[(2)]$, в которой она имеет полюс третьего порядка. В точке $[(3)]$ она имеет нуль второго порядка, а ее значение в точке $5$ равно $\overline{9} \cdot \overline{8}^{-1} = \overline{3} \in \mathbb{F}_5$.

**Пример 2.2.4.** Множество $\operatorname{Spec} k$ для любого поля $k$ состоит из одной точки. Спектр $\operatorname{Spec} 0$ нулевого кольца — пустое множество.

**Упражнение 2.2.5.** Опишите множество $\operatorname{Spec} k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$. Покажите, что функция $\varepsilon$ обращается в нуль в каждой точке этого множества. Перед нами первый пример того, что функция не определяется значениями во всех точках.

**Пример 2.2.6.** Опишем $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[x]$. Это область с однозначным разложением на множители, поэтому ее ненулевые простые идеалы — это в точности неприводимые многочлены $(x-a)$, $a \in \mathbb{R}$, и $(x^2+px+q)$, $p^2-4q < 0$. Все они на самом деле максимальны: $\mathbb{R}[x]/(x-a) \cong \mathbb{R}$, $\mathbb{R}[x]/(x^2+px+q) \cong \mathbb{C}$.

Точки $[(x-a)]$ (и точку $[(0)]$) мы уже видели в примере 2.2.2; они соответствуют «обычным» точкам вещественной прямой $\mathbb{R}$ и «общей» точке. Точки $[(x^2+px+q)]$ разумно интерпретировать как комплексно сопряженные *пары* чисел (корни многочлена $x^2+px+q$). Чтобы найти значение многочлена $f$ в точке $[(x^2+1)]$, поделим $f$ на $(x^2+1)$ с остатком: $f = (x^2+1)\cdot q + \alpha x + \beta$. Полученное значение $\alpha x + \beta$ разумно интерпретировать как комплексное число $\alpha i + \beta$, поскольку подстановка $i$ в обе части равенства дает $f(i) = \alpha i + \beta$. Впрочем, в нашей трактовке $i$ склеено с $-i$, поэтому с тем же успехом можно интерпретировать это значение как $-\alpha i + \beta$.

Наглядно полезно представлять себе $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ как комплексную плоскость $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$, которую сложили пополам вдоль вещественной оси (посредством единственного нетривиального автоморфизма $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$). Неподвижные вещественные точки стали точками вида $[(x-a)]$, а комплексно сопряженные пары чисел склеились в точки вида $[(x^2+px+q)]$.

**Пример 2.2.7.** Вообще, если $k$ — произвольное поле, удобно воспринимать $\mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[x]$ при помощи перехода к алгебраическому замыканию $\overline{k}$. А именно, [ненулевые] простые идеалы кольца $k[x]$ соответствуют неприводимым многочленам $f \in k[x]$. При переходе к $\overline{k}$ такой многочлен распадается на линейные множители, соответствующие его корням; все они сопряжены друг с другом под действием группы Галуа $\operatorname{Gal}(\overline{k}/k)$. Поэтому точки $\mathbb{A}^1_k$ — это в точности орбиты замкнутых точек прямой $\mathbb{A}^1_{\overline{k}}$ под действием группы Галуа, плюс «общая точка» $[(0)]$.

**Пример 2.2.8.** Посмотрим на $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p} = \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[x]$. Простые идеалы кольца $\mathbb{F}_p[x]$ снова имеют вид $[(0)]$ и $[(f)]$, где $f$ — неприводимый многочлен над $\mathbb{F}_p$. Такой $f$ может иметь сколь угодно большую степень. Заметим, что кроме «обычных точек» вида $[(x-a)]$, $a \in \mathbb{F}_p$, (которых всего $p$) имеется бесконечно много (см. упражнение **??**) дополнительных точек, соответствующих многочленам высших степеней. Функция $f \in \mathbb{F}_p[x]$, как хорошо известно, не определяется своими значениями в «обычных» точках (в отличие от случая бесконечного поля).

**Упражнение 2.2.9.** Если $k$ — поле, то множество $\operatorname{Spec} k[x]$ бесконечно.

**Пример 2.2.10.** Рассмотрим $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,y]$ (конечно, как и в примерах 2.2.1 и 2.2.2, мы можем подставить здесь вместо $\mathbb{C}$ *любое* алгебраически замкнутое поле. К несчастью, кольцо $\mathbb{C}[x,y]$ уже не является областью главных идеалов: к примеру, идеал $(x,y)$ не является главным. Тем не менее, нетрудно увидеть простой идеал $(0)$ и максимальные идеалы вида $(x-a, y-b)$ — ядра гомоморфизмов вычисления значения многочленов в точках вида $(a,b)$. Наконец, можно взять любой неприводимый многочлен $f \in \mathbb{C}[x,y]$ (например, $y-x^2$) и получить простой идеал $(f)$.

Наглядно ситуация такова: на $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ лежат «замкнутые точки» $[(x-a, y-b)]$, соответствующие парам комплексыних чисел $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, лежат «общие точки неприводимых многообразий»: например, есть точка $[(y-x^2)]$, висящая где-то над параболой $y = x^2$, и, наконец, есть «общая точка» всей плоскости $[(0)]$. Позже мы увидим, что это полное описание точек

$\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$. Мы также покажем, что замкнутые точки имеют размерность 0, общие точки неприводимых многообразий — размерность 1, а общая точка $[(0)]$ — размерность 2. Пока полезно иметь это в виду для интуитивного представления. Обратите внимание, что максимальные идеалы соответствуют самым «маленьким» точкам, простые идеалы поменьше — точкам побольше, и, наконец, самый маленький идеал $(0)$ — самой большой точке $[(0)]$. Если один идеал содержит другой, то между соответствующими точками имеется «включение» в обратную сторону. Эти слова станут точными, когда мы определим топологию на $\operatorname{Spec}(R)$.

**Пример 2.2.11.** Аналогично примеру 2.2.7, можно описать «замкнутые точки» аффинной плоскости $\mathbb{A}^2_k$ над произвольным полем $k$ как орбиты замкнутых точек $\mathbb{A}^2_{\overline{k}}$ (которые, как и в упражнении 2.2.10, соответствуют парам чисел $(a, b) \in \overline{k}^2$) под действием группы Галуа $\operatorname{Gal}(\overline{k}/k)$.

**Пример 2.2.12.** Положим $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Для удобства мы будем считать, что $n = 3$. Мы хотим, стало быть, описать простые идеалы кольца $\mathbb{C}[x, y, z]$ — казалось бы, вполне алгебраический вопрос. Как и раньше, идеал вида $(x - a, y - b, z - c)$ прост (более того, максимален). Мы думаем про него как про 0-мерную точку в пространстве $\mathbb{C}^3$ (и часто пишем $(a, b, c)$ вместо $[(x - a, y - b, z - c)]$). Оказывается, любой максимальный идеал имеет такой вид.

**Теорема 2.2.13** (Hilbert's Weak Nullstellensatz). *Пусть $k$ — алгебраически замкнутое поле. Максимальные идеалы кольца $k[x_1, \dots, x_n]$ — это в точности идеалы вида $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$, где $a_i \in k$.*

Сейчас мы выведем эту теорему из более сильной версии:

**Теорема 2.2.14** (Hilbert's Nullstellensatz). *Пусть $k$ — произвольное поле, $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца $k[x_1, \dots, x_n]$. Тогда фактор-кольцо $k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m}$ является конечным расширением $k$. Иными словами, любое поле, являющееся расширением $k$, конечно порожденное как $k$-алгебра, является конечно порожденным и как $k$-модуль.*

*Доказательство теоремы 2.2.13.* Идеал $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ является ядром сюръективного гомоморфизма $k[x_1, \dots, x_n] \to k$, сопоставляющего многочлену его значение в точке $(a_1, \dots, a_n)$ (докажите это!), и потому максимален. Обратно, если $\mathfrak{m} \trianglelefteq k[x_1, \dots, x_n]$ — максимальный идеал, то по теореме 2.2.14 фактор-кольцо $k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m}$ — конечное расширение $k$. Из алгебраической замкнутости поля $k$ теперь следует, что это расширение совпадает с $k$. Рассмотрим композицию $k[x_1, \dots, x_n] \to k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m} \cong k$ и обозначим через $a_1, \dots, a_n$ образы переменных $x_1, \dots, x_n$. Очевидно, что мы получили гомоморфизм вычисления значения в точке $(a_1, \dots, a_n)$, и мы уже знаем (см. выше), что его ядро — идеал, порожденный многочленами $x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n$. □

У кольца $\mathbb{C}[x, y, z]$ есть и другие идеалы. Во-первых, идеал $[(0)]$, который мы представляем себе как «точку размерности 3». Во-вторых, есть идеалы вида $[f(x, y, z)]$, где $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ — некоторый неприводимый многочлен. Этому идеалу соответствует «гиперповерхность», заданная уравнением $f = 0$, и потому соответствующая точка имеет размерность 2. Однако, это еще не все точки $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x, y, z]$! Мы пока описали точки размерностей $0, 2, 3$ — и ничего не сказали про точки размерности 1. Вот пример: идеал $(x, y) \trianglelefteq \mathbb{C}[x, y, z]$. Он прост, поскольку $\mathbb{C}[x, y, z]/(x, y) \cong \mathbb{C}[z]$ — область целостности. Геометрически этому идеалу соответствует множество решений в $\mathbb{C}^3$ уравнений $x = y = 0$, то есть, ось $z$; полученное фактор-кольцо $\mathbb{C}[z]$ при этом — кольцо функций на этой прямой. Таких «точек размерности 1» много, и нет шансов описать их разумным образом. Нужно думать про них как про неприводимые кривые в трехмерном пространстве; таким образом, решение чисто алгебраической задачи «описать простые идеалы кольца $\mathbb{C}[x, y, z]$» является чисто геометрическим.

**Упражнение 2.2.15.** Пусть $A$ — кольцо, $I \trianglelefteq A$ — идеал, $\varphi\colon A \to A/I$ — каноническая проекция на фактор-кольцо. Покажите, что прообраз (относительно $\varphi$) простого идеала в $A/I$ является простым идеалом в $A$, и что это соответствие задает биекцию между простыми идеалами в $A/I$ и простыми идеалами в $A$, содержащими $I$. Кроме того, эта биекция сохраняет включение. Таким образом, $\operatorname{Spec} A/I$ можно считать подмножеством в $\operatorname{Spec} A$.

**Пример 2.2.16.** Посмотрим на $X = \operatorname{Spec} k[x, y]/(x^2 - y^2 - 5)$. Упражнение 2.2.15 показывает, что $X$ можно рассматривать как подмножество в $\mathbb{A}^2_k = \operatorname{Spec} k[x, y]$. Если поле $k = \overline{k}$ алгебраически замкнуто, все замкнутые точки $\mathbb{A}^2_{\overline{k}}$ имеют вид $[(x-a, y-b)]$ и отождествляются с парами $(a, b) \in \overline{k}^2$. Такая точка $(a, b)$ лежит на $X$ тогда и только тогда, когда $I$ содержится в максимальном идеале $(x - a, y - b)$, то есть, $a^2 - b^2 - 5 = 0$. Таким образом, замкнутые точки $X$ — это в точности решения уравнения $a^2 - b^2 = 5$ в $\overline{k}^2$. Если же $k$ незамкнуто, замкнутые точки $X$, аналогично примеру 2.2.11, соответствуют орбитам таких решений под действием группы Галуа $\operatorname{Gal}(\overline{k}/k)$.

**Определение 2.2.17.** Подмножество $S \subseteq A$ кольца $A$ называется **мультипликативным**, если оно содержит 1 и замкнуто относительно умножения.

**Определение 2.2.18.** Пусть $S \subseteq A$ — мультипликативное подмножество. Рассмотрим множество формальных выражений вида $\frac{a}{s}$, где $a \in A$, $s \in S$. Введем на нем отношение следующим образом: $\frac{a}{s} \sim \frac{a'}{s'}$ тогда и только тогда, когда существует $s'' \in S$ такое, что $s''(as' - sa') = 0$. Мы получили отношение эквивалентности (проверьте это!). Фактор-множество по нему обозначается через $S^{-1}A$. Введем на нем операции, которые на представителях выглядят так: сложение $\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as'+sa'}{ss'}$ и умножение $\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'}$. Получится кольцо (проверьте это!), которое называется **локализацией кольца $A$ в мультипликативном множестве $S$**. Кроме того, отображение, сопоставляющее элементу $a \in A$ класс дроби $a/1 \in S^{-1}A$, является гомоморфизмом колец $A \to S^{-1}A$.

**Упражнение 2.2.19.** Пусть $S$ — мультипликативное подмножество кольца $A$. Опишите биекцию между простыми идеалами кольца $S^{-1}A$ и простыми идеалами кольца $A$, не пересекающимися с $S$. Проверьте, что эта биекция сохраняет включение. Поэтому $\operatorname{Spec} S^{-1}A$ можно канонически отождествить с подмножеством в $\operatorname{Spec} A$.

**Пример 2.2.20.** Для любого элемента $f \in A$ можно рассмотреть мультипликативное множество $\{1, f, f^2, \dots\}$ и соответствующую локализацию $A_f = \{1, f, f^2, \dots\}^{-1}A$, которая называется **главной локализацией**.

**Пример 2.2.21.** Для любого простого идеала $\mathfrak{p} \trianglelefteq A$ множество $A - \mathfrak{p}$ является мультипликативным. Соответствующая локализация $(A-\mathfrak{p})^{-1}A$ обозначается через $A_\mathfrak{p}$ и называется **локализацией в простом идеале $\mathfrak{p}$**.

Таким образом, $\operatorname{Spec} A_f$ и $\operatorname{Spec} A_\mathfrak{p}$ (с помощью упражнения 2.2.19) можно рассматривать как подмножества в $\operatorname{Spec} A$.

Каков геометрический смысл этих подмножеств? Выше мы видели, что простые идеалы $A_f$ — это то же самое, что простые идеалы $A$, не пересекающиеся с $\{1, f, f^2, \dots\}$. Из определения простого идеала видно, что это то же самое, что простые идеалы $A$, не содержащие $f$. Мы также видели, что «простые идеалы $A$, содержащие $f$» — это множество нулей функции $f$. Поэтому $\operatorname{Spec} A_f$ — это множество точек, в которых $f$ не обращается в нуль.

Простые идеалы $A_\mathfrak{p}$ — это простые идеалы, не пересекающиеся с дополнением $A - \mathfrak{p}$, то есть, это простые идеалы, содержащиеся в идеале $\mathfrak{p}$. Например, если $A = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x, y]$ (то есть, дело происходит на плоскости), и идеал $\mathfrak{p}$ максимален (то есть, соответствует замкнутой точке $[\mathfrak{p}]$), то мы смотрим только на элементы $f \in A$, лежащие в $\mathfrak{p}$ — то есть, обращающиеся в нуль в точке $[\mathfrak{p}]$. Геометрически это соответствует тому, что мы смотрим только на всевозможные кривые, проходящие через точку $[\mathfrak{p}]$. Поэтому изучение $\operatorname{Spec} A_\mathfrak{p}$ — это изучение пространства $\operatorname{Spec} A$ «вблизи точки $[\mathfrak{p}]$».

**Упражнение 2.2.22.** Пусть $\varphi\colon B \to A$ — гомоморфизм колец, $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца $A$. Докажите, что прообраз $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ является простым идеалом в $B$.

Таким образом, гомоморфизм колец $B \to A$ порождает отображение множеств $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B$. Нетрудно видеть, что мы получили контравариантный функтор Spec из категории колец в категорию множеств.

**Упражнение 2.2.23.** Для идеала $I \trianglelefteq A$ покажите, что индуцированное отображение $\operatorname{Spec} A/I \to \operatorname{Spec} A$ — это в точности вложение, описанное в упражнении 2.2.15.

**Упражнение 2.2.24.** Для мультипликативного подмножества $S \subseteq A$ покажите, что индуцированное отображение $\operatorname{Spec} S^{-1}A \to \operatorname{Spec} A$ — это в точности вложение, описанное в упражнении 2.2.19.

**Упражнение 2.2.25.** Рассмотрим отображение множеств $\pi\colon \mathbb{A}^n_\mathbb{Z} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, индуцированное гомоморфизмом колец $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$. Для каждого простого числа $p$ установите естественную биекцию между слоем $\pi^{-1}([(p)])$ над точкой $[(p)]$ и множеством $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_p}$. Что можно сказать про слой над точкой $[(0)]$?

В примере 2.2.5 мы видели, что ненулевая функция (то есть, просто элемент кольца $A$) может обращаться в нуль на всех точках $\operatorname{Spec} A$ (то есть, лежать во всех простых идеалах). Оказывается, это возможно только для *нильпотентных* функций.

**Упражнение 2.2.26.** Элемент $f \in A$ называется **нильпотентом**, если некоторая его степень равна нулю. Докажите, что множество $\operatorname{Nil} A$ всех нильпотентов кольца $A$ образует идеал в $A$. Этот идеал называется **нильрадикалом** кольца $A$. Покажите также, что естественное отображение $\operatorname{Spec}(A/\operatorname{Nil} A) \to \operatorname{Spec} A$ является биекцией.

**Предложение 2.2.27.** *Нильрадикал кольца $A$ совпадает с пересечением всех простых идеалов $A$. Таким образом, функция на* $\operatorname{Spec} A$ *тождественно равна нулю тогда и только тогда, когда она нильпотентна.*

*Доказательство.* Очевидно, что любой нильпотентный элемент лежит во всех простых идеалах $A$. Обратно, пусть $x \notin \operatorname{Nil} A$. Как найти простой идеал в $A$, не содержащий $x$? Рассмотрите вообще все идеалы в $A$, не содержащие $x$, найдите среди них максимальный (по лемме Цорна) и покажите, что он прост. Альтернатива: откройте книжку [E] и прочитайте доказательство там. □

## 2.3 Спектр кольца как топологическое пространство

Сейчас мы определим топологию на $\operatorname{Spec} A$. Для любого подмножества $J \subseteq A$ положим

$$V(J) = \{[\mathfrak{p}] \in \operatorname{Spec} A \mid J \subseteq \mathfrak{p}\} \subseteq \operatorname{Spec} A$$

В соответствии с нашей интерпретации элементов $A$ как функций на $\operatorname{Spec} A$, перед нами множество общих нулей всех функций из $J$. Эти (и только эти) подмножества $\operatorname{Spec} A$ мы объявим замкнутыми.

Обычно определение топологии дается в терминах открытых подмножеств, а не замкнутых. Но несложно перейти к дополнениям и получить следующее:

**Упражнение 2.3.1.** Набор $\mathcal{V}$ подмножеств множества $X$ является набором замкнутым подмножеств некоторой топологии тогда и только тогда, когда

1. $\varnothing, X \in \mathcal{V}$;

2. если $V_i \in \mathcal{V}$ для всех $i \in I$, то $\bigcap_{i \in I} V_i \in \mathcal{V}$;

3. если $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$, то $V_1 \cup V_2 \in \mathcal{V}$.

Теперь мы можем показать, что замкнутые множества вида $V(J)$ действительно задают топологию на $\operatorname{Spec} A$, проверив несложные свойства:

- $V(\{0\}) = \operatorname{Spec}(A)$, $V(A) = \varnothing$;

- $\bigcap_{i \in I} V(J_i) = V(\sum_{i \in I} J_i)$;

- $V(J_1) \cup V(J_2) = V(J_1 J_2)$.

**Определение 2.3.2.** Полученная топология на $\operatorname{Spec} A$ называется **топологией Зариского**.

Заметим, что $V(J) = V(\langle J \rangle)$: множество нулей набора функций совпадает с множеством нулей идеала, ими порожденного. Поэтому при желании мы можем считать, что в выражении $V(J)$ множество $J$ всегда является идеалом.

**Определение 2.3.3.** Для идеала $I \trianglelefteq A$ обозначим через $\sqrt{I}$ его **радикал**

$$\sqrt{I} = \{f \in A \mid f^n \in I \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}\}.$$

Например, радикал нулевого идеала — это нильрадикал кольца. Идеал называется **радикальным**, если он совпадает со своим радикалом.

**Упражнение 2.3.4.** 1. Если $I \trianglelefteq A$ — идеал кольца $A$, то $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

2. Простые идеалы являются радикальными.

Несложно понять, что $V(I) = V(\sqrt{I})$ Несложно понять, что $(I \cap J)^2 \subseteq IJ \subseteq I \cap J$, откуда $V(IJ) = V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.

**Пример 2.3.5.** Опишем топологию Зариского на $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x]$. Любой идеал кольца $\mathbb{C}[x]$ порожден одним элементом $f$. Любой ненулевой многочлен $f$ раскладывается в произведение линейных. Поэтому любой идеал либо нулевой, либо содержится в конечном числе максимальных. Поэтому замкнутые множества топологии Зариского на $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ — это конечные наборы точек и все множество $\mathbb{A}^1$. Переходя к дополнениям, получаем, что открытые множества в $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ — это пустое множество и дополнения конечных наборов максимальных идеалов. Общая точка $[(0)]$ содержится в любом непустом открытом множестве.

**Пример 2.3.6.** Интереснее понять, как устроена топология Зариского на $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$. Мы знаем, что точки $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ (то есть, простые идеалы $\mathbb{C}[x, y]$) бывают следующих трех типов:

1. «нульмерные» точки, соответствующие максимальным идеалам: $[(x - a, y - b)]$ для $a, b \in \mathbb{C}$;

2. «одномерные» точки вида $[(f)]$, где $f \in \mathbb{C}[x, y]$ — неприводимый многочлен;

3. одна «двумерная» точка $[(0)]$.

Поэтому замкнутое подмножество $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ — это либо вся плоскости, либо конечное число «кривых» вместе с конечным числом «нульмерных» точек. Здесь «кривая» — это замыкание «одномерной» точки: одномерная точка вида $[(f)]$ вместе со всеми «нульмерными» точками, лежащими на ней, то есть, со всеми максимальными идеалами, содержащими $f$, то есть, с точками вида $[(x-a, y-b)]$, где $f(a, b) = 0$.

**Упражнение 2.3.7.** В упражнении 2.2.22 мы видели, что гомоморфизм колец $A \to B$ индуцирует отображение множеств $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$. Проверьте, что это отображение непрерывно в топологии Зариского.

Таким образом, Spec является контравариантным функтором из категории колец в категорию топологических пространств.

**Упражнение 2.3.8.** В упражнении 2.2.15 мы поняли, что если $I \trianglelefteq A$ — идеал, то $\operatorname{Spec} A/I$ — подмножество в $\operatorname{Spec} A$. Покажите, что это подмножество замкнуто в $\operatorname{Spec} A$, а топология Зариского на $\operatorname{Spec} A/I$ совпадает с топологией, индуцированной на нем как на подмножестве в $\operatorname{Spec} A$.

**Упражнение 2.3.9.** В упражнении 2.2.19 мы поняли, что если $S \subseteq A$ — мультипликативная система, то $\operatorname{Spec} S^{-1}A$ — подмножество в $\operatorname{Spec} A$. Покажите, что если $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ — мультипликативная система, порожденная элементом $f \in A$, то это подмножество открыто в $\operatorname{Spec} A$. В общем случае это подмножество может не быть ни открытым, ни замкнутым.

**Определение 2.3.10.** Для $f \in A$ определим **главное открытое подмножество**

$$\begin{aligned} D(f) &= \{[\mathfrak{p}] \in \operatorname{Spec} A \mid f \notin \mathfrak{p}\} \\ &= \{[\mathfrak{p}] \in \operatorname{Spec} A \mid f([\mathfrak{p}]) \neq 0\} \\ &= \operatorname{Spec} A - V(\{f\}). \end{aligned}$$

**Упражнение 2.3.11.** Покажите, что множества вида $D(f)$ образуют *базу топологии Зариского* на $\operatorname{Spec} A$, то есть, что любое открытое подмножество в $\operatorname{Spec} A$ является объединением главных открытых подмножеств.

**Упражнение 2.3.12.** Покажите, что $D(f) \cap D(g) = D(fg)$.

**Упражнение 2.3.13.** Покажите, что $D(f) \subseteq D(g)$ тогда и только тогда, когда $f^n \in (g)$ для некоторого $n \geqslant 1$, что, в свою очередь, равносильно тому, что элемент $g$ обратим в $A_f$.

## 2.4 Топологические свойства спектра

**Определение 2.4.1.** Топологическое пространство $X$ называется **связным**, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых подмножеств.

**Упражнение 2.4.2.** Пусть $A = A_1 \times A_2$. Покажите, что отображения $\operatorname{Spec} A_i \to \operatorname{Spec} A$, индуцированные проекциями $A \to A_i$, задают разложение $\operatorname{Spec} A$ в несвязное объединение $\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec} A_1 \sqcup \operatorname{Spec} A_2$ двух открытых подмножеств.

**Упражнение 2.4.3.** Более того, следующие условия равносильны:

- спектр кольца $A$ несвязен;

- $A$ изоморфно произведению двух ненулевых колец $A = A_1 \times A_2$;
- существуют ненулевые элементы $a_1, a_2 \in A$ такие, что $a_1^2 = a_1$, $a_2^2 = a_2$, $a_1 + a_2 = 1$ (откуда следует, что $a_1 a_2 = 0$).

**Определение 2.4.4.** Топологическое пространство $X$ называется **неприводимым**, если его нельзя представить в виде объединения двух собстввенных (то есть, отличающихся от $X$) замкнутых подмножеств.

**Упражнение 2.4.5.** Докажите. что в неприводимом топологическом пространстве $X$ любое непустое открытое множество плотно (то есть, его замыкание совпадает с $X$).

**Упражнение 2.4.6.** Докажите, что неприводимое топологическое пространство связно.

**Упражнение 2.4.7.** Покажите, что если $A$ — область целостности, то $\operatorname{Spec} A$ неприводим. *Подсказка*: что происходит с общей точкой?

Несложно привести пример кольца, спектр которого связен, но не является неприводимым: скажем, $A = \mathbb{C}[x, y]/(xy)$ (нарисуйте $\operatorname{Spec} A$!).

**Упражнение 2.4.8.** Пусть $I = (wy - x^2, xz - y^2, wz - xy)$ — идеал в кольце $k[x, y, z, w]$. Покажите, что идеал $I$ прост, и потому $\operatorname{Spec} k[x, y, z, w]/I$ неприводим.

*Решение.* Перед нами пример сложного вопроса: как доказать, что конкретный идеал в конкретном кольце прост? Сейчас мы покажем, что кольцо $k[x, y, z, w]/I$ является областью целостности, отождествив его с другим, более удобно записанным кольцом.

Геометрически (можно для удобства считать, что $k = \mathbb{C}$) речь идет о множестве в четырехмерном аффинном пространстве, заданном уравнениями

$$\begin{aligned} wy &= x^2, \\ xz &= y^2, \\ wz &= xy. \end{aligned}$$

Напомним, что аффинная схема — это фактически и есть система полиномиальных уравнений. Попытаемся решить эту систему уравнений «наивно», не заботясь о корректности проводимых операций. Метод, известный со школы — попытаться выразить некоторые переменные, уменьшив тем самым их количество. Из первого уравнения заключаем, что $w = x^2/y$, из второго — что $z = y^2/x$. Третье уравнение тогда превращается в верное тождество: $x^2y^2/(xy) = xy$. У нас осталось две переменных, $x$ и $y$. Таким образом, четверка $(x, y, z, w)$ свелась к четверке $(x, y, y^2/x, x^2/y)$.

Следующее, что полезно заметить — *однородность* нашей системы: если решение $(x, y, z, w)$ умножить на (ненулевой) скаляр $\lambda \in k$, оно останется решением. Нас немного смущают знаменатели в четверке $(x, y, y^2/x, x^2/y)$, поэтому можно попробовать умножить ее на $xy$: получим четверку $(x^2y, xy^2, y^3, x^3)$. Для избежания путаницы переобозначим переменные и будем писать $s, t$ вместо $x, y$. Итак, мы преобразовали $(x, y, z, w)$ в $(s^2t, st^2, t^3, s^3)$. Нетрудно понять (простой подстановкой), что при любых $s, t \in k$ четверка указанного вида действительно дает решение нашей системы. Пока что остается открытым вопрос, верно ли обратное (мы не хотим возиться с разбором разных случаев).

Теперь попытаемся подняться на уровень выше, и осознаем, что означает проведенная замена переменных. Как и для любой замены переменных, речь идет о гомоморфизме колец

$$\begin{aligned} k[x,y,z,w] &\to k[s,t]; \\ x &\mapsto s^2t, \\ y &\mapsto st^2, \\ z &\mapsto t^3, \\ w &\mapsto s^3. \end{aligned}$$

Тот факт, что подстановка $(s^2t, st^2, t^3, s^3)$ в качестве $(x, y, z, w)$ дает решение нашей системы уравнений, означает, что построенный гомоморфизм пропускается через фактор-кольцо $k[x, y, z, w]/I$. Действительно, для этого достаточно проверить, что все элементы $I$ переходят в 0, а для этого достаточно, чтобы три образующие $I$ переходили в 0, что мы уже проверили выше. Поэтому наш гомоморфизм разложился в композицию

$$k[x,y,z,w] \to k[x,y,z,w]/I \xrightarrow{\varphi} k[s,t]$$

канонической проекции и некоторого гомоморфизма $\varphi$. Гомоморфизм $\varphi$ позволяет связать интересующее нас кольцо $k[x, y, z, w]/I$ с каким-то более доступным кольцом типа $k[s, t]$. Разумеется, теперь нас интересует, насколько $\varphi$ далек от изоморфизма: каковы образ и ядро $\varphi$?

С образом все просто: тут достаточно заметить, что образы $x, y, z, w$ — мономы [общей] степени 3. Поэтому образ любого многочлена от $x, y, z, w$ содержит только мономы общей степени, делящейся на 3. Обратно, легко видеть, что любой моном от двух переменных $s, t$, степень которого делится на 3, лежит в образе $\varphi$.

Мы описали образ $\varphi$: это подкольцо в $k[s, t]$, состоящее из многочленов, все мономы которых имеют общую степень, делящуюся на 3. Обозначим это подкольцо через $R$. Сейчас мы поймем, что $\varphi$ инъективен, и на этом решение закончится: $\varphi$ отождествит кольцо $k[x, y, z, w]/I$ с кольцом $R$, которое очевидным образом не содержит делителей нуля (оно является подкольцом в области целостности $k[s, t]$).

Для доказательства инъективности $\varphi$ будем действовать грубо: возьмем многочлен $f \in k[x, y, z, w]$, и предположим, что его класс по модулю $I$ переходит под действием $\varphi$ в $0 \in k[s, t]$. Покажем, что из этого следует, что класс $f$ по модулю $I$ нулевой — то есть, что $f \in I$. Итак, $f$ состоит из мономов вида $x^a y^b z^c w^d$ с какими-то коэффициентами. Поскольку нас интересует только класс $f$ по модулю $I$, Для доказательства мы можем «сдвигать» $f$ на элемнеты $I$, то есть, свободно заменять $x^2$ на $wy$, $y^2$ на $xz$, $wz$ на $xy$ (и наоборот). Каждый моном теперь можно упростить: если он содержит $x$ хотя бы во второй степени, можно заменить $x^2$ на $wy$, а если он содержит $y$ хотя бы во второй степени, то заменить $y^2$ на $xz$. Может показаться, что мы ходим по кругу: при избавлении от $x$, возникает лишний $y$, а при избавлении от $y$ — лишний $x$. Однако, сумма показателей степеней $x$ и $y$ при таких преобразованиях только уменьшается, поэтому когда-то мы придем к ситуации, когда в нашем мономе $x^a y^b z^c w^d$ выполнено $a \leqslant 1$ и $b \leqslant 1$. Кроме того, если $a = b = 1$, можно заменить $xy$ на $zw$. Таким образом, наш моном (и вообще любой моном $f$) можно привести к одной из следующих трех форм:

- $xz^c w^d$,
- $yz^c w^d$,
- $z^c w^d$.

Эти мономы переходят под действием $\varphi$ в $(s^2t)t^{3c}s^{3d}$, $(st^2)t^{3c}s^{3d}$, $t^{3c}s^{3d}$, соответственно. Мы предположили, что $f$ переходит в 0, поэтому образ любого монома $f$ обязан уничтожиться с каким-то другим мономом $f$. Однако, по моному $s^e t^f$ мы можем однозначно восстановить, из какого монома он пришел: $xz^c w^d$, $yz^c w^c$ или $z^c w^d$, и найти $c$ и $d$ (это делается анализом остатков от деления $e$ и $f$ на 3). Поэтому если он уничтожился с чем-то, то он уничтожился бы еще в многочлене $f$, и, стало быть, $f = 0$.

**Упражнение 2.4.9.** Образующие идеала из упражнения 2.4.8 — это определители $(2 \times 2)$-подматриц в матрице
$$\begin{pmatrix} w & x & y \\ x & y & z \end{pmatrix},$$
а условие их равенства нулю означает, что ранг этой матрицы не превосходит 1. Обобщите результат этого упражнения на матрицы $2 \times n$.

**Определение 2.4.10.** Топологическое пространство $X$ называется **квазикомпактным**, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Более точно, если $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ для открытых множеств $U_i$, $i \in I$, то найдется конечное подмножество $J \subseteq I$ такое, что $X = \bigcup_{i \in J} U_i$.

**Пример 2.4.11.** Для любого кольца $A$ пространство $\operatorname{Spec} A$ квазикомпактно. Действительно, предположим, что $\operatorname{Spec} A = \bigcup_{i \in I} U_i$. Переходя к дополнениям, получаем, что $\bigcap_{i \in I}(V(J_i))$ для некоторых идеалов $J_i$, $i \in I$ кольца $A$ (здесь $V(J_i) = \operatorname{Spec} A - U_i$). Поэтому $\sum_{i \in I} J_i = A$. Но по определению суммы идеалов это означает, что $1 = j_1 + \dots + j_s$, где каждое слагаемое лежит в некотором идеале из $\{J_i\}_{i \in I}$. Взяв только эти идеалы, получаем, что их сумма уже равна $A$.

**Упражнение 2.4.12.**

1. Докажите, что замкнутое подмножество квазикомпактного пространства квазикомпактно.
2. Открытое подмножество квазикомпактного пространства не обязано быть квазикомпактным: пусть $A = k[x_1, x_2, x_3, \dots]$, $I = (x_1, x_2, x_3, \dots) \trianglelefteq A$. Докажите, что $\operatorname{Spec} A - V(I)$ не квазикомпактно.
3. Докажите, что объединение конечного числа квазикомпактных открытых подмножеств топологического пространства квазикомпактно.

**Упражнение 2.4.13.** Упражнение 2.4.2 показывает, что $\operatorname{Spec}(\prod_{i=1}^n A_i) = \coprod_{i=1}^n \operatorname{Spec} A_i$. Это не обобщается на бесконечные произведения: если $I$ бесконечно (и все кольца $A_i$, $i \in I$, ненулевые), то $\operatorname{Spec}(\prod_{i \in I} A_i) \neq \coprod_{i \in I} \operatorname{Spec} A_i$. Действительно, объединение в правой части не квазикомпактно, а спектр любого кольца квазикомпактен. Покажите, что $\operatorname{Spec}(\prod_{i \in I} A_i)$ «больше», чем несвязное объединение спектров, предъявив простой идеал в $\prod_{i \in I} A_i$, не имеющий вид $\{(a_i)_{i \in I} \mid a_j = 0\}$ ни для какого $j \in I$. *Подсказка*: рассмотрите наборы $(a_i)_{i \in I}$, у которых $a_i = 0$ для всех $i \in I$, кроме конечного числа.

**Определение 2.4.14.** Точка $x$ топологического пространства $X$ называется **замкнутой**, если множество $\{x\}$ замкнуто в $X$.

**Упражнение 2.4.15.** Покажите, что точка $[\mathfrak{p}] \in \operatorname{Spec} A$ замкнута тогда и только тогда, когда идеал $\mathfrak{p}$ максимален.

По теореме Гильберта о нулях 2.2.13 замкнутые точки $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ соответствуют наборам $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^n$. Более того, замкнутые точки пространства $\operatorname{Spec}[k_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_m)$ — это такие наборы $(c_1, \dots, c_n)$, для которых $f_i(c_1, \dots, c_n) = 0$ при всех $i = 1, \dots, m$.

**Упражнение 2.4.16.** Пусть $A$ — конечно порожденная алгебра над полем $k$. Покажите, что множество замкнутых точек $\operatorname{Spec} A$ плотно. *Подсказка*: достаточно показать, что если $f \in A$ и $D(f)$ непусто, то $D(f)$ содержит замкнутую точку $\operatorname{Spec} A$. Для этого вспомните, что $A_f$ — тоже конечно порожденная $k$-алгебра, и воспользуйтесь теоремой Гильберта о нулях 2.2.14.

**Упражнение 2.4.17.** Покажите, что если $k$-алгебра $A$ не конечно порождена, то множество замкнутых точек $\operatorname{Spec} A$ не обязано быть плотным. *Подсказка*: опишите $\operatorname{Spec} k[x]_{(x)}$.

**Определение 2.4.18.** Если $x, y$ — точки топологического пространства $X$, и $x \in \overline{\{y\}}$, говорят, что $x$ — **специализация** точки $y$, а $y$ — **генерализация** точки $x$.

**Определение 2.4.19.** Подмножество топологического пространства $X$ называется его **неприводимой компонентой**, если оно максимально по включению среди неприводимых подмножеств $X$.

**Упражнение 2.4.20.** Докажите, что замыкание неприводимого подмножества неприводимо, и потому неприводимые компоненты пространства автоматически замкнуты.

**Упражнение 2.4.21.** Докажите, что любая точка топологического пространства $X$ лежит в некоторой неприводимой компоненте $X$. *Подсказка*: лемма Цорна.

**Определение 2.4.22.** Топологическое пространство $X$ называется **нетеровым**, если оно удовлетворяет следующему *условию обрыва убывающих цепей замкнутых подмножеств*: любая последовательность $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \cdots \supseteq Z_n \supseteq \ldots$ замкнутых подмножеств стабилизируется.

**Упражнение 2.4.23.** Докажите (напрямую), что $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ нетерово, пользуясь описанием всех замкнутых подмножеств в $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ из примера 2.3.6.

**Теорема 2.4.24.** *Пусть $X$ — нетерово топологическое пространство. Любое замкнутое подмножество $Z$ можно единственным образом представить в виде конечного объединения $Z = Z_1 \cup \cdots \cup Z_n$ замкнутых неприводимых подмножеств так, что $Z_i \not\subseteq Z_j$ при $i \neq j$.*

*Доказательство.* Обозначим через $\mathcal{C}$ совокупность всех замкнутых подмножеств $X$, которые не могут быть представлены в виде конечного объединения замкнутых неприводимых подмножеств. Покажем, что $\mathcal{C} = \varnothing$. Действительно, пусть $Y_1 \in \mathcal{C}$. Если $Y_1$ содержит какое-нибудь строго меньшее подмножество из $\mathcal{C}$, выберем такое и обозначим его через $Y_2$. Продолжим процедуру и получим убывающую цепочку замкнутых подмножеств, которая обязаа стабилизироваться в силу нетеровости $X$. Значит, на каком-то шаге мы придем к замкнутому подмножеству $Y_r$, которое лежит в $\mathcal{C}$, но никакое его собственное подмножество не лежит в $\mathcal{C}$. Может ли $Y_r$ быть неприводимым? Нет, иначе оно было бы объединением конечного числа (одного) замкнутых неприводимых, и не лежало бы в $\mathcal{C}$. Но если $Y_r$ не является неприводимым, то (по определению), $Y_r = Y' \cup Y''$ для некоторых собственных замкнутых. По предположению каждое из них не лежит в $\mathcal{C}$ и поэтому является объединением конечного числа замкнутых неприводимых — а потому и $Y_r$ является таким, противоречие.

Мы показали, что произвольное замкнутое представляется в виде объединения конечного числа неприводимых замкнутых; после удаления некоторых из них можно считать, что никакое из них не содержится в другом. Осталось показать единственность. Предположим, что $Z = Z_1 \cup Z_2 \cup \dots \cup Z_r = Z_1' \cup Z_2' \cup \dots \cup Z_s'$ — два таких представления. Тогда

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_1 \cap Z \\ &= Z_1 \cap (Z_1' \cup Z_2' \cup \dots \cup Z_s') \\ &= (Z_1 \cap Z_1') \cup (Z_1 \cap Z_2') \cup \dots \cup (Z_1 \cap Z_s'). \end{aligned}$$

Мы представили $Z_1$ как объединение нескольких замкнутых. Но $Z_1$ неприводимо, поэтому одно из этих замкнутых, скажем, $Z_1 \cap Z_i'$, должно совпадать с $Z_1$. Поэтому $Z_1 \subseteq Z_i'$. Повторяя такое же рассуждение для $Z_i'$, получаем, что $Z_i' \subseteq Z_j$ для некоторого индекса $Z_j$. Но тогда $Z_1 \subseteq Z_i' \subseteq Z_j$, а по предположению множества $Z_1, \dots, Z_r$ не содержатся в друг друге. Значит, $j = 1$ и $Z_1 = Z_i'$. Мы показали, что каждый элемент из списка $Z_1, \dots, Z_r$ совпадает с некоторым элементом из списка $Z_1', \dots, Z_s'$, и, конечно, наоборот. Значит, эти списки совпадают. □

**Определение 2.4.25.** Напомним, что кольцо $A$ называется **нетеровым**, если оно удовлетворяет следующему *условию обрыва возрастающих цепей идеалов*: любая цепочка $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ идеалов кольца $A$ стабилизируется.

**Упражнение 2.4.26.** Покажите, что кольцо $A$ нетерово тогда и только тогда, когда любой идеал $A$ конечно порожден.

**Теорема 2.4.27** (Теорема Гильберта о базисе). *Если $A$ нетерово, то и $A[x]$ нетерово.*

*Доказательство.* См. любую книгу по коммутативной алгебре; например, [E]. □

**Следствие 2.4.28.** *Если $k$ — поле, то кольцо $k[x_1, \dots, x_n]$ нетерово.*

Нетрудно показать, что фактор-кольцо нетерова кольца нетерово, и локализация нетерова кольца нетерова. Привести пример кольца, не являющегося нетеровым, несложно: подойдет $k[x_1, x_2, x_3, \dots]$ — кольцо многочленов от бесконечного числа переменных над полем.

Выше мы сопоставили каждому идеалу $J$ кольца $A$ подмножество $V(J)$. Пользуясь нашей терминологией, $V(J)$ — это множество всех общих нулей функций из $J$. Сейчас мы определим в некотором смысле обратное сопоставление: для произвольного подмножества $S \subseteq \operatorname{Spec} A$ можно рассмотреть множество $I(S)$, состоящее из всех функций, обращающихся в нуль на $S$. Более точно,

$$I(S) = \bigcap_{[\mathfrak{p}] \in S} \mathfrak{p} \subseteq A.$$

Нетрудно видеть, что $I(S)$ — идеал кольца $A$, $I$ обращает включения, и $I(\overline{S}) = I(S)$.

**Упражнение 2.4.29.** Пусть $S \subseteq \operatorname{Spec} A$. Докажите, что $V(I(S)) = \overline{S}$. Таким образом, если подмножество $S \subseteq \operatorname{Spec} A$ замкнуто, то $V(I(S)) = S$.

**Упражнение 2.4.30.** Пусть $J \trianglelefteq A$. Докажите, что $I(V(J)) = \sqrt{J}$. Таким образом, если идеал $J$ радикальный, то $I(V(J)) = J$.

**Теорема 2.4.31.** *Отображения $V(-)$ и $I(-)$ задают биекцию между замкнутыми подмножествами $\operatorname{Spec} A$ и радикальными идеалами $A$. Эта биекция обращает включения.*

**Упражнение 2.4.32.** Отображения $V(-)$ и $I(-)$ задают биекцию между *неприводимыми* замкнутыми подмножествами $\operatorname{Spec} A$ и *простыми* идеалами $A$. Как следствие, имеется биекция между точками $\operatorname{Spec} A$ и неприводимыми замкнутыми подмножествами $\operatorname{Spec} A$, сопоставляющая каждой точке ее замыкание. Поэтому у каждого неприводимого замкнутого множества в $\operatorname{Spec} A$ есть ровно одна общая точка.

## 2.5 Структурный пучок аффинной схемы

**Определение 2.5.1.** Для $f \in A$ положим $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(f)) = A_f$. Если $D(f') \subseteq D(f)$, определим отображение ограничения

$$\operatorname{res}_{D(f'),D(f)} \colon \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(f)) \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(f'))$$

естественным образом (второе кольцо является дальнейшей локализацией первого).

Пока что мы определили сечения предпучка $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ только на *главных* открытых множествах — а хотелось бы на *всех* открытых множествах. Мы могли бы сейчас написать явное определение $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(U)$ для любого открытого $U \subseteq \operatorname{Spec} A$, но оно достаточно громоздкое и не приносит никакого удовольствия. Желающие могут отправиться во вторую главу книги [H] и убедиться в этом. Вместо этого мы постараемся пояснить, *откуда* такое определение вообще может взяться.

Это не очень-то сложно: с одной стороны, определение 2.5.1 сечений структурного пучка на главных открытых множествах совершенно естественно (мы хотим сделать функцию $f$ обратимой там, где она отлична от нуля). С другой стороны, упражнение 2.3.11 говорит нам, что главные открытые множества образуют базу топологии Зариского. Наконец, ключевое соображение состоит в том, что сечение на произвольном открытом множестве склеивается (причем единственным образом) из набора согласованных сечений покрытия — именно в этом состоит аксиома пучка (определение 1.3.1). Поэтому хочется, грубо говоря, определить сечения на произвольном открытом множестве как наборы согласованных сечений на каком-нибудь его покрытии главными открытыми подмножествами. Конечно, при буквально таком определении необходимо возиться с тем, какие наборы сечений (заданные, возможно, на разных покрытиях) надо отождествлять друг с другом. Поэтому логичным развитием этой идеи служит определение, основанное на том, что нужно склеивать ростки сечений во всех точках $U$ (согласованные должным образом). Разумеется, эта техника никак не зависит от специфики нашей ситуации и концептуально правильнее абстрагироваться от нее и рассмотреть произвольное топологическое пространство $X$ с некоторой выбранной базой $\mathcal{B}$ этой топологии, определить «пучок на $\mathcal{B}$» (задание сечений только на открытых подмножествах из базы) с естественными аксиомами, и показать, что любой «пучок на $\mathcal{B}$» естественным (и единственным) образом продолжается до пучка на всей топологии.

Эта программа реализована, например, в [V, 2.7]. Приведем лишь определение «пучка на $\mathcal{B}$».

**Определение 2.5.2.** Пусть $X$ — топологическое пространство, $\mathcal{B} = \{B_i\}$ — некоторая база топологии на $X$. **Предпучком** $\mathcal{F}$ множеств (абелевых групп, колец,...) на $\mathcal{B}$ называется задание множеств (абелевых групп, колец,...) $\mathcal{F}(B_i)$ для всех подмножеств $B_i$ из базы, вместе с заданием морфизмов множеств (абелевых групп, колец,...) $\operatorname{res}_{B_j,B_i} \colon \mathcal{F}(B_i) \to \mathcal{F}(B_j)$ для всех пар вложенных подмножеств $B_j \subseteq B_i$ из базы, так, что $\operatorname{res}_{B_i,B_i} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(B_i)}$ и $\operatorname{res}_{B_k,B_i} = \operatorname{res}_{B_k,B_j} \circ \operatorname{res}_{B_j,B_i}$ для всех $B_k \subseteq B_j \subseteq B_i$.

Предпучок на $\mathcal{B}$ называется **пучком**, если он удовлетворяет следующим условиям:

1. Если $B = \bigcup B_i$ — покрытие множества из базы другими элементами базы, и $f, g \in \mathcal{F}(B)$ таковы, что $\operatorname{res}_{B_i,B}(f) = \operatorname{res}_{B_i,B}(g)$ для всех $i$, то $f = g$.

2. Если $B = \bigcup B_i$ — покрытие множества из базы другими элементами базы, и для каждого $i$ задано $f_i \in \mathcal{F}(B_i)$ так, что $f_i$ и $f_j$ совпадают на любом открытом множестве из базы, содержащемся в $B_i \cap B_j$ (то есть, если $B_k \subseteq B_i \cap B_j$, то $\operatorname{res}_{B_k,B_i}(f_i) = \operatorname{res}_{B_k,B_j}(f_j)$), то найдется $f \in \mathcal{F}(B)$ такой, что $\operatorname{res}_{B_i,B}(f) = f_i$ для всех $i$.

Возвращаясь к определению 2.5.1, заметим, что если мы трактуем элементы $A$ как функции на $\operatorname{Spec} A$, то $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D_f)$ есть в точности локализация кольца $A$ в мультипликативном множестве функций, которые не обращаются в нуль на $D(f)$.

**Теорема 2.5.3.** *Данные из определения 2.5.1 определяют пучок на базе главных открытых подмножеств* $\operatorname{Spec} A$ *(в смысле определения 2.5.2), а следовательно, и пучок на топологическом пространстве* $\operatorname{Spec} A$.

**Определение 2.5.4.** Пучок из теоремы 2.5.3 называется **структурным пучком** на $\operatorname{Spec} A$, а само пространство $\operatorname{Spec} A$ вместе с этим пучком называется **аффинной схемой**.

*Доказательство теоремы 2.5.3.* Очевидно, что отображение ограничения из определения 2.5.1 коммутируют, и мы получили предпучок на базе главных открытых подмножеств. Осталось проверить два финальных условия из определения 2.5.2. Мы проверим эти условия для случая $B = \operatorname{Spec} A$ (перенос на произвольный случай несложен и достигается переходом к локализации в самом начале). Следующее рассуждение носит неформальное название **разбиения единицы**.

Итак, пусть $\operatorname{Spec} A = \bigcup_{i\in I} D(f_i)$. Мы знаем (см. **??**), что тогда элементы $f_i$ порождают единичный идеал кольца $A$. Тогда можно выбрать конечный их набор, скажем, $f_1, \ldots, f_n$ такой, что $(f_1, \ldots, f_n) = A$ (в силу квазикомпактности $\operatorname{Spec} A$, пример 2.4.11). Достаточно показать, что если $s \in A$ таков, что $\operatorname{res}_{D(f_i),\operatorname{Spec} A}(s) = 0$ для всех $i$, то $s = 0$. Условие $\operatorname{res}_{D(f_i),\operatorname{Spec} A}(s) = 0 \in A_f$ означает, что $f_i^m s = 0$, и можно выбрать такое общее $m$, что это выполняется для всех $i = 1, \ldots, n$. Заметим, что элементы $f_1^m, \ldots, f_n^m$ тоже порождают единичный идеал, и поэтому найдутся $r_i \in A$ такие, что $\sum_{i=1}^m r_i f_i^m = 1$ в $A$, откуда

$$s = (\sum_{i=1}^n r_i f_i^m)s = \sum_{i=1}^n r_i(f_i^m s) = 0.$$

Проверим теперь второе условие: пусть произвольный набор элементов $f_i$, $i \in I$ порождает единичный идеал, и даны элементы в $A_{f_i}$, которые совпадают на всех пересечениях $A_{f_i f_j}$ (заметим, что пересечение двух главных открытых подмножеств — снова главное открытое). Предположим сначала, что индексное множество $I$ конечно, скажем, $I = \{1, \ldots, n\}$. Нам даны элементы $a_i/f_i^{l_i} \in A_{f_i}$, совпадающие на пересечениях. Положим $g_i = f_i^{l_i}$; после этого наши элементы имеют вид $a_i/g_i \in A_{g_i}$ (здесь мы используем также, что $D(f_i) = D(g_i)$). Условие совпадения на попарных пересечениях означает, что $(g_i g_i)^{m_{ij}}(g_j a_i - g_i a_j) = 0$ для всех пар $i, j$. Можно выбрать из показателей $m_{ij}$ максимальный (здесь мы пользуемся конечностью $I$), и тогда $(g_i g_j)^m(g_j a_i - g_i a_j) = 0$. Обозначим $b_i = a_i g_i^m$ и $h_i = g_i^{m+1}$ для всех $i$. При этом $D(h_i) = D(g_i)$, и наши элементы $a_i/g_i$ можно записать как $b_i/h_i$, а условие совпадения на пересечениях означает, что $h_j b_i = h_i b_j$ для всех $i, j$. Заметим, что $D(h_i)$ образуют покрытие $\operatorname{Spec} A$, и поэтому $1 = \sum_{i=1}^n r_i h_i$ для некоторых $r_i \in A$. Положим $r = \sum r_i b_i$. Мы утверждаем, что ограничение $r$ на $a_j$ равно $b_j/h_j$ для всех $j$. Действительно,

$$rh_j = \sum_{i=1}^n r_i b_i h_j = \sum_{i=1}^n r_i h_i b_j = b_j.$$

Пусть теперь $I$ бесконечно. В силу квазикомпактности можно выбрать конечное подмножество, скажем, $\{1, \ldots, n\} \subseteq I$ так, что $(f_1, \ldots, f_n) = A$, и, проделав описанное выше построение, получить элемент $r \in A$. Покажем, что для любого $z \in I - \{1, \ldots, n\}$ ограничение элемента $r$ на $D(f_z)$ совпадает с заданным элементом $a_z \in A_{f_z}$. Действительно, если проделать описанное выше построение еще раз, но уже для конечного подмножества

$\{1, \ldots, n, z\}$, мы получим элемент $r' \in A$, ограничение которого на $D(f_i)$ совпадает с $a_i$ для всех $i = 1, \ldots, n, z$. Поскольку мы уже проверили первое свойство из определения пучка, из этого следует, что $r' = r$, и потому ограничение $r$ на $D(f_z)$ такое, какое нужно. $\square$

**Замечание 2.5.5.** Доказательство теоремы 2.5.3 фактически состоит в проверке точности последовательности
$$0 \to A \to \prod_i A_{f_i} \to \prod_{i \neq j} A_{f_i f_j}.$$

## 2.6 Морфизмы пучков

**Определение 2.6.1.** Пусть $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ — предпучки множеств (абелевых групп, колец, $k$-алгебр, …) на топологическом пространстве $X$. **Морфизмом** предпучков $\varphi$ из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{G}$ называется задание для каждого открытого подмножества $U \subseteq X$ отображения множеств (гомоморфизма групп, колец, $k$-алгебр) $\varphi(U) \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$, которые согласованы с ограничениями в следующем смысле. Пусть $U \subseteq V$ — открытые подмножества в $X$. Тогда диаграмма
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{G}(V) \\ {\scriptstyle \mathrm{res}_{U,V}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}_{U,V}} \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \end{array}$$
должна быть коммутативной.

**Замечание 2.6.2.** С каждым топологическим пространством $X$ можно связать категорию $\mathrm{Open}(X)$, объекты которой — все открытые подмножества в $X$, а морфизмы — вложения открытых подмножеств. Иными словами, для любых открытых подмножеств $U, V \subseteq X$ множество морфизмов из $U$ в $V$ (в категории $\mathrm{Open}(X)$) пусто, если $U \not\subseteq V$, и состоит из одного элемента, если $U \subseteq V$. Композиция таких морфизмов задается очевидным образом. Теперь можно переформулировать определение предпучка множеств так: предпучок $\mathcal{F}$ множеств на $X$ — это контравариантный функтор из категории $\mathrm{Open}(X)$ в категорию множеств. Заменив в этом определении категорию множеств на категорию абелевых групп, колец, $k$-алгебр, …, получим определение предпучка абелевых групп, колец, $k$-алгебр, …. Контравариантность состоит в том, что отображения ограничения $\mathrm{res}_{U,V}$ идут «в обратную сторону» по отношению к стрелкам включения подмножеств: если $U \subseteq V$, то $\mathrm{res}_{U,V} \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$.

В этой терминологии определение морфизма предпучков 2.6.1 — это просто определение естественного преобразования между контравариантными функторами. Из этого сразу следует, что предпучки на $X$ образуют категорию. Мы будем обозначать ее через $\mathrm{PreSh}(X)$.

**Определение 2.6.3.** Пусть $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ — пучки абелевых групп, колец, $k$-алгебр, … на топологическом пространстве $X$. **Морфизм пучков** $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — это морфизм предпучков из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{G}$.

Таким образом, категория пучков на $X$ является полной подкатегорией в категории предпучков на $X$. Мы будем обозначать категорию пучков на $X$ через $\mathrm{Sh}(X)$.

Определение морфизма предпучков дает и понятие изоморфизма предпучков (и, следовательно, изоморфизма пучков). Нетрудно проверить, что $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — изоморфизм [пред]пучков на $X$ тогда и только тогда, когда отображения $\varphi(U)$ — изоморфизмы для всех $U \subseteq X$.

Мы определили морфизмы [пред]пучков на одном топологическом пространстве $X$. Сейчас мы хотим научиться связывать между собой [пред]пучки на разных топологических пространствах.

Пусть $\pi\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, и пусть на $X$ задан предпучок $\mathcal{F}$. Мы хотим перенести его на $Y$. Это несложно сделать: для каждого открытого подмножества $V \subseteq Y$ множество $\pi^{-1}(V)$ открыто в $X$ (по определению непрерывности), и потому можно определить предпучок $\pi_*\mathcal{F}$ на $Y$, положив

$$(\pi_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(\pi^{-1}(V)).$$

Несложно проверить, что это действительно предпучок. Более того, если $\mathcal{F}$ — пучок, то и $\pi_*\mathcal{F}$ — пучок.

**Упражнение 2.6.4.** Покажите, что если $\mathcal{F}$ — пучок на $X$, то $\pi_*\mathcal{F}$ — пучок на $Y$.

Построенный предпучок $\pi_*\mathcal{F}$ называется **прямым образом** (или **пушфорвардом**) предпучка $\mathcal{F}$.

Перенос предпучка в обратную сторону не так прост. Пусть, как и выше, $\pi\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологически пространств, и пусть на $Y$ задан предпучок $\mathcal{G}$. Мы хотим перенести его на $X$ и получить предпучок $\pi^*\mathcal{G}$. Для открытого множества $U \subseteq X$ разумно рассмотреть его образ $\pi(U) \subseteq Y$ — однако он не будет, вообще говоря, открытым подмножеством в $Y$. Решение состоит в том, чтобы «приблизить сверху» это подмножество открытыми. А именно, положим

$$(\pi^*\mathcal{G})(U) = \varinjlim_{V \supseteq \pi(U)} \mathcal{G}(V).$$

Из определения копредела следует явное описание: сечения предпучка $\pi^*\mathcal{G}$ на $U$ — это сечения $\mathcal{G}$ на открытых множествах, содержащих $\pi(U)$, по модулю несложного отношения эквивалентности.

Нетрудно проверить, что мы получили предпучок на $X$. Однако, если $\mathcal{G}$ — пучок на $Y$, предпучок $\pi^*\mathcal{G}$ вовсе не обязан быть пучком на $X$. Для того, чтобы превратить его в пучок, необходимо подвергнуть его процедуре «шифификации», которая каноническим образом строит по предпучку $\mathcal{F}$ пучок $\mathcal{F}^{\mathrm{sh}}$ (вместе с морфизмом предпучков $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\mathrm{sh}}$) такой, что любой морфизм из $\mathcal{F}$ в пучок пропускается через $\mathcal{F}^{\mathrm{sh}}$. Иными словами, сопоставление $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\mathrm{sh}}$ задает функтор из категории предпучков в категорию пучков, левый сопряженный к забывающему.

Наконец, для непрерывного отображения $\pi\colon X \to Y$ и пучка $\mathcal{G}$ на $Y$ мы можем определить $\pi^{-1}\mathcal{G} = (\pi^*\mathcal{G})^{\mathrm{sh}}$. Полученный пучок $\pi^{-1}\mathcal{G}$ называется **обратным образом** (или **пулбэком**) пучка $\mathcal{G}$.

## 2.7 Определение схемы

Теперь мы можем дать определение схемы.

**Определение 2.7.1.** Схемой $X$ называется топологическое пространство $X$ вместе с пучком колец $\mathcal{O}_X$ на нем (называемым **структурным пучком схемы** $X$), которое локально изоморфно аффинной схемы. Иными словами, у каждой точки $x \in X$ существует окрестность $U \subseteq X$ такая, что $U$ вместе с ограничением структурного пучка $\mathcal{O}_X$ на $U$ изоморфно аффинной схеме.

Расшифруем условие локальной изоморфности. Во-первых, если $\mathcal{F}$ — пучок на топологическом пространстве $X$, и $U \subseteq X$ — открытое подмножество, можно рассмотреть **ограничение пучка** $\mathcal{F}$ на $U$. Это пучок $\mathcal{F}|_U$ на $U$, задаваемый следующим образом: для каждого открытого $V \subseteq U$ положим $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V)$. Несложно проверить, что это действительно пучок на

$U$. Разумеется, можно было начать с предпучка на $X$ и получить в ограничении предпучок на $U$.

Во-вторых, можно определить *изоморфизм окольцованных пространств* следующим образом: пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ и $(Y, \mathcal{O}_Y)$ — окольцованные пространства (то есть, $\mathcal{O}_X$ — пучок колец на $X$, и $\mathcal{O}_Y$ — пучок колец на $Y$). **Изоморфизмом** называется гомеоморфизм $\pi \colon X \to Y$ вместе с изоморфизмом пучков колец $\mathcal{O}_X$ и $\mathcal{O}_Y$ (рассматриваемых как пучки на одном топологическом пространстве посредством гомеоморфизма $\pi$).

Таким образом, схема — это топологическое пространство $X$ вместе с пучком колец $\mathcal{O}_X$ на $X$, для которого существует открытое покрытие $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ такое, что $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ — аффинная схема для каждого $i \in I$, то есть, $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) \cong (\operatorname{Spec} A_i, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_i})$ для некоторого кольца $A_i$.

**Упражнение 2.7.2.** Пусть $A$ — кольцо, $f \in A$. Покажите, что открытое подмножество $D(f)$ в $\operatorname{Spec} A$ вместе с ограничением на него структурного пучка $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ изоморфно аффинной схеме $\operatorname{Spec} A_f$.

**Упражнение 2.7.3.** Пусть $X$ — схема, $U$ — открытое подмножество $X$. Докажите, что $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ — схема.

**Определение 2.7.4.** Пусть $X$ — схема, $U \subseteq X$ — открытое подмножество. Схема $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ называется **открытой подсхемой** в $X$. Если, кроме того, она аффинна, $U$ называется **аффинным открытым подмножеством** или **аффинной открытой подсхемой**.

# 3 Свойства схем

## 3.1 Локально окольцованные пространства

Важное свойство схем состоит в том, что они являются *локально окольцованными* топологическими пространствами (в смысле определения 1.4.6). Действительно, пусть $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинная схема, и $[\mathfrak{p}] \in X$, то есть, $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца $A$. Тогда по определению стебель $X_{[\mathfrak{p}]}$ — это предел колец $\mathcal{O}_X(U)$ по всем открытым $U \subseteq X$, содержащим точку $[\mathfrak{p}]$. Поскольку главные открытые образуют базу топологии, можно брать предел только по главным открытым:

$$X_{[\mathfrak{p}]} = \varinjlim_{U \ni [\mathfrak{p}]} \mathcal{O}_X(U) = \varinjlim_{D(f) \ni [\mathfrak{p}]} \mathcal{O}_X(D(f)) = \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} A_f = A_{\mathfrak{p}}.$$

Неформально говоря, мы разрешаем ставить в знаменатель все функции, которые не обращаются в 0 в точке $[\mathfrak{p}]$, то есть, все элементы $A - \mathfrak{p}$. Но это просто локализация кольца $A$ в простом идеале $\mathfrak{p}$, то есть, локальное кольцо $A_{\mathfrak{p}}$ (с максимальным идеалом $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$).

Если теперь $X$ — любая схема, то у точки $x \in X$ есть аффинная открытая окрестность, и поэтому стебель $\mathcal{O}_{X,x}$ структурного пучка $\mathcal{O}_X$ в точке $x$ также является локальным кольцом. Максимальный идеал локального кольца $\mathcal{O}_{X,x}$ обозначается через $\mathfrak{m}_{X,x}$ (или просто через $\mathfrak{m}_x$), а его поле вычетов $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ — через $\kappa(x)$. Если $U \ni x$ — открытое подмножество $X$, содержащее точку $x$, мы интерпретируем элементы кольца $\mathcal{O}_X(U)$ как функции на $U$; значение такой функции $f$ в точке $x$ — это элемент поля $\kappa(x)$, полученный взятием класса ростка $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$.

## 3.2 Примеры схем

Разумеется, любая аффинная схема является схемой по тривиальным причинам. Приведем три важных примера неаффинных схем.

**Пример 3.2.1.** Пусть $k$ — произвольное поле, $X = \mathbb{A}^2_k = \operatorname{Spec} k[x, y]$, и пусть $U = X - \{(0,0)\}$ — схема, полученная выкалыванием из плоскости [замкнутой] точки $[(x, y)]$. Заметим, что $U = D(x) \cup D(y)$ — объединение двух подсхем, полученных выкалыванием прямых (горизонтальной и вертикальной). Покажем, что схема $U$ не является аффинной.

Для этого сначала вычислим кольцо функций на $U$ (то есть, кольцо $\mathcal{O}_X(U)$). Определение пучка говорит нам, что функция на $U$ получается склейкой из функции на $D(x)$ и функции на $D(y)$. Кольцо функций на $D(x)$ — это $k[x, y]_x = k[x, y, 1/x]$. Кольцо функций на $D(y)$ — это $k[x, y]_y = k[x, y, 1/y]$. Обозначим $A = k[x, y]$ и заметим, что канонические отображения $A \to A_x$, $A \to A_y$, $A_x \to A_{xy}$ и $A_y \to A_{xy}$ инъективны (поскольку $A$ — область целостности). Функции на $U$ — это пары функций на $D(x)$ и $D(y)$, совпадающие на $D(x) \cap D(y) = D(xy)$, то есть, пары элементов из $A_x$ и $A_y$, совпадающие при отображении в $A_{xy}$. Иными словами, это просто пересечение $A_x$ и $A_y$ внутри $A_{xy}$ (или в поле частных $k(x, y)$ кольца $A$). То есть, нас интересуют рациональные функции над полем $k$, у которых в знаменателе стоит степень $x$, и, в то же время, степень $y$. Очевидно, что все такие функции — многочлены, то есть, $A_x \cap A_y = A$.

Мы получили, что $\mathcal{O}_X(U) = k[x, y]$. Отметим, что, таким образом, любая функция на $\mathbb{A}^2 - \{(0,0)\}$ продолжается на всю плоскость $\mathbb{A}^2$. Это аналог *леммы Хартога* в комплексном анализе: любая голоморфная функция на дополнении подмножества коразмерности $\geqslant 2$ на комплексном многообразии продолжается на это подмножество.

Для завершения доказательства предположим, что схема $U$ аффинна; скажем, $(U, \mathcal{O}_X|_U) = (\operatorname{Spec} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B})$. Тогда, разумеется, $B = \mathcal{O}_X(U) = k[x, y]$, и, значит, $U \cong X \cong \mathbb{A}^2_k$. Однако, простой идеал $(x, y)$ кольца $B$ должен соответствовать некоторой точке в $U$, в то время как замкнутые подмножества $V(x)$ и $V(y)$ в $U$ не пересекаются (обратите внимание, что здесь мы используем точный вид соответствия между простыми идеалами кольца и замкнутыми неприводимыми подмножествами его спектра!).

Следующие два примера иллюстрируют еще один важных способ построения новых схем: склейка. Начнем с напоминания того, как склеиваются топологические пространства: пусть даны пространства $X$ и $Y$, открытые подмножества $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$, и гомеоморфизм $U \cong V$ между ними. Склейкой топологических пространств $X$ и $Y$ вдоль $U \cong V$ тогда называется фактор-пространство $W$ несвязного объединения $X \sqcup Y$ по [очевидному] отношению эквивалентности $U \cong V$ (вместе с топологией фактор-пространства). При этом $X$ и $Y$ отождествляются с открытыми подмножествами в $W$ (и образуют покрытие $W$). Несложно перенести эту конструкцию на случай склейки произвольного семейства топологических пространств.

Пусть теперь даны схемы $X_i$ $(i \in I)$, открытые подсхемы $X_{ij} \subseteq X_i$ (для всех пар $i, j \in I$), и изоморфизмы $f_{ij} \colon X_{ij} \to X_{ji}$ так, что $X_{ii} = X_i$, $f_{ii} = \mathrm{id}_{X_i}$, и выполняется следующее *условие коцикла*:

$$f_{ik}|_{X_{ij} \cap X_{ik}} = f_{jk}|_{X_{ji} \cap X_{jk}} \circ f_{ij}|_{X_{ij} \cap X_{ik}}$$

для всех троек $i, j, k \in I$. В частности, мы предполагаем, что $f_{ij}(X_{ik} \cap X_{ij}) \subseteq X_{jk}$, чтобы правая часть имела смысл.

Из условия коцикла следует, в частности, что изоморфизмы $f_{ij}$ и $f_{ji}$ взаимно обратны.

**Упражнение 3.2.2.** Покажите, что в описанной ситуации существует единственная (с точностью до изоморфизма) схема $X$ вместе с открытым покрытием, элементы которого изоморфны $X_i$, и эти изоморфизмы согласованы с данными склейки.

В следующих примерах мы описываем две неаффинные схемы. Обе они получены склейкой двух копий аффинной прямой $\mathbb{A}^1_k$ вдоль изоморфизма между открытыми подмножествами $\mathbb{A}^1_k - \{(0)\}$. Различие между примерами лишь в выборе этого изоморфизма.

**Пример 3.2.3.** Пусть $X = \operatorname{Spec} k[t]$, $Y = \operatorname{Spec} k[u]$, $U = D(t) = \operatorname{Spec} k[t, 1/t] \subseteq X$, $V = D(u) = \operatorname{Spec} k[u, 1/u] \subseteq Y$. Склеим $X$ и $Y$ вдоль изоморфизма $U \cong V$, индуцированного изоморфизмом $k[t, 1/t] \cong k[u, 1/u]$, переводящим $t$ в $u$ (и $1/t$ в $1/u$). Полученная схема называется **аффинной прямой со сдвоенной точкой** 0. Неформальная картинка проста: мы склеили две прямые $\mathbb{A}^1_k$ по открытому множеству $\mathbb{A}^1_k - \{0\}$, и поэтому получилась прямая с двумя копиями точки 0. Эта картинка очень похожа на типичный пример нехаусдорфового пространства. Однако, в топологии Зариского и сама прямая $\mathbb{A}^1_k$ нехаусдорфова. На самом деле, правильный аналог слова «хаусдорфовость» здесь — это *отделимость*. Отделимые схемы действительно играют роль «разумных» схем во многих отношениях (в первом издании EGA схемы назывались «предсхемами», а «схемами» именовалось то, что мы теперь называем отделимыми схемами).

**Упражнение 3.2.4.** Покажите, что прямая со сдвоенной точкой 0 не является аффинной (посчитайте глобальные сечения и посмотрите на упражнение 3.2.1).

**Пример 3.2.5.** Снова пусть $X = \operatorname{Spec} k[t]$, $Y = \operatorname{Spec} k[u]$, $U = D(t) = \operatorname{Spec} k[t, 1/t] \subseteq X$, $V = D(u) = \operatorname{Spec} k[u, 1/u] \subseteq Y$. Склеим $X$ и $Y$ вдоль изоморфизма $U \cong V$, индуцированного изоморфизмом $K[t, 1/t] \cong k[u, 1/u]$, переводящим $t$ в $1/u$, и $1/t$ в $u$. Полученная схема называется **проективной прямой над** $k$ и обозначается через $\mathbb{P}^1_k$.

Посмотрим, что происходит с точками при склейке. Замкнутая точка вида $[(t - a)] \in \operatorname{Spec} k[t] = X$ (то есть, точка с координатой $a$) лежит в $U$ тогда и только тогда, когда $a \neq 0$. При нашем изоморфизме этот простой идеал $(t - a)$ переходит в простой идеал $(1/u - a) = (1 - au) = (u - 1/a)$, которому соответствует точка с координатой $1/a$ на прямой $Y$. Общая точка $[(0)] \in \operatorname{Spec} k[t]$ соответствует идеалу $(0)$ в $k[t]$ (и в $k[t, 1/t]$), что переходит в идеал $(0)$ в $k[u, 1/u]$; поэтому общая точка $X$ склеивается с общей точкой $Y$.

Если поле $k$ алгебраически замкнуто, то на $X$ и $Y$ нет других точек, кроме замкнутых и общих. Поэтому мы описали все точки $\mathbb{P}^1_k$. Более привычное описание: замкнутые точки $\mathbb{P}^1_k$ в этом случае имеют вид $[a : b]$, где $a, b \in k$ не равны одновременно 0, и пара $[a : b]$ понимается с точностью до подобия (то есть, отождествляется с парой $[ac : bc]$ при $c \in k^*$). Если $b \neq 0$, точка $[a : b]$ отождествляется с точкой $a/b$ на прямой $X$, а если $a \neq 0$, то $[a : b]$ отождествляется с точкой $b/a$ на прямой $Y$.

**Предложение 3.2.6.** *Схема $\mathbb{P}^1_k$ не аффинна.*

*Доказательство.* Вычислим глобальные сечения структурного пучка $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}$. Их можно понимать как пары сечений на $X$ и на $Y$, согласованные на пересечении. Сечение на $X$ — это многочлен $f(t)$. Сечение на $Y$ — это многочлен $g(u)$. Ограничения их на $X$ и на $Y$ — это снова многочлены $f(t)$ и $g(u)$ (но понимаемые уже как дроби, у которых в знаменателе могут стоять степени $t$ и $u$, соответственно). Склейка осуществляется с помощью изоморфизма $t \mapsto 1/u$, поэтому наше условие согласованности состоит в том, что $f(t) = g(1/t)$. Но если выражение является многочленом от $t$ и одновременно многочленом от $1/t$, то это константа. Поэтому $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = k$. Если бы схема $\mathbb{P}^1$ была аффинной, то это был бы $\operatorname{Spec} \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = \operatorname{Spec} k$, то есть, одна точка. Однако, мы знаем, что на $\mathbb{P}^1$ гораздо больше точек. □

## 3.3 Проективное пространство

Вдохновившись конструкцией проективной прямой, мы определим **проективное $n$-мерное пространство над полем** $k$, обозначаемое через $\mathbb{P}^n_k$, путем склейки аффинных пространств $\mathbb{A}^n_k$ в количестве $n + 1$ штуки. Чтобы не запутаться, нужно выбрать удобные обозначения.

Мы покроем $\mathbb{P}^n$ открытыми подмножествами $U_i$, $i = 0, \dots, n$, каждое из которых изоморфно $\mathbb{A}^n$ с координатами $x_{0/i}, \dots, x_{(i-1)/i}, x_{(i+1)/i}, \dots, x_{n/i}$. Мы добавим к ним лишнюю координату $x_{i/i}$, и будем записывать

$$U_i = \operatorname{Spec} k[x_{0/i}, \dots, x_{n/i}]/(x_{i/i} - 1).$$

Главное открытое подмножество $D(x_{j/i}) \subseteq U_i$ мы склеим с главным открытым подмножеством $D(x_{i/j}) \subseteq U_j$ при помощи изоморфизма, индуцированного изоморфизмом колец

$$\operatorname{Spec} k[x_{0/i}, \dots, x_{n/i}, 1/x_{j/i}]/(x_{i/i} - 1) \cong \operatorname{Spec} k[x_{0/j}, \dots, x_{n/j}, 1/x_{i/j}]/(x_{j/j} - 1),$$

отправляющим $x_{k/i}$ в $x_{k/j}/x_{i/j}$. Обратный изоморфизм, разумеется, переводит $x_{k/j}$ в $x_{k/i}/x_{j/i}$.

**Упражнение 3.3.1.** Проверьте, что эти изоморфизмы согласованы на тройных пересечениях.

**Определение 3.3.2.** На самом деле, определение выше никак не зависит от того, что $k$ — поле. Поэтому можно определить **проективное $n$-мерное пространство над** $A$ для любого кольца $A$.

**Упражнение 3.3.3.** Покажите, что на $\mathbb{P}^n_k$ нет глобальных сечений, кроме констант (то есть, $\Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}) \cong k$), и потому схема $\mathbb{P}^n_k$ не аффинна (при $n > 0$). Указание: достаточно рассмотреть лишь два открытых множества из покрытия.

**Упражнение 3.3.4.** Покажите, что если поле $k$ алгебраически замкнуто, то замкнутые точки $\mathbb{P}^n_k$ можно представить в виде $[a_0 : \dots : a_n]$, где не все $a_i \in k$ равны нулю, и точка $[a_0 : \dots : a_n]$ отождествляется с $[\lambda a_0 : \dots : \lambda a_n]$ для ненулевых $\lambda$.

## 3.4 Проективные схемы

**Определение 3.4.1.** **$\mathbb{Z}$-Градуированное кольцо** — это кольцо, которое относительно сложения является абелевой группой вида $S_\bullet = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i$, причем умножение *уважает градуировку*, то есть, переводит $S_m \times S_n$ в $S_{m+n}$ для всех $m, n \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что при этом $S_0$ — подкольцо в $S_\bullet$, и $S_\bullet$ является $S_0$-алгеброй. Элементы $S_n$ называютсяо**днородными элементами**; у ненулевых однородных элементов есть однозначно определенная **степень**. Идеал называется **однородным** (или **градуированным**), если он порождается однородными элементами.

**Упражнение 3.4.2.** Идеал $I$ в $\mathbb{Z}$-градуированном кольце $S_\bullet$ является однородным тогда и только тогда, когда он содержит однородные компоненты всех своих элементов. Таким образом, $I$ (как абелева группа) представляется в виде $I = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} I_n$, где $I_n = I \cap S_n$.

**Упражнение 3.4.3.** Покажите, что однородный идеал $I$ в $\mathbb{Z}$-градуированном кольце $S_\bullet$ прост тогда и только тогда, когда $I \neq S_\bullet$, и для любых однородных элементов $a, b \in S_\bullet$ из $ab \in I$ следует, что $a \in I$ или $b \in I$.

Для мультипликативного множества $T \subseteq S_\bullet$, состоящего из однородных элементов, на локализации $T^{-1}S_\bullet$ можно ввести $\mathbb{Z}$-градуировку.

**Определение 3.4.4.** $\mathbb{Z}$-градуированное кольцо называется **$\mathbb{Z}^{\geqslant 0}$-градуированным**, если $S_n = 0$ при $n < 0$. В дальнейшем мы будем называть $\mathbb{Z}^{\geqslant 0}$-градуированное кольцо просто **градуированным**.

Ключевой пример: для кольца $A$ можно рассмотреть градуированное кольцо $S_\bullet = A[x_0, \dots, x_n]$ со *стандартной градуировкой*: степень монома $x_0^{k_0} \dots x_n^{k_n}$ равна $k_0 + \dots + k_n$, и однородная компонента $S_i$ порождается (как абелева группа) всеми мономами степени $i$. Более того, можно взять произвольный однородный идеал $I$ в $A[x_0, \dots, x_n]$ такой, что $I \cap S_0 = 0$, и рассмотреть градуированное кольцо $T_\bullet = A[x_0, \dots, x_n]/I$. У полученного кольца также $T_0 = A$; вообще, градуированное кольцо $T_\bullet$, у которого $T_0 = A$, называется **градуированным кольцом над** $A$.

Подмножество $S_+ = \bigoplus_{i>0} S_i \subseteq S_\bullet$ градуированного кольца $S_\bullet$ является [градуированным] идеалом; он называется **несущественным идеалом** в $S$. Если этот идеал конечно порожден, кольцо $S_\bullet$ называется **конечно порожденным градуированным кольцом над** $A$; если $S_\bullet$ порождается (как $A$-алгебра) множеством $S_1$, говорят, что $S_\bullet$ **порождается в степени** 1.

Сейчас по каждому градуированному кольцу $S_\bullet$ мы построим схему $\operatorname{Proj} S_\bullet$. Первый важный пример, который полезно представлять при этом — это $\operatorname{Proj} A[x_0, \dots, x_n] = \mathbb{P}^n_A$. Второй важный пример таков: пусть $f \in A[x_0, \dots, x_n]$ — однородный многочлен. Тогда обращение значения $f([a_0 : \dots : a_n])$ в 0 не зависит от выбора однородных координат точки $[a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n$. Окажется, что $\operatorname{Proj} A[x_0, \dots, x_n]/(f) = \{f = 0\} \subseteq \mathbb{P}^n_A$ — «множество нулей» этого многочлена (в том же смысле, в каком множество нулей многочлена $f \in A[x_1, \dots, x_n]$ — это $\operatorname{Spec} A[x_1, \dots, x_n]/(f) \subseteq \mathbb{A}^n_A$).

Как и для аффинных схем, мы сначала построим множество $\operatorname{Proj} S_\bullet$, потом заведем на нем топологию, а потом — пучок колец. Выше мы определили $\mathbb{P}^n_k$ с помощью покрытия выделенными аффинными пространствами. В общем случае никаких выделенных аффинных кусков нет, поэтому нужно рассматривать все такие куски одновременно. А именно, для каждого однородного элемента $f \in S_+$ можно рассмотреть $\mathbb{Z}$-градуированное кольцо $(S_\bullet)_f$ (в котором элемент $1/f$ имеет степень $-\deg f$), а в нем — множество однородных элементов степени 0:

$$\operatorname{Spec}((S_\bullet)_f)_0.$$

Проварьируя $f$, мы получим открытые множества, которые будут образовывать аффинное покрытие $\operatorname{Proj} S_\bullet$. Например, для $S_\bullet = k[x_0, \dots, x_n]$ и $f = x_i$, мы получим в точности кольцо $k[x_{0/i}, \dots, x_{n/i}]/(x_{i/i} - 1)$, которое помогло нам в построении проективного пространства.

Все эти множества вида $\operatorname{Spec}((S_\bullet)_f)_0$ для всех $f$ на самом деле можно реализовать как подмножества одного множества.

**Упражнение 3.4.5.** Установите биекцию между простыми идеалами в $((S_\bullet)_f)_0$ и однородными простыми идеалами в $(S_\bullet)_f$.

Таким образом, точки в $((S_\bullet)_f)_0$ реализуются как однородные простые идеалы в $(S_\bullet)_f$. Обозначим через $\operatorname{Proj} S_\bullet$ множество всех однородных простых идеалов в $S_\bullet$, не содержащих несущественных идеалов $S_+$.

**Упражнение 3.4.6.** Интерпретируйте множество простых идеалов в $((S_\bullet)_f)_0$ как подмножество в $\operatorname{Proj} S_\bullet$.

Мы построили $\operatorname{Proj} S_\bullet$ как множество; введем на нем топологию. Как и в аффинном случае, если $T$ — множество однородных элементов $S_\bullet$ положительной степени, можно определить $V(T) \subseteq \operatorname{Proj} S_\bullet$ как множество однородных простых идеалов, содержащих $T$ (но не содержащих $S_+$). В частности, определены $V(f)$ для элемента $f \in S_\bullet$ положительной степени, и $V(I)$ для однородного идеала, содержащегося в $S_+$. Определим **проективное главное открытое подмножество** $D(f) = \operatorname{Proj} S_\bullet - V(f)$

**Упражнение 3.4.7.** Докажите, что при отождествлении из упражнения 3.4.6 множеству $\operatorname{Spec}((S_\bullet)_f)_0$ соответствует подмножество $D(f) \subseteq \operatorname{Proj} S_\bullet$.

**Упражнение 3.4.8.** Проверьте, что подмножества $V(I) \subseteq \operatorname{Proj} S_\bullet$ являются замкнутыми подмножествами топологии на $\operatorname{Proj} S_\bullet$ (она называется **топологией Зариского**), а проективные главные открытые подмножества $D(f)$ (где $f$ пробегает однородные элементы $S_+$) образуют базу этой топологии.

**Упражнение 3.4.9.** Пусть $S_\bullet$ — градуированное кольцо, $I \leqslant S_\bullet$ — однородный идеал. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

1. $V(I) = \varnothing$,

2. если $\{f_j\}_{j \in J}$ — однородные элементы, порождающие $I$, то $\bigcup D(f_i) = \operatorname{Proj} S_\bullet$.

3. $\sqrt{I} \supseteq S_+$.

**Упражнение 3.4.10.** Проверьте, что при отождествлении из упражнения 3.4.7 топология Зариского на $\operatorname{Proj} S_\bullet$ ограничивается на топологию Зариского на $\operatorname{Spec}((S_\bullet)_f)_0$.

Для завершения конструкции $\operatorname{Proj} S_\bullet$ мы должны склеить аффинные куски: нужно определить структурный пучок на $\operatorname{Proj} S_\bullet$ так, чтобы при ограничении на $D(f)$ получался структурный пучок схемы $\operatorname{Spec}((S_\bullet)_f)_0$,

**Упражнение 3.4.11.** Пусть $f, g \in S_+$ — ненулевые однородные элементы. Опишите изоморфизм между $\operatorname{Spec}((S_\bullet)_{fg})_0$ и главным открытым подмножеством $D(g^{\deg f}/f^{\deg g}) \subseteq \operatorname{Spec}((S_\bullet)_f)_0$.

Таким образом, мы можем отождествить $\operatorname{Spec}((S_\bullet)_{fg})_0$ с главным открытым подмножеством в $\operatorname{Spec}((S_\bullet)_f)_0$ и с главным открытым подмножеством в $\operatorname{Spec}((S_\bullet)_g)_0$. Несложно проверить, что такие попарные склейки согласованы на тройных пересечениях.

**Определение 3.4.12.** Определим $n$-**мерное проективное пространство** над кольцом $A$:

$$\mathbb{P}^n_A = \operatorname{Proj} A[x_0, \dots, x_n].$$

**Упражнение 3.4.13.** Проверьте, что определение 3.4.12 согласовано с определением из раздела 3.3.

**Определение 3.4.14.** Если $S_\bullet$ — конечно порожденное градуированное кольцо над $A$, схема $\operatorname{Proj} S_\bullet$ называется **проективной схемой над** $A$ (или **проективной** $A$-**схемой**). Открытая подсхема проективной $A$-схемы называется **квазипроективной** $A$-**схемой**.

## 3.5 Топологические свойства схем

**Упражнение 3.5.1.** Докажите, что схема $\mathbb{P}^n_k$ неприводима.

**Определение 3.5.2.** Топологическое пространство $X$ называется **квазиотделимым**, если пересечение любых двух квазикомпактных открытых подмножеств в $X$ квазикомпактно.

**Определение 3.5.3.** Покажите, что схема квазиотделима тогда и только тогда, когда пересечение любых двух аффинных открытых подсхем в ней является объединением конечного числа открытых аффинных подсхем.

**Упражнение 3.5.4.** Пусть $X = \operatorname{Spec} k[x_1, x_2, \dots]$, и пусть $U = X - [\mathfrak{m}]$, где $\mathfrak{m} = (x_1, x_2, \dots)$ — максимальный идеал в $k[x_1, x_2, \dots]$. Рассмотрим схему, полученную из двух копий $X$ склеиванием по $U$ (*бесконечномерное аффинное пространство с удвоенной точкой*). Покажите, что полученная схема не является квазиотделимой.

## 3.6 Приведенные схемы

**Определение 3.6.1.** Кольцо называется **приведенным**, если в нем нет ненулевых нильпотентов. Схема $X$ называется **приведенной**, если кольцо $\mathcal{O}_X(U)$ приведенное для каждого открытого множества $U \subseteq X$.

**Упражнение 3.6.2.** Покажите, что приведенность можно проверять на стеблях: схема приведена тогда и только тогда, когда все ее стебли приведены. Таким образом, если два глобальных сечения структурного пучка $\mathcal{O}_X$ приведенной схемы $X$ совпадают во всех точках, то они равны.

**Упражнение 3.6.3.** Докажите, что спектр приведенного кольца — приведенная схема.

**Определение 3.6.4.** Схема называется **целой**, если она непуста, и кольцо $\mathcal{O}_X(U)$ является областью целостности для любого непустого открытого $U \subseteq X$.

**Упражнение 3.6.5.** Покажите, что схема целая тогда и только тогда, когда она приведена и неприводима.

**Определение 3.6.6.** Пусть $X$ — целая схема, и пусть $\eta$ — общая точка $X$ (она существует в силу неприводимости $X$). Пусть $\operatorname{Spec} A$ — любое непустое аффинное открытое подмножество в $X$. Тогда $\eta$ является общей точкой $\operatorname{Spec} A$, и потому соответствует нулевому идеалу в $\operatorname{Spec} A$ (напомним, что $A$ при этом — область целостности). Поэтому стебель $\mathcal{O}_{X,\eta}$ структурного пучка в общей точке отождествляется с $\operatorname{Frac}(A)$, полем частных кольца $A$. Это поле называется **полем функций** схемы $X$ и обозначается через $K(X)$. Оно, разумеется, не зависит от выбора непустого аффинного открытого $\operatorname{Spec} A$.

## 3.7 Проверка свойств на аффинных покрытиях

Следующее утверждение позволяет «переходить» между аффинными схемами, покрывающими схему $X$.

**Предложение 3.7.1.** *Пусть* $\operatorname{Spec} A$, $\operatorname{Spec} B$ *— аффинные открытые подсхемы в схеме* $X$. *Тогда* $\operatorname{Spec} A \cap \operatorname{Spec} B$ *является объединением открытых подмножеств, которые одновременно являются главынми открытыми подсхемами и в* $\operatorname{Spec} A$, *и в* $\operatorname{Spec} B$.

*Доказательство.* Нам нужно показать, что любая точка $x \in \operatorname{Spec} A \cap \operatorname{Spec} B$ имеет некоторую открытую окрестность, которая одновременно главная в $\operatorname{Spec} A$ и в $\operatorname{Spec} B$. Пусть для начала $\operatorname{Spec} A_f$ (для некоторого $f \in A$) — главное открытое подмножество в $\operatorname{Spec} A$, содержащееся в $\operatorname{Spec} A \cap \operatorname{Spec} B$, и содержащее точку $x$. Далее, пусть $\operatorname{Spec} B_g$ (для некоторого $g \in B$ — главное открытое подмножество в $\operatorname{Spec} B$, содержащееся в $\operatorname{Spec} A_f$, и содержащее точку $x$. Рассмотрим ограничение сечения $g \in B = \Gamma(\operatorname{Spec} B, \mathcal{O}_X)$ на $A_f$. Мы получим элемент $g' \in \Gamma(\operatorname{Spec} A_f, \mathcal{O}_X) = A_f$. Пусть $y \in \operatorname{Spec} A_f$; заметим, что сечение $g'$ обращается в $0$ в точке $y$ тогда и только тогда, когда сечение $g$ обращается в $0$ в точке $y$. Поэтому $\operatorname{Spec} B_g = \operatorname{Spec} S_f - \{[\mathfrak{p}] \mid \mathfrak{p} \trianglelefteq A_f, g' \in \mathfrak{p}\} = \operatorname{Spec}(A_f)_{g'}$. Запишем $g' = g''/f^n$ для некоторого $g'' \in A$; тогда $\operatorname{Spec}(A_f)_{g'} = \operatorname{Spec} A_{fg''}$. Таким образом, $\operatorname{Spec} B_g = \operatorname{Spec} A_{fg''}$ — открытое подмножество, главное в $\operatorname{Spec} A$ и в $\operatorname{Spec} B$. $\square$

**Определение 3.7.2.** Пусть $P$ — свойство, которым обладают некоторые аффинные открытые подмножества схемы $X$. Свойство $P$ называется **аффинно-локальным**, если

1. из того, что $\operatorname{Spec} A \subseteq X$ обладает свойством $P$, следует, что и $\operatorname{Spec} A_f \subseteq X$ обладает свойством $P$ для всех $f \in A$;

2. из того, что $\operatorname{Spec} A_{f_i} \subseteq X$ обладает свойством $P$ для некоторого набора элементов $f_1, \ldots, f_n$, порождающих единичный идеал кольца $A$, следует, что и $\operatorname{Spec} A$ обладает свойством $P$.

**Предложение 3.7.3.** *Предположим, что $P$ — аффинно-локальное свойство некоторых аффинных открытых подмножеств схемы $X$, и у схемы $X$ есть покрытие аффинными открытыми подмножествами, обладающими свойством $P$. Тогда любое аффинное открытое подмножество $X$ обладает свойством $P$.*

*Доказательство.* Пусть $X = \operatorname{Spec} A_i$, где все $\operatorname{Spec} A_i$ обладают свойством $P$, и пусть $\operatorname{Spec} A$ — произвольное аффинное открытое подмножество в $X$. Воспользовавшись предложением 3.7.1, покроем $\operatorname{Spec} A$ главными открытыми подмножествами $\operatorname{Spec} A_{g_j}$, каждое из которых открыто в некотором $\operatorname{Spec} A_i$, и выберем из этого покрытия конечное подпокрытие (по квазикомпактности $\operatorname{Spec} A$). Первое свойство из определения аффинно-локальности теперь говорит, что $\operatorname{Spec} A_{g_j}$ обладает свойством $P$ при всех $j$. Тогда по второму свойству, $\operatorname{Spec} A$ обладает свойством $P$ $\square$

# 4 Морфизмы схем

## 4.1 Морфизмы локально окольцованных пространств

Определение морфизма локально окольцованных пространств, которое сейчас появится, можем показаться чрезвычайно технически нагруженным. Чтобы не потеряться в нем, полезно помнить о двух основных мотивациях:

- Алгебраическая мотивация: мы видели, что каждый гомоморфизм колец $A \to B$ индуцирует непрерывное отображение топологических пространств $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$. Хотелось бы, чтобы это оказалось морфизмом аффинных схем, и более того, чтобы *все* морфизмы из $\operatorname{Spec} B$ в $\operatorname{Spec} A$ имели такой вид.

- Вспомним нашу аналогию с дифференциальными многообразиями. Пусть $\pi\colon X \to Y$ — морфизм дифференциальных многообразий. Тогда любую дифференцируемую функцию $f\colon Y \to \mathbb{R}$ можно превратить в дифференцируемую функцию на $X$ посредством композиции: $f \mapsto f \circ \pi$. Более того, если $U \subseteq Y$ — открытое подмножество в $Y$, то имеется естественное отображение $\Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$. Это отображение согласованно с ограничениями, поэтому на самом деле имеется морфизм $\mathcal{O}_Y \to \pi_*\mathcal{O}_X$ пучков на $Y$.

Морфизм схем $X \to Y$ должен быть в первую очередь морфизмом окольцованных пространств (то есть, учитывать структуру пучков колец на $X$ и на $Y$). Итак, пусть $X, Y$ — окольцованные пространства, и пусть $\pi\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Сечения пучка $\mathcal{O}_Y$ на открытом множестве $U \subseteq Y$ — это теперь не «реальные» функции на $U$, а «виртуальные»: это просто кольцо, которое нам хочется трактовать как кольцо функций на $U$. Поэтому мы не можем взять «композицию» такого сечения с $\pi$ и получить сечение на $\pi^{-1}(U)$ пучка $\mathcal{O}_X$. Это сопоставление функции ее пулбэка ниоткуда не возьмется само по себе — поэтому его *необходимо включить в определение морфизма окольцованных пространств.*

**Определение 4.1.1.** Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ — окольцованные пространства. **Морфизмом окольцованных пространств** называется пара $(\pi, \pi^\sharp)$, состоящая из непрерывного отображения $\pi\colon X \to Y$ топологических пространств вместе с морфизмом пучков колец $\pi^\sharp\colon \mathcal{O}_Y \to \pi_*\mathcal{O}_X$ (или, по двойственности, морфизмом $\pi^\flat\colon \pi^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$).

**Упражнение 4.1.2.** Пусть $\pi\colon X \to Y$ — морфизм окольцованных пространств, и пусть $p \in Y$. Постройте естественный гомоморфизм между стеблями $(\mathcal{O}_Y)_p \to (\mathcal{O}_X)_{\pi^{-1}(p)}$.

**Упражнение 4.1.3.** Пусть $\varphi\colon B \to A$ — гомоморфизм колец. Для определения морфизма окольцованных пространств $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B$ мы должны задать непрерывное отображение топологических пространств (оно было определено выше) и морфизм пучков колец $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B} \to \pi_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ на $\operatorname{Spec} B$. Для этого достаточно задать морфизм пучков на базе главных открытых подмножеств в $\operatorname{Spec} B$. Пусть $D(g) \subseteq \operatorname{Spec} B$ — какое-нибудь главное открытое ($g \in B$). Тогда $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(D(g)) = B_g$, и $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(\pi^{-1} D(g)) = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(\varphi(g))) = A_{\varphi(g)}$. Проверьте, что естественное отображение $B_g \to A_{\varphi(g)}$ корректно задает морфизм пучков.

**Пример 4.1.4.** Пусть гомоморфизм колец $\mathbb{C}[y] \to \mathbb{C}[x]$ задан формулой $y \mapsto x^2$. Как выглядит морфизм окольцованных пространств $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x] \to \operatorname{Spec} \mathbb{C}[y]$? Образ замкнутой точки $[(x-3)]$, например, равен $[(y-9)]$. Прообраз замкнутой точки $[(y-4)]$ — это простые идеалы $\mathbb{C}[x]$, содержащие идеал $(x^2-4)$, то есть, идеалы $(x-2)(x+2)$. Поэтому прообраз точки 4, как и ожидалось, состоит из двух точек $\pm 2$. Что происходит с функциями при пулбэке? Функция $3/(y-4)$ на $\mathbb{A}^1 - \{4\}$ переходит, конечно же, в функцию $3/(x^2-4)$ на $\mathbb{A}^1 - \{-2, 2\}$.

После этого появляется надежда определить морфизм схем как морфизм окольцованных пространств. Однако, при таком определении между аффинными схемами $\operatorname{Spec} B$ и $\operatorname{Spec} A$ возникают «лишние» морфизмы, которые не соответствуют никаким гомоморфизмам колец, с которыми придется побороться. Один из вариантов — определить морфизм схем как морфизм окольцованных пространств, который локально (на аффинном покрытии) индуцирован гомоморфизмами колец (способом, описанным в упражнении 4.1.3). С таким определением, впрочем, не очень удобно работать. Второй вариант, который мы опишем ниже (и который равносилен первому) основан на следующем наблюдении. Напомним, что аффинная схема (и, как следствие, вообще любая схема) является не просто окольцованным пространством, а *локально окольцованным* пространством.

Пусть $(Y, \mathcal{O}_Y)$ — локально окольцованное пространство. Напомним, что мы интерпретируем сечения $s \in \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$ как «функции» на $V$, и называем *значением* функции $s$ в точке $x \in V$ класс этого сечения в поле вычетов $\kappa(y) = \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y$, где $\mathfrak{m}_y$ — максимальный идеал локального кольца $\mathcal{O}_{Y,y}$. Таким образом, сечение $s$ *обращается в нуль* в точке $y$ тогда и только тогда, когда росток $s_y$ этого сечения лежит в максимальном идеале $\mathfrak{m}_y$. Пусть теперь $(X, \mathcal{O}_X)$ — еще одно окольцованное пространство, и пусть $(\pi, \pi^\sharp)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ — морфизм окольцованных пространств. Морфизм пучков $\pi^\sharp$ мы интерпретируем как «пулбэк», который переводит функции на $Y$ в функции на $X$. Логично предположить, что если функция $s$ обращалась в нуль в точке $y \in Y$, то ее «пулбэк» $\pi^\sharp(s)$ будет обращаться в нуль во всех точках $x \in X$ таких, что $\pi(x) = y$. Следующее упражнение показывает, что это не так.

**Упражнение 4.1.5.** Напомним, что аффинная схема $\operatorname{Spec} k[y]_{(y)}$ состоит из двух точек, $[(0)]$ и $[(y)]$. Вторая точка замкнутая, а первая нет (это общая точка всей схемы). Опишите морфизм окольцованных пространств $\operatorname{Spec} k(x) \to \operatorname{Spec} k[y]_{(y)}$, который отправляет единственную точку $\operatorname{Spec} k(x)$ в замкнутую точку $[(y)]$, а на глобальных сечениях отправляет $k$ в $k$ с помощью тождественного отображения, а $y$ — в $x$. Покажите, что этот морфизм окольцованных пространств не соответствует никакому гомоморфизму колец (см. упражнение 4.1.3).

Теперь мы готовы дать определение морфизма *локально окольцованных* пространств $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$. Неформально говоря, оно говорит, что если $x \mapsto y$ и функция обращается в нуль в точке $y$, то ее пулбэк обращается в нуль в точке $x$.

**Определение 4.1.6.** Морфизм окольцованных пространств $(\pi, \pi^\sharp)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ называется **морфизмом локально окольцованных пространств**, если для любых точек $x \in X$, $y \in Y$ таких, что $\pi(x) = y$ индуцированный гомоморфизм $\pi^\sharp\colon \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ локальных колец является *локальным гомоморфизмом*, то есть, переводит максимальный идеал первого кольца внутрь максимального идеала второго кольца.

**Упражнение 4.1.7.** Пусть $R$, $S$ — локальные кольца, и $\mathfrak{m}_R$, $\mathfrak{m}_S$ — их максимальные идеалы. Пусть $f\colon R \to S$ — гомоморфизм колец. Докажите, что следующие два условия равносильны:

1. гомоморфизм $f$ локален, то есть, $f(\mathfrak{m}_R) \subseteq \mathfrak{m}_S$;

2. $f^{-1}(\mathfrak{m}_S) = \mathfrak{m}_R$.

**Упражнение 4.1.8.** Покажите, что морфизм окольцованных пространств $\pi\colon \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B$, построенный по гомоморфизму колец $f\colon B \to A$ (как в упражнении 4.1.3), является морфизмом локально окольцованных пространств.

**Теорема 4.1.9.** *Пусть $(\pi, \pi^\sharp)\colon \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B$ — морфизм локально окольцованных пространств, и пусть морфизм пучков $\pi^\sharp$ задает гомоморфизм колец*

$$f\colon B = \Gamma(\operatorname{Spec} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}) \to \Gamma(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}) = A$$

*на глобальных сечениях. Тогда морфизм окольцованных пространств, индуцированный $f$ (как в упражнении 4.1.3), совпадает с $(\pi, \pi^\sharp)$.*

*Доказательство.* См. [V, Key Proposition 6.3.2]. □

## 4.2 Морфизмы схем

**Определение 4.2.1.** Пусть $X$, $Y$ — схемы. Морфизм локально окольцованных пространств $X \to Y$ называется **морфизмом схем**. Схемы и морфизмы схем образуют **категорию схем**, которая будет обозначаться через Sch.

**Упражнение 4.2.2.** Постройте морфизм схем $\mathbb{A}^{n+1}_k - \{(0, \ldots, 0\} \to \mathbb{P}^n_k$, который на замкнутых точках выглядит так: $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto [x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$. Что будет, если заменить здесь поле $k$ на произвольное кольцо $A$?

**Упражнение 4.2.3.** Покажите, что морфизмы схем $X \to \operatorname{Spec} A$ взаимно однозначно соответствуют гомоморфизмам колец $A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. *Подсказка*: Очевидно, что это так для аффинного $X$; осталось доказать, что морфизмы схем склеиваются в следующем смысле: если схема $X$ покрыта схемами $\{X_i\}$, то задание морфизма схем $X \to Y$ равносильно заданию набора морфизмов схем $\{X_i \to Y\}$, согласованных на пересечениях.

**Следствие 4.2.4.** *Для любой схемы $X$ имеется канонический морфизм схем $X \to \operatorname{Spec} \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, который является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $X$ аффинна.*

**Следствие 4.2.5.** *Схема $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ является финальным объектом категории схем, то есть, для любой схемы $X$ существует единственный морфизм $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.*

**Замечание 4.2.6.** Мы построили [контравариантный] функтор Spec из категории колец в категорию локально окольцованных пространств, и [контравариантный] функтор $\Gamma$ из категории локально окольцованных пространств в категорию колец. На самом деле, эти функторы сопряжены: $\Gamma$ — левый сопряженный к Spec. Для удобства можно перейти к двойственной категории и говорить о сопряженных ковариантных функторах между категорией, противоположной категории колец, и категорией локально окольцованных пространств. Единицу этого сопряжения мы видели в следствии 4.2.4 (а где коединица)? Если ограничиться меньшей подкатегорией аффинных схем, мы получаем анти-эквивалентность: категория, противоположная к категории колец, эквивалентна категории аффинных схем (это доказано в упражнении 4.1.3 и теореме 4.1.9). Если мы теперь отождествим категорию $\mathrm{Rings}^{\mathrm{op}}$ с подкатегорией аффинных схем $\mathrm{AffSch} \subseteq \mathrm{Sch}$, можно интерпретировать функтор Spec как «забывающий» функтор из AffSch в Sch, а $\Gamma$ — как *левый сопряженный к забывающему*. Кроме того, мы могли начать с функтора $\Gamma$ (это же просто функтор глобальных сечений) и определить Spec как правый сопряженный к нему. Конечно, нужно доказывать, что этот правый сопряженный существует, но здесь можно воспользоваться какой-нибудь известной категорной техникой (например, теоремой Фрейда о сопряженном функторе). Это не избавит нас от некоторой технической работы, но поставит ее в четкий категорный контекст.

**Упражнение 4.2.7.** Пусть $X$ — схема, $x \in X$ — произвольная точка на ней. Постройте канонический морфизм $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to X$. *Подсказка*: сделайте это для аффинной схемы $X$ и покажите, что построенный морфизм не зависит от выбора аффинной открытой подсхемы, содержащей $x$.

**Упражнение 4.2.8.** Пусть $X$ — схема, $x \in X$ — произвольная точка на ней. Постройте канонический морфизм $\operatorname{Spec} \kappa(x) \to X$. Этот морфизм часто будет обозначаться так: $x \to X$.

## 4.3 Схемы над базой

**Определение 4.3.1.** Пусть $k$ — поле, $(X, \mathcal{O}_X)$ — схема, и пусть для любого открытого подмножества $U \subseteq X$ кольцо $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ снабжено структурой $k$-алгебры так, что все гомоморфизмы ограничения являются гомоморфизмами $k$-алгебр. Тогда $X$ (вместе с указанными данными) называется **схемой над $k$**. Если $Y$ — еще одна схема над $k$, то **морфизмом схем над $k$** называется морфизм схем $(\pi, \pi^\sharp)$ такой, что все гомморфизмы колец, составляющие морфизм пучков $\pi^\sharp$, являются гомоморфизмами $k$-алгебр.

**Упражнение 4.3.2.** Покажите, что задание структуры схемы над $k$ на схеме $X$ равносильно заданию морфизма схем $X \to \operatorname{Spec} k$, а морфизм схем $X \to Y$ является морфизмом $k$-схем тогда и только тогда, когда он коммутирует с этими морфизмами $X \to \operatorname{Spec} k$ и $Y \to \operatorname{Spec} k$.

**Определение 4.3.3.** Пусть $S$ — произвольная схема. **Схемой над $S$** (или **$S$-схемой**) называется схема $X$ вместе с морфизмом $X \to S$ (который называется **структурным морфизмом**). В этом случае $S$ часто называется **базовой схемой**. Если $X \to S$, $Y \to S$ — две схемы над $S$, морфизм схем $X \to Y$ называется **морфизмом схем над $S$**, если диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Схемы над $S$ образуют категорию, которую мы будем обозначать через $\mathrm{Sch}/S$ или $\mathrm{Sch}_S$.

Таким образом, схема над $k$ в смысле определения 4.3.1 — это в точности схема над $\operatorname{Spec} k$ в смысле определения 4.3.3. Вообще, если $A$ — кольцо, мы часто говорим «схема над $A$» или «$A$-схема» вместо «схема над $\operatorname{Spec} A$».

**Упражнение 4.3.4.** Покажите, что $S$ (вместе с тождественным морфизмом $\mathrm{id}_S$) — финальный объект категории схем над $S$.

**Упражнение 4.3.5.** Пусть $S_\bullet$ — конечно порожденная градуированная $A$-алгебра. Опишите естественный структурный морфизм $\operatorname{Proj} S_\bullet \to \operatorname{Spec} A$.

## 4.4 Схема как функтор

**Определение 4.4.1.** Пусть $Z$ — схема. **$Z$-точками схемы** $X$ называются морфизмы схем $Z \to X$. Обозначение: $X(Z) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(Z, X)$. Если $A$ — кольцо, то $\operatorname{Spec} A$-точки схемы $X$ называются также **$A$-точками схемы** $X$. Обозначение: $X(A) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(\operatorname{Spec} A, X)$. Если $X$ — схема над некоторой базой $S$, то в этом определении предполагается, что все морфизмы коммутируют со структурными морфизмами в $S$. То есть, для $S$-схемы $Z$ определяется $X(Z) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}\,/S}(Z, X)$.

**Упражнение 4.4.2.** Пусть $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$, и пусть $X = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_m)$. Пусть $A$ — $k$-алгебра. Докажите, что $A$-точки схемы $X$ (рассматриваемой как схема над $k$) — это в точности наборы $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ такие, что $f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$.

**Упражнение 4.4.3.** Покажите, что морфизм схем $X \to Y$ индуцирует отображение множества $Z$-точек $X(Z) \to Y(Z)$ для любой схемы $Z$.

**Упражнение 4.4.4.** Покажите, что морфизм схем $X \to Y$ не определяется своими значениями на точках $X$ как топологического пространства. Покажите, что морфизм схем $X \to Y$ *определяется* индуцированными отображениями $X(Z) \to Y(Z)$ на $Z$-точках, если $Z$ пробегает все схемы. *Подсказка*: лемма Йонеды.

**Упражнение 4.4.5.** Пусть $X$ — схема, $A$ — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Предположим, что задан морфизм схем $\pi\colon \operatorname{Spec} A \to X$, отправляющий замкнутую точку $[\mathfrak{m}]$ в $x \in X$. Покажите, что любое открытое подмножество в $X$, содержащее точку $x$, содержит образ $\pi$. Установите биекцию между $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(\operatorname{Spec} A, X)$ и множеством пар $(x, f)$, где $x \in X$, а $f\colon \mathcal{O}_{X,x} \to A$ — локальный гомоморфизм.

**Упражнение 4.4.6.** Пусть $A$ — кольцо, $X$ — $A$-схема, и $f_0, f_1, \ldots, f_n$ — функции на $X$, не обращающиеся в нуль одновременно. Постройте морфизм $A$-схем $[f_0 : f_1 : \cdots : f_n]\colon X \to \mathbb{P}^n_A$. Покажите, что этот морфизм не изменится, если домножить все функции $f_0, f_1, \ldots, f_n$ на одну и ту же функцию $g$, не обращающуюся в нуль нигде на $X$.

**Упражнение 4.4.7.** Пусть $X$ — схема. Покажите, что существует биекция между морфизмами $X \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ и глобальными сечениями структурного пучка $\mathcal{O}_X$. Таким образом, сечения структурного пучка интерпретируются как функции на $X$: приятно получить реальное подтверждение неформальной интуиции, на которую мы часто ссылались раньше.

## 4.5 Произведение схем

**Определение 4.5.1.** Пусть $X, Y, Z$ — схемы, и пусть заданы морфизмы $\pi\colon X \to Z$, $\rho\colon Y \to Z$. **Расслоенным произведением** $X$ **и** $Y$ **над** $Z$ называется категорное произведение $X$ и $Y$ над $Z$. Обозначение: $X \times_Z Y$.

Иными словами, расслоенное произведение $X$ и $Y$ над $Z$ — это схема $X \times_Z Y$ вместе с морфизмами $\pi_1\colon X \times_Z Y \to X$, $\pi_2\colon X \times_Z Y \to Y$ такими, что $f \circ \pi_1 = g \circ \pi_2$, и тройка $(X \times_Z Y, \pi_1, \pi_2)$ универсальна среди троек с таким свойством. Это означает, что для любой схемы

T и морфизмов $f' \colon T \to X$, $g' \colon T \to Y$ таких, что $f \circ f' = g \circ g'$, существует единственный морфизм $(f', g') \colon T \to X \times_Z Y$ такой, что $f' = \pi_1 \circ (f', g')$ и $g' = \pi_2 \circ (f', g')$.

При этом морфизм $\pi_1$ иногда называется **пулбэком морфизма** $g$ **вдоль** $f$, а $\pi_2$ — **пулбэком морфизма** $f$ **вдоль** $g$.

Конечно, после такого определения хотелось бы показать, что расслоенное произведение схем действительно существует.

**Упражнение 4.5.2.** Пусть схемы $X, Y, Z$ аффинны: $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, $Z = \operatorname{Spec} C$. Покажите, что расслоенное произведение $X$ и $Y$ над $Z$ существует и изоморфно $\operatorname{Spec}(A \otimes_C B)$.

Теперь для доказательства существования расслоенного произведения нужно аккуратно склеить его из произведений аффинных кусочков. Это сделано, например, в [V].

**Определение 4.5.3.** Пусть $\pi \colon X \to Y$ — морфизм схем, $y \in Y$ — точка на $Y$. Пулбэк морфизма $\pi$ вдоль морфизма $y \to Y$ (см. упражнение 4.2.8) называется **слоем морфизма** $\pi$ **над точкой** $y$ и обозначается через $\pi^{-1}(y)$:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(y) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "\pi"] \\ y \arrow[r] & Y. \end{tikzcd}$$

## 4.6 Нормальность и факториальность

Свойство нормальности очень похоже на «гладкость» схемы. Напомним, что область целостности $A$ называется **целозамкнутой** (или **нормальной**), если из того, что $\alpha \in \operatorname{Frac}(A)$ является корнем многочлена из $A[x]$ со старшим коэффициентом 1, следует, что $\alpha \in A$. Основной пример — кольцо целых чисел.

**Упражнение 4.6.1.** Пусть $p/q \in \mathbb{Q}$ — несократимая дробь, и $p/q$ является корнем многочлена $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами. Докажите, что $a_n$ делится на $q$, а $a_0$ делится на $p$. Выведите отсюда, что $\mathbb{Z}$ целозамкнуто и обобщите этот результат на любое факториальное кольцо.

**Определение 4.6.2.** Схема $X$ называется **нормальной**, если все ее стебли $\mathcal{O}_{X,x}$ — *нормальные* кольца, то есть, целозамкнутые области целостности.

**Лемма 4.6.3.** *Целозамкнутость сохраняется при локализации: если $A$ — целозамкнутая область целостности, и $S$ — ее мультипликативное подмножество, не содержащее 0, то $S^{-1}A$ — тоже целозамкнутая область целостности.*

*Доказательство.* Предположим, что у многочлена

$$x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 = 0,$$

где $b_i \in S^{-1}A$, есть корень $\alpha$ в поле частных $\operatorname{Frac}(S^{-1}A) = \operatorname{Frac}(A)$. Приведем все $b_i$ к общему знаменателю и запишем $b_i = a_i/s$ для $a_i \in A$, $s \in S$. Тогда

$$s^n \alpha^n + s^n b_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + s^n b_1 \alpha + s^n b_0 = 0,$$

и поэтому

$$(s\alpha)^n + b_{n-1} s (s\alpha)^{n-1} + \cdots + (b_1 s^{n-1})(s\alpha) + b_0 s^n = 0.$$

Но это означает, что $s\alpha \in \operatorname{Frac}(A)$ — корень многочлена с коэффициентами уже в $A$, и со старшим коэффициентом 1. Из целозамкнутости $A$ следует, что $s\alpha \in A$, и потому $\alpha \in S^{-1}A$, что и требовалось доказать. $\square$

**Следствие 4.6.4.** *Если $A$ — целозамкнутая область целостности, то* $\operatorname{Spec} A$ *— нормальная схема.*

**Предложение 4.6.5.** *Пусть $A$ — область целостности. Следующие условия равносильны:*

1. *$A$ целозамкнута.*
2. *Локализация $A_\mathfrak{p}$ целозамкнутая для всех простых идеалов $\mathfrak{p} \trianglelefteq A$.*
3. *Локализация $A_\mathfrak{m}$ целозамкнутая для всех максимальных идеалов $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$.*

*Доказательство.* По лемме 4.6.3 из (1) следует (2); очевидно, что из (2) следует (3). Осталось показать, что (3) влечет (1). Предположим, что $A$ не целозамкнута, а именно, пусть $\alpha \in \operatorname{Frac}(A)$ — корень многочлена

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

с коэффициентами $a_i \in A$, и при этом $\alpha \notin A$. Рассмотрим **идеал знаменателей** элемента $\alpha$:

$$I = \{s \in A \mid s\alpha \in A\}.$$

По условию $\alpha \notin A$, и, стало быть, $1 \notin I$. Значит, идеал $I$ содержится в некотором максимальном идеале $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$. Но тогда $\alpha \notin A_\mathfrak{m}$ (действительно, если $\alpha = a/t$ при $t \notin \mathfrak{m}$, то $t \in I$ — противоречие). Но тогда можно рассмотреть наш многочлен как многочлен на $A_\mathfrak{m}$, и у него есть корень $\alpha \in \operatorname{Frac}(A) = \operatorname{Frac}(A_\mathfrak{m})$, не лежащий в $A_\mathfrak{m}$. Мы получили противоречие с целозамкнутостью $A_\mathfrak{m}$. □

**Определение 4.6.6.** Схема $X$ называется **факториальной**, если все ее стебли — факториальные кольца.

**Упражнение 4.6.7.** Покажите, что ненулевая локализация факториального кольца является факториальным кольцом.

**Следствие 4.6.8.** *Если $A$ — факториальное кольцо, то* $\operatorname{Spec} A$ *— факториальная схема.*

**Упражнение 4.6.9.** Покажите, что из факториальности схемы следует ее нормальность; таким образом, если $A$ — факториальное кольцо, то схема $\operatorname{Spec} A$ нормальна.

**Упражнение 4.6.10.** Покажите, что схемы $\mathbb{A}^n_k$, $\mathbb{P}^n_k$, $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ нормальны.

**Пример 4.6.11.** Пусть $A$ — факториальное кольцо с обратимой двойкой, и $z^2 - f$ — неприводимый многочлен в $A[z]$ (то есть, $f$ — не квадрат в $A$). Попытаемся понять, является ли кольцо $B = A[z]/(z^2 - f)$ нормальным. Для начала, это область целостности (поскольку идеал $(z^2 - f)$ прост). Предположим, что $F(T) \in B[T]$ — многочлен, у которого есть корень $\alpha \in \operatorname{Frac}(B)$. Домножим $F(T)$ на сопряженный (полученный применением автоморфизма кольца $B$, переводящего $z$ в $-z$, ко всем коэффициентам). У полученного многочлена $F(T)\overline{F}(T)$ уже все коэффициенты лежат в $A$. Поэтому с самого начала можно считать, что $F \in A[T]$ имеет корень $\alpha \in \operatorname{Frac}(B)$. Если этот корень лежит в $\operatorname{Frac}(A) \subseteq \operatorname{Frac}(B)$, то он лежит и в $A$, поскольку кольцо $A$ целозамкнуто. Поэтому $\alpha \in \operatorname{Frac}(B) - \operatorname{Frac}(A)$. Запишем $\alpha \in g + hz$, где $g, h \in \operatorname{Frac}(A)$ и $h \neq 0$. Но несложно придумать многочлен, корнем которого является $\alpha$: это $Q(T) = T^2 - 2gT + (g^2 - h^2 f) \in \operatorname{Frac}(A)[T]$ (минимальный многочлен $\alpha$). Деля с остатком $F$ на $Q$ в кольце $\operatorname{Frac}(A)[T]$, получаем, что $F(T) = P(T)Q(T)$. По лемме Гаусса коэффициенты $Q$ лежат в $A$: $2g \in A$, $g^2 - h^2 f \in A$. Пусть $g = r/2$, $h = s/t$ для некоторых $r, s, t \in A$. Тогда $g^2 - h^2 f = (r^2 t^2 - 4s^2 f)/(4t^2) \in A$, откуда $(s^2 f)/t^2 \in A$. Кроме того, $s$ и $t$ взаимно просты (можно их выбрать такими), поэтому $f/t^2 \in A$. Можем ли мы заключить отсюда, что $t \in A^*$, и потому $\alpha = r/2 + zs/t \in B$? Если $f$ свободно от квадратов, то можем; а если нет, легко привести контрпример. Таким образом, схема $\operatorname{Spec} A[z]/(z^2 - f)$ нормальна тогда и только тогда, когда $f$ свободно от квадратов.

**Упражнение 4.6.12.** Если $n$ свободно от квадратов и сравнимо с 3 по модулю 4, покажите, что схема $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] = \mathbb{Z}[x]/(x^2 - n)$ нормальна. Если $n$ свободно от квадратов и сравнимо с 1 по модулю 4, покажите, что схема $\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{n})/2]$ нормальна.

**Следствие 4.6.13.** *Кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ целозамкнуто, но не факториально.*

**Упражнение 4.6.14.** Пусть $\operatorname{char} k \neq 2$, $n \geqslant m \geqslant 3$. Покажите, что схема $\operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_n]/(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)$ нормальна.

**Упражнение 4.6.15.** Пусть $A = (\mathbb{Q}[x, y]_{x^2+y^2})_0$ — элементы однородной степени 0 кольца $\mathbb{Q}[x, y]_{x^2+y^2}$. Элементы этого кольца, таким образом, выглядят как дроби вида $f(x, y)/(x^2 + y^2)^n$, где $f$ — однородный многочлен степени $2n$.

1. Покажите, что главные открытые подмножества $D(x^2/(x^2 + y^2))$ и $D(y^2/(x^2 + y^2))$ покрывают $\operatorname{Spec} A$. *Подсказка*: сумма этих дробей равна 1.

2. Покажите, что кольца $A_{x^2/(x^2+y^2)}$ и $A_{y^2/(x^2+y^2)}$ факториальны. *Подсказка*: каждое из них изоморфно $\mathbb{Q}[t]_{t^2+1}$.

3. Покажите, что кольцо $A$ не факториально. *Подсказка*:
$$\left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right)\left(\frac{y^2}{x^2 + y^2}\right).$$

## 4.7 Примеры схем над $\mathbb{Z}$

**Пример 4.7.1.** Как выглядит $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}/(60)$? Простые идеалы $\mathbb{Z}/(60)$ — это простые идеалы $\mathbb{Z}$, содержащие 60, то есть, простые делители числа 60. Получаем три точки: $[(2)]$, $[(3)]$, $[(5)]$. Все они замкнуты (ибо это максимальные идеалы), поэтому топология на $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}/(60)$ дискретна. Несложно проверить, что стебли структурного пучка в этих трех точках равны $\mathbb{Z}/4$, $\mathbb{Z}/3$, $\mathbb{Z}/5$. Обратите внимание, что в стебле на точке $[(2)]$ есть нильпотенты. Глобальные сечения схемы $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}/(60)$ склеиваются из сечения на открытой точке $[(2)]$, сечения на открытой точке $[(3)]$ и сечения на открытой точке $[(5)]$. Поэтому имеется естественный изоморфизм колец
$$\mathbb{Z}/60 \cong \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/5.$$

Полезно заметить, что естественная проекция $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/60$ соответствует морфизму $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}/60 \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, при котором точка $[(p)]$ переходит в $[(p)]$ для $p = 2, 3, 5$.

**Пример 4.7.2.** Рассмотрим числовое поле $K = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ и его кольцо целых $A = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Схема $\operatorname{Spec} A$, как и $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, содержит два типа точек: замкнутые точки, соответствующие ненулевым простым идеалам в $A$ (их поля вычетов конечны), и одну общую точку, соответствующую идеалу $(0)$ (ее поле вычетов равно $K$).

Посмотрим на естественный морфизм $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, индуцированный вложением $\mathbb{Z} \to A$. Каков его слой над точкой $[(p)] \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$? Иными словами, какие простые идеалы кольца $A$ содержат идеал $pA \subseteq A$? Возможны три случая:

1. Если $p$ делит дискриминант расширения $K/\mathbb{Z}$, который равен 12 — то есть, если $p = 2$ или $p = 3$, — то $(p)$ является квадратом некоторого идеала в $A$. В нашем случае $2A = (1+\sqrt{3})^2$ и $3A = (\sqrt{3})^2$. Поля вычетов в точках $[(1+\sqrt{3})], [(\sqrt{3})] \in \operatorname{Spec} A$ равны $\mathbb{F}_2$ и $\mathbb{F}_3$, соответственно.

2. Если же $p \neq 2$, $p \neq 3$, и 3 является квадратом по модулю $p$ (квадратичный закон взаимности учит нас, что это зависит от остатка $p$ по модулю 12), то $(p)$ раскладывается в произведение двух различных простых идеалов: например, $11A = (4+3\sqrt{3})(4-3\sqrt{3})$, $13A = (4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})$. Поля вычетов в этих точках — снова простые поля $\mathbb{F}_{11}$ и $\mathbb{F}_{13}$.

3. Наконец, в остальных случаях ($p > 3$ и 3 не является квадратом по модулю $p$) — например, при $p = 5$ и $p = 7$, — идеал $pA$ является простым и соответствует одной точке в $\operatorname{Spec} A$, а поле вычетов этой точки является квадратичным расширением $\mathbb{F}_p$ — например, $\mathbb{F}_{25}$ и $\mathbb{F}_{49}$.

В общем случае кольца целых квадратичного числового поля ситуация совершенно аналогично. Обратите внимание, что координатное кольцо слоя над точкой $[(p)] \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ всегда является двумерной $\mathbb{F}_p$-алгеброй. Морфизм $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ похож на двулистное разветвленное накрытие римановых поверхностей, с ветвлением над простыми идеалами $(p)$ такими, что $pA$ — квадрат простого идеала в $A$ (в этом случае говорят, что $p$ *ветвится* в $A$).

**Пример 4.7.3.** Схема $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]$ двумерна. Несложно проверить (упражнение!), что простые идеалы $\mathbb{Z}[x]$ бывают следующих типов:

1. $(0)$;

2. $(p)$, где $p \in \mathbb{Z}$ — простое число;

3. главные идеалы вида $(f)$, где $f \in \mathbb{Z}[x]$ — неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен, содержание которого (наибольший общий делитель коэффициентов) равно 1;

4. максимальные идеалы вида $(p, f)$, где $p \in \mathbb{Z}$ — простое число, и $f \in \mathbb{Z}[x]$ — многочлен со старшим коэффициентом 1, редукция которого по модулю $p$ неприводима.

Простые идеалы последнего типа соответствуют замкнутым точкам $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$. Снова полезно рассмотреть морфизм $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Точки второго и четвертого типа при этом переходят в точки $[(p)] \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, а точки первого и третьего типа — в общую точку $[(0)] \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Вообще, слой этого морфизма над точкой $[(p)]$ изоморфен $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$, а слой над общей точкой $[(0)]$ изоморфен $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}$.

**Упражнение 4.7.4.** Опишите замыкания всех точек $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$.

**Упражнение 4.7.5.** Нарисуйте морфизмы схем, соответствующие гомоморфизмам колец $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]/(x^2-3) = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

**Пример 4.7.6.** Пусть $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x,y]/(x^2-y^2-5)$. Как всегда, полезно иметь в виду канонический морфизм $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Слой этого морфизма над общей точкой $[(0)]$ — это схема $\operatorname{Spec} \mathbb{Q}[x,y]/(x^2-y^2-5)$; в соответствии с примером 2.2.16, ее замкнутые точки — это орбиты пар $(x,y) \in \overline{\mathbb{Q}}^2$, для которых $x^2-y^2 = 5$, под действием группы Галуа $\operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Аналогично, слой над точкой $[(p)] \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ — это подсхема в $\mathbb{A}^2_{\mathbb{F}_p}$, заданная уравнением $x^2-y^2 = 5$; ее замкнутые точки — это орбиты пар $(x,y) \in \overline{\mathbb{F}_p}^2$, удовлетворяющих уравнению $x^2-y^2 = 5$, под действием группы Галуа $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$. Отметим, что слои над точками $[(2)]$ и $[(5)]$ вырождены, поскольку $x^2-y^2-5 \equiv (x+y+1)^2 \pmod 2$ и $x^2-y^2-5 \equiv (x+y)(x-y) \pmod 5$. Таким образом, слой над $[(2)]$ — это двойная прямая, а слой над $[(5)]$ — две пересекающиеся прямые.

## 4.8 Рациональные морфизмы

**Определение 4.8.1.** Пусть $X$, $Y$ — схемы. **Рациональный морфизм** из $X$ в $Y$ — это морфизм из открытого плотного подмножества $X$ в $Y$ по модулю следующего отношения эквивалентности: $\alpha\colon U \to Y$ эквивалентен $\beta\colon V \to Y$, если найдется открытое плотное подмножество $Z \subseteq U \cap V$ такое, что $\alpha|_Z = \beta|_Z$. Мы будем использовать обозначение $X \dashrightarrow Y$ для рационального морфизма из $X$ в $Y$.

**Пример 4.8.2.** Проекция $\mathbb{P}^n_k \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}_k$, заданная формулой $[x_0 : \dots : x_{n-1} : x_n] \mapsto [x_0 : \dots : x_{n-1}]$, является рациональным морфизмом, определенным на дополнении к точке $[0 : \dots : 0 : 1]$.

**Определение 4.8.3.** Рациональный морфизм $\pi\colon X \dashrightarrow Y$ называется **доминантным**, если для некоторого (и потому для любого) представителя $U \to Y$ его образ плотен в $Y$.

**Упражнение 4.8.4.** Пусть $X$, $Y$ — неприводимые схемы. Докажите, что рациональный морфизм $\pi\colon X \to Y$ доминантен тогда и только тогда, когда он переводит общую точку $X$ в общую точку $Y$.

**Упражнение 4.8.5.** Покажите, что доминантный рациональный морфизм целых схем индуцирует гомоморфизм их полей функций в обратном направлении.

**Определение 4.8.6.** Рациональный морфизм $\pi\colon X \dashrightarrow Y$ называется **бирациональным**, если он доминантен, и существует доминантный рациональный морфизм $\psi\colon Y \to X$ такой, что $\pi\circ\psi$ эквивалентно $\mathrm{id}_Y$, а $\psi \circ \pi$ эквивалентно $\mathrm{id}_X$.

Если между $X$ и $Y$ существует бирациональный морфизм, говорят, что $X$ и $Y$ **бирационально эквивалентны**, или просто **бирациональны** (друг другу).

Из упражнения 4.8.5 следует, что бирациональный морфизм между целыми схемами индуцирует изоморфизм на их полях функций. Верно (при некоторых ограничениях) и обратное: если есть две целых схемы конечного типа над $k$ с изоморфными полями функций, то они бирациональны.

**Предложение 4.8.7.** *Пусть $X$, $Y$ — приведенные схемы. Между $X$ и $Y$ существует бирациональный морфизм тогда и только тогда, когда существуют открытая плотная подсхема $U$ в $X$ и открытая плотная подсхема $V$ в $Y$ такие, что $U \cong V$.*

*Доказательство.* См. [V, Proposition 6.5.5]. □

**Пример 4.8.8.** Опишем рациональные точки на окружности $C = \{x^2+y^2=1\}$. Зафиксируем точку $p = (1,0)$ и заметим, что если $q$ — еще одна рациональная точка на $C$, то прямая, проходящая через $p$ и $q$, имеет рациональный тангенс угла наклона. Мы получили рациональный морфизм из $C = \operatorname{Spec}\mathbb{Q}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ в $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}$, который отправляет $(x,y)$ в $y/(x-1)$. Обратно, по тангенсу угла наклона $m$ прямой, проходящей через $p$, можно восстановить $q$, если решить систему уравнений $y = m(x-1)$, $x^2+y^2 = 1$. Одно из решений должно давать точку $p = (1,0)$, поэтому по теореме Виета второе решение рационально. После преобразований получаем $x = (m^2-1)/(m^2+1)$ и $y = -2m/(m^2+1)$. Мы получили бирациональный морфизм между $C$ и $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}$. Заметим, что он продолжается до рационального морфизма $C \dashrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ с помощью вложения $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$. Полученный рациональный морфизм оказывается определенным уже на всей конике $C$.

**Упражнение 4.8.9.** Используйте рациональный морфизм из примера 4.8.8 для классификации *пифагоровых троек*, то есть, решений уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ в целых числах.

**Упражнение 4.8.10.** Покажите, что коника $\{x^2 + y^2 = z^2\} \subseteq \mathbb{P}^2_k$ изоморфна $\mathbb{P}^1_k$ для любого поля $k$ характеристики не 2.

**Упражнение 4.8.11.** Найдите все рациональные решения уравнения $y^2 = x^3 + x^2$, построив бирациональный морфизм в $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}$ с помощью проекции из узла $p = (0, 0)$.

**Упражнение 4.8.12** (Преобразование Кремоны). Рассмотрим рациональный морфизм $\mathbb{P}^2_k \dashrightarrow \mathbb{P}^2_k$, $[x : y : z] \mapsto [1/x, 1/y, 1/z]$. Какова его область определения?

**Упражнение 4.8.13.** Покажите, что не существует доминантных рациональных морфизмов из $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ на *кривую Ферма* $\{x^n + y^n = z^n\} \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Для этого достаточно показать, что у уравнения Ферма $f^n + g^n = h^n$ нет нетривиальных решений в поле рациональных функций $\mathbb{C}(t)$. Приведением к общему знаменателю этот вопрос сводится к случаю, когда $f, g, h$ — попарно взаимно простые многочлены. Заметим, что $\mathbb{C}[t]$ — факториальное кольцо, поэтому $h^n - g^n$ раскладывается на $n$ сомножителей вида $(h - \zeta^i g)$ (здесь $\zeta$ — первообразный корень степени $n$ из 1); каждый из них должен являться $n$-ой степенью, и можно подобрать $\alpha$ и $\beta$ так, что получится равенство

$$(h - g) + \alpha(h - \zeta g) = \beta(h - \zeta^2 g),$$

что приведет нас к решению меньшей степени, и бесконечному спуску.

**Упражнение 4.8.14.** Покажите, что если $x, y \in \mathbb{C}(t)$ таковы, что $y^2 = (x - a)(x - b)(x - b)$, то $x, y \in \mathbb{C}$:

1. пусть $x = p/q$, $y = r/s$, где $p, q, r, s \in \mathbb{C}[t]$, причем $p \perp q$ и $r \perp s$. Тогда наше уравнение превращается в $r^2 q^3 = s^2(p - aq)(p - bq)(p - cq)$. Тогда $s^2 | q^3$ и $q^3 | s^2$, откуда $s^2 = \delta q^3$ для некоторого $\delta \in \mathbb{C}$.

2. Получаем, что $r^2 = \delta(p - aq)(p - bq)(p - cq)$. Отсюда следует, что $p - aq$, $p - bq$, $p - cq$ — точные квадраты. Кроме того, $q$ — тоже точный квадрат.

3. Если $p, q \in \mathbb{C}[t]$ взаимно просты и четыре различных (непропорциональных)линейных комбинации $p$ и $q$ являются точными квадратами, то $p, q \in \mathbb{C}$. Действительно, после замены можно считать, что $p$, $q$, $p - q$, $p - \lambda q$ — точные квадраты (для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$). Если $p = u^2$, $q = v^2$, то $u - v$, $u + v$, $u - \sqrt{\lambda} v$, $u + \sqrt{\lambda} v$ — точные квадраты, причем $u \perp v$. Тогда $0 < \max(\deg u, \deg v) < \max(\deg p, \deg q)$, и получаем бесконечный спуск.

# 5 Приложения: плоские кривые

## 5.1 Локальные свойства

Пусть $k$ — алгебраически замкнутое поле; непостоянный многочлен $F \in k[x, y]$ задает **плоскую кривую** $\operatorname{Spec} k[x, y]/(F) \subseteq \operatorname{Spec} k[x, y] = \mathbb{A}^2_k$. Обратите внимание, что если $\lambda \in k^*$, то многочлены $F$ и $\lambda F$ задают одну и ту же кривую (верно и обратное), поэтому мы будем часто отождествлять кривую с классом эквивалентности многочленов относительно домножения на ненулевой скаляр. **Степенью** кривой $F$ называется степень многочлена $F$. Если $F = \prod_i F_i^{e_i}$, где $F_i$ — попарно различные неприводимые многочлены, мы говорим, что $F_i$ — **компонента** $F$ **кратности** $e_i$.

Пусть $F$ — плоская кривая, $P = (a, b) \in F$. Точка $P$ называется **простой точкой**, если хотя бы одно из значений производных $F'_x(P)$, $F'_y(P)$ отлично от нуля. В этом случая прямая $F'_x(P)(x - a) + F'_y(p)(y - b) = 0$ называется **касательной** к $F$ в точке $P$. Точка кривой, не являющаяся простой, называется **кратной**. Кривая называется **невырожденной**, если все точки на ней простые.

Пусть $F$ — кривая, $P = (0, 0)$. Запишем $F$ в виде суммы однородных многочленов: $F = F_m + F_{m+1} + \dots + F_n$, где $F_i$ — однородный многочлен степени $i$, и $F_m \neq 0$. Число $m$ называется **кратностью** $F$ в точке $P = (0, 0)$: $m = m_P(F)$. Нетрудно понять, что $P \in F$ тогда и только тогда, когда $m_P(F) > 0$, и что $P$ — простая точка $F$ тогда и только тогда, когда $m_P(F) = 1$; в этом случае $F_1$ — это касательная к $F$ в точке $P$. В общем случае мы можем разложить $F_m$ на линейные неприводимые многочлены: $F_m = \prod_i L_i^{r_i}$; каждая прямая $L_i$ называется **касательной** к $F$ в точке $P = 0$, а $r_i$ — ее **кратностью**. Эти определения можно перенести на любую точку $P = (a, b)$ путем сдвига, переводящего $(0, 0)$ в $P$.

**Теорема 5.1.1.** *Пусть $F$ — неприводимая плоская кривая, $P \in F$, $\mathcal{O}_{F,P}$ — стебель структурного пучка $F$ в точке $P$. Точка $P$ является простой точкой $F$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{O}_{F,P}$ — кольцо дискретного нормирования. Если, кроме этого, $L = ax + by + c$ — любая прямая, проходящая через $P$ и не являющаяся касательной к $F$, то образ $L$ в кольце $\mathcal{O}_{F,P}$ — униформизующая этого кольца.*

*Доказательство.* Пусть $P$ — простая точка $F$, $L$ проходит через $P$ и не является касательной к $F$. После замены координат мы можем считать, что $P = (0, 0)$, прямая $y = 0$ — касательная к $F$ в точке $P$, и что $L = x$.

Теперь достаточно доказать, что максимальный идеал $\mathfrak{m}_P \trianglelefteq \mathcal{O}_{F,P}$ порождается образом элемента $x$. Заметим, что этот максимальный идеал всегда порождается образами элементов $x$ и $y$. Мы можем записать $F = y+$слагаемые степени $\geqslant 2$. Группируя эти слагаемые на те, которые содержат $y$ и те, которые не содержат, мы видим, что $F = yg + x^2h$, где $h \in k[x]$, а $g$ имеет вид $1+$слагаемые степени $\geqslant 1$. Тогда $yg = -x^2h$ в кольце $k[x, y]/(F)$, а образ $g$ обратим в $\mathcal{O}_{F,P}$; поэтому образ $y$ выражается через образ $x$, что и требовалось покзаать.

Импликация в обратную сторону следует из теоремы 5.1.2. □

Для простой точки $P$ на $F$ мы будем обозначать через $\mathrm{ord}_P^F$ функцию порядка на элементах кольца дискретного нормирования $\mathcal{O}_{F,P}$.

**Теорема 5.1.2.** *Пусть $P$ — точка на неприводимой кривой $F$. Тогда $m_P(F) = \dim_k(\mathfrak{m}_P^n/\mathfrak{m}_P^{n+1})$ при всех достаточно больших $n$. В частности, кратность $F$ в точке $P$ зависит только от локального кольца $\mathcal{O}_{F,P}$.*

*Доказательство.* Мы будем писать $\mathcal{O}$ вместо $\mathcal{O}_{F,P}$, $\mathfrak{m}$ вместо $\mathfrak{m}_{F,P}$, и $m$ вместо $m_P(F)$. Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \to \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1]} \to \mathcal{O}/\mathfrak{m}^{n+1} \to \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n \to 0.$$

Из нее следует, что $\dim_k(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1})$ является разностью двух последовательных членов последовательности $\dim_k(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$. Значит, достаточно показать, что $\dim_k(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$ при достаточно больших $n$ является линейной функцией от $n$, причем коэффициент при $n$ равен $m_P(F)$.

Предполагаем, что $P = (0,0)$, и потому $\mathfrak{m}^n = (x,y)^n \mathcal{O}$. Заметим, что $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n = k[x,y]/((x,y)^n, F)$. Теперь рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \to k[x,y]/(x,y)^{n-m} \xrightarrow{\psi} k[x,y]/(x,y)^n \xrightarrow{\varphi} k[x,y]/((x,y)^n, F) \to 0,$$

где $\varphi$ — естественная проекция, а $\psi$ переводит класс многочлена $G \in k[x,y]$ в класс многочлена $GF$.

Таким образом, $\dim_k(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n) = \dim_k(k[x,y]/((x,y)^n, F)) = \dim_k(k[x,y]/(x,y)^n) - \dim_k(k[x,y]/(x,y)^{n-m})$. Прямое вычисление показывает, что $\dim_k(k[x,y]/(x,y)^n) = n(n+1)/2$, и потому $\dim_k(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n) = nm - m(m-1)/2$ для всех $n \geqslant m$, что и требовалось. □

## 5.2 Кратность пересечения плоских кривых

Мы продолжаем считать, что $k$ — алгебраически замкнутое поле, и работать с плоскими кривыми в $\mathbb{A}^2_k$. Пусть $F, G$ — плоские кривые, и пусть $P \in \mathbb{A}^2_k$. Сейчас мы определим **кратность пересечения** $F$ и $G$ в точке $P$, которая будет обозначаться через $I(P, F \cap G)$. Для этого мы сначала выпишем желаемые свойства этой кратности, покажем, что кратность определяется этими свойствами однозначно, и проверим, что некоторая явная формула удовлетворяет этим свойствам.

Будем говорить, что $F$ и $G$ пересекаются в $P$ **собственным образом**, если у $F$ и $G$ нет общих компонент, проходящих через $P$. Будем говорить, что $F$ и $G$ пересекаются в $P$ **трансверсально**, если $P$ — простая точка на $F$ и на $G$, и если касательные к $F$ и к $G$ в точке $P$ различны. Желаемые свойства кратности таковы:

1. $I(P, F \cap G)$ — натуральное число, если $F$ и $G$ пересекаются в $P$ собственным образом; $I(P, F \cap G) = \infty$ в противном случае.

2. $I(P, F \cap G) = 0$ тогда и только тогда, когда $P \notin F \cap G$. Число $I(P, F \cap G)$ зависит только от компонент $F$ и $G$, проходящих через точку $P$. Если $F$ или $G$ — ненулевая константа, то $I(P, F \cap G) = 0$.

3. $I(P, F \cap G)$ инвариантно относительно аффинных замен координат на $\mathbb{A}^2_k$.

4. $I(P, F \cap G) = I(P, G \cap F)$.

5. $I(P, F \cap G) \geqslant m_P(F) m_P(G)$; равенство выполнено тогда и только тогда, когда у $F$ и $G$ нет общих касательных в точке $P$.

6. Кратность ведет себя аддитивно: если $F = \prod F_i^{r_i}$, $G = \prod G_j^{s_j}$, то $I(P, F \cap G) = \sum_{i,j} r_i s_j I(P, F_i \cap G_j)$.

7. $I(P, F \cap G) = I(P, F \cap (G + AF))$ для любого $A \in k[x,y]$.

**Теорема 5.2.1.** *Существует единственный выбор чисел $I(P, F \cap G)$ для всех плоских кривых $F, G$ и для всех точек $P \in \mathbb{A}^2$, удовлетворяющий этим семи свойствам. Он задается формулой*

$$I(P, F \cap G) = \dim_k(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2, P}/(F, G)).$$

*Доказательство единственности.* Пусть $I(P, F \cap G)$ определено для всех $F$, $G$, $P$, и удовлетворяет семи свойствам, перечисленным выше. Приведем конструктивный алгоритм вычисления $I(P, F \cap G)$, пользуясь только этими свойствами. По (3) можно считать, что $P = (0,0)$; по (1) можно считать, что $I(P, F \cap G) \neq \infty$. Случай $I(P, F \cap G) = 0$ описан в (2) — это будет базой индукции. Пусть теперь $I(P, F \cap G) = n > 0$, и пусть мы умеем вычислять

$I(P, A\cap B)$, если $I(P, A\cap B) < n$. Рассмотрим многочлены $f = F(x,0)$ и $g = G(x,0)$ в $k[x]$; пусть $\deg f = r$ и $\deg g = s$. Можно считать, что $r \leqslant s$ (по свойству (4)). Рассмотрим два случая:

- $r = 0$. Тогда $F$ делится на $y$: $F = yH$, и по свойству (6) $I(P, F\cap G) = I(P, y\cap G) + I(P, H\cap G)$. Пусть тогда $g = x^m a_0 + x^{m+1}a_1 + \dots$, где $a_0 \neq 0$. Тогда $I(P, y\cap G) = I(P, y\cap g) = I(P, y\cap x^m) = m$. Из условия $P\in G$ следует, что $m > 0$, и поэтому осталось вычислить $I(P, H\cap G) < n$, что возможно по предположению индукции.

- $r > 0$. Можно считать, что $f$ и $g$ имеют старшие коэффициенты 1. Пусть $H = G - X^{s-r}F$. По свойству (7) тогда $I(P, F\cap G) = I(P, F\cap H)$, причем $\deg H(x,0) = t < s$. Повторяя эту процедуру, мы рано или поздно попадем в первый случай.

$\square$

*Доказательство существования.* Положим $I(P, F\cap G) = \dim_k(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,P}/(F,G))$. Нужно проверить, что свойства (1)–(7) выполнены. Свойства (1), (2), (3), (4), (7) очевидны или несложно доказываются.

Обозначим $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,P}$. Для доказательства (6) достаточно показать, что $I(P, F\cap GH) = I(P, F\cap G) + I(P, F\cap H)$, и можно предполагать, что у $F$ и $GH$ нет общих компонент. Для этого достаточно доказать, что последовательность

$$0 \to \mathcal{O}/(F,H) \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}/(F,GH) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}/(F,G) \to 0,$$

точна (где $\varphi$ — естественная проекция, а $\psi$ переводит класс элемента $z\in\mathcal{O}$ в класс элемента $Gz$). Покажем, например, что $\psi$ инъективно (остальное проще): если $\psi(\bar z) = 0$, то $Gz = uF + vGH$ для некоторых $u, v\in\mathcal{O}$. Приведем $u, v, z$ к общему знаменателю $S\in k[x,y]$, $S(P)\neq 0$: пусть $u = A/S$, $v = B/S$, $z = C/S$, где $A, B, C\in k[x,y]$. Тогда $G(C - BH) = AF$. Поскольку $F\perp G$, $C - BH$ делится на $F$: $C - BH = DF$. Тогда $z = (B/S)H + (D/S)F$, откуда $\bar z = 0$, что и требовалось.

Наконец, докажем (5). Пусть $m = m_P(F)$, $n = m_P(G)$ — кратности точки $P$ на $F$ и $G$, соответственно. Обозначим $I = (x,y) \trianglelefteq k[x,y]$. Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
k[x,y]/I^n \times k[x,y]/I^m \arrow[r, "\psi"] & k[x,y]/I^{m+n} \arrow[r, "\varphi"] & k[x,y]/(I^{m+n}, F, G) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
& \mathcal{O}/(F,G) \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{O}/(I^{m+n}, F, G) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

где $\varphi, \pi, \alpha$ — естественные гомоморфизмы, а $\psi$ задано формулой $\psi(\overline{A}, \overline{B}) = \overline{AF + BG}$.

Заметим, что $\varphi$ и $\pi$ сюръективны, а $\alpha$ — изоморфизм. Кроме того, верхняя строка точна. Поэтому

$$\dim(k[x,y]/I^n) + \dim(k[x,y]/I^m) \geqslant \dim(\ker(\varphi)).$$

По теореме о гомоморфизме

$$\dim(\ker(\varphi)) = \dim(k[x,y]/I^{m+n}) - \dim(k[x,y]/(I^{m+n}, F, G)).$$

Значит,

$$\begin{aligned}
I(P, F\cap G) &= \dim(\mathcal{O}/(F,G)) \\
&\geqslant \dim(\mathcal{O}/(I^{m+n}, F, G)) \\
&= \dim(k[x,y]/(I^{m+n}, F, G)) \\
&\geqslant \dim(k[x,y]/I^{m+n}) - \dim(k[x,y]/I^n) - \dim(k[x,y]/I^m) \\
&= mn.
\end{aligned}$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда в обоих неравенствах цепочки достигается равенство; первое означает, что $\pi$ — изоморфизм, то есть, $I^{m+n} \subseteq (F, G)\mathcal{O}$, а второе означает, что $\psi$ — инъекция. Осталось доказать два утверждения:

1. Если у $F$ и $G$ нет общих касательных в точке $P$, то $I^t \subseteq (F, G)\mathcal{O}$ при $t \geqslant m + n - 1$.

2. У $F$ и $G$ нет общих касательных в точке $P$ тогда и только тогда, когда $\psi$ — инъекция.

*Доказательство первого утверждения.* Пусть $L_1, \dots, L_m$ — касательные к $F$ в точке $P$, а $M_1, \dots, M_n$ — касательные к $G$. Обозначим $A_{ij} = L_1 \dots L_i M_1 \dots M_j$ (будем считать, что $L_i = L_m$ при $i > m$ и $M_j = M_n$ при $j > n$). Нетрудно видеть, что множество $A_{ij}$, $i + j = t$ образует базис векторного пространства всех однородных многочленов степени $t$ в $k[x, y]$. Поэтому достаточно проверить, что $A_{ij} \in (F, G)\mathcal{O}$ при всех $i + j \geqslant m + n - 1$. Но тогда $i \geqslant m$ или $j \geqslant n$. Можно считать, что $i \geqslant m$, и тогда $a_{ij} = A_{m0}B$, где $B$ — однородный многочлен степени $t = i + j - m$. Можно записать $F = A_{m0} + R$, где все мономы в $R$ имеют степень $\geqslant m + 1$. Отсюда $A_{ij} = BF - BR$, где все мономы в $BR$ имеют степень $\geqslant i + j + 1$. Осталось показать, что $I^t \subseteq (F, G)\mathcal{O}$.

Пусть $F \cap G = \{P, Q_1, \dots, Q_s\}$; выберем многочлен $H$ такой, что $H(Q_i) = 0$, $H(p) \neq 0$. Тогда $Hx$ и $Hy$ обращаются в 0 во всех точках $F \cap G$, и по теореме Гильберта о нулях $(Hx)^N$ и $(Hy)^N$ лежат в $(F, G)$ для некоторого $N$. Но $H^N$ обратим в $\mathcal{O}$; поэтому $X^N, Y^N \in (F, G)\mathcal{O}$, и $I^{2N} \subseteq (F, G)\mathcal{O}$, что и требовалось.

*Доказательство второго утверждения* Если общих касательных нет и $\psi(\overline{A}, \overline{B}) = \overline{AF + BG} = 0$, то $AF + BG$ состоит исключительно из мономов степени $\geqslant m + n$. Запишем $A = A_r +$слагаемые большей степени, $B = B_s +$слагаемые большей степени. Тогда $AF + BG = A_r F_m + B_s G_n + \dots$. Значит, $r + m = s + n$ и $A_r F_m = -B_s G_n$. По условию $F_m$ и $G_n$ взаимно просты, и потому $B_s$ делится на $F_m$, а $A_r$ делится на $G_n$. Значит, $s \geqslant m$, $r \geqslant n$, то есть, $\overline{A} = 0$ и $\overline{B} = 0$.

Обратно, если $L$ — общая касательная к $F$ и $G$ в точке $P$, запишем $F_m = LR$, $G_n = LS$. Тогда $\psi(\overline{S}, \overline{-R}) = 0$, и $\psi$ не инъективно. □

## 5.3 Проективные кривые

В дальнейшем мы будем работать с проективными кривыми над алгебраически замкнутым полем $k$. Локальные понятия (например, кратность пересечения, определенная в разделе 5.2) переносятся на этот случай с помощью выбора бесконечно удаленной прямой и переходу к аффинной плоскости. Проективная кривая, таким образом, определяется как множество нулей однородного многочлена $F(x, y, z) \in k[x, y, z]$ степени $d$. При этом $d$ называется **степенью** кривой $F$. Переход к аффинной плоскости $z \neq 0$ состоит в рассмотрении многочлена $F(x, y, 1) \in k[x, y]$; мы будем называть этот процесс **дегомогенизацией** и обозначать $F_*(x, y) = F(x, y, 1)$. Обратный процесс — взятие замыкания аффинной кривой $f \in k[x, y]$ состоит в домножении каждого монома $x^a y^b$ на $z^{d-a-b}$, где $d$ — степень $f$. Получается проективная кривая $F \in k[x, y, z]$ наименьшей степени такая, что $F_* = f$.

Как выглядят кривые степени $d$? Пусть $M_1, \dots, M_N$ — все мономы от переменных $x, y, z$ степени $d$ (в каком-то порядке), где $N = (d + 1)(d + 2)/2$. Задание кривой $F$ равносильно выбору коэффициентов $a_1, \dots, a_N \in k$, не все из которых равны нулю, в записи $F = a_1 M_1 + \dots + a_N M_N$; при этом наборы $(a_1, \dots, a_n)$ и $(\lambda a_1, \dots, \dots, \lambda a_N)$ задают одну и ту же кривую. Иными словами, кривые взаимно однозначно соответствуют точкам проективного пространства $\mathbb{P}_k^{N-1} = \mathbb{P}_k^{d(d+3)/2}$.

Если мы рассматриваем только кривые, выделенные каким-то условием, мы получаем подмножество в $\mathbb{P}^{d(d+3)/2}$.

**Лемма 5.3.1.** *Пусть* $P \in \mathbb{P}^2$. *Множество кривых степени* $d$, *содержащих точку* $P$, *образует гиперплоскость в* $\mathbb{P}^{d(d+3)/2}$.

*Доказательство.* Пусть $P = [x_0 : y_0 : z_0]$; кривая, соответствующая точке $(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{P}^{d(d+3)/2}$, проходит через $P$ тогда и только тогда, когда $\sum a_i M_i(x_0, y_0, z_0) = 0$; при этом не все $M_i(x, y, z) = 0$. □

Следствие: для любого набора точек множество кривых степени $d$, которые проходят через эти точки, образует линейное подмногообразие в $\mathbb{P}^{d(d+3)/2}$. Добавление одной точки уменьшает размерность этого подмногообразия не более чем на 1; поэтому для любых $d(d+3)/2$ точек существует кривая степени $d$, проходящая через них.

Посмотрим на условие такого типа: кривая проходит через точку $P$ с кратностью хотя бы $r$. Оказывается, множество кривых $F$ степени $d$ таких, что $m_P(F) \geqslant r$, образует линейное подмногообразие размерности $d(d+3)/2 - r(r+1)/2$. Для доказательства этого сначала заметим, что проективное преобразование плоскости $\mathbb{P}^2$ индуцирует проективное преобразование пространства кривых $\mathbb{P}^{d(d+3)/2}$. Поэтому можно предполагать, что $P = [0 : 0 : 1]$. Запишем $F = \sum_i F_i(x, y) z^{d-i}$, где $F_i$ — однородный многочлен степени $d - i$. После дегомогенизации получаем $F_* = \sum_i F_i(x, y)$, поэтому условие $m_P(F) \geqslant r$ равносильно тому, что $F_0 = \dots = F_{r-1} = 0$, что в свою очередь равносильно тому, что все коэффициенты при мономах $x^a y^b z^{d-a-b}$ равны нулю при $a + b < r$. Но таких мономов ровно $r(r+1)/2$.

Обобщим этот результат на произвольное количество (попарно различных) точек $P_1, \dots, P_n$ и заданных кратностей $r_1, \dots, r_n$. Обозначим через $L_d(r_1 P_1 + \dots + r_n P_n)$ множество кривых степени $d$ таких, что $m_{P_i}(F) \geqslant r_i$ при $i = 1, \dots, n$.

**Теорема 5.3.2.** $L_d = L_d(r_1 P_1 + \dots + r_n P_n)$ — *линейное подмногообразие в* $\mathbb{P}^{d(d+3)/2}$ *размерности* $\geqslant \frac{d(d+3)}{2} - \sum_i \frac{r_i(r_i+1)}{2}$. *Если* $d + 1 \geqslant \sum r_i$, *то равенство достигается.*

*Доказательство.* Рассуждение выше показывает, что добавление точки $P_i$ с кратностью $r_i$ к условиям понижает размерность не более чем на $r_i(r_i+1)/2$. Осталось доказать второе утверждение. Пусть $m = \sum r_i$; мы будем проводить индукцию по $m$. Можно считать, что $m > 2$.

- *Первый случай*: все $r_i$ равны 1. Нам нужно показать, что $L_d(P_1 + \dots + P_n)$ имеет коразмерность $n$. Для этого обозначим $L_d^{(i)} = L_d(P_1 + \dots + P_i)$; по индукции достаточно доказать, что $L_d^{(n)} \neq L_d^{(n-1)}$ (коразмерность не может увеличиться более чем на 1). Выберем прямые $R_1, \dots, R_{n-1}$ так, что $R_i$ проходит через точку $P_i$, но не проходит через остальные точки $R_j$, $j \neq i$. Пусть $R_0$ — прямая, не проходящая ни через одну из точек $P_i$. Тогда $R_1 \dots R_{n-1} R_0^{d-n+1} \in L_d^{(n-1)} \setminus L_d^{(n)}$.

- *Второй случай*: какой-то из $r_i$ больше 1. Можно считать, что $r_1 > 1$ и $P_1 = [0 : 0 : 1]$. Обозначим $L_d^{(0)} = L_d((r_1 - 1)P_1 + r_2 P_2 + \dots + r_n P_n)$. Пусть $F \in L_d^{(0)}$. Тогда $F_* = \sum_{i=0}^{r-1} a_i x^i y^{r-1-i} + \dots$. Нам нужно показать, что разность размерностей $L_d^{(0)}$ и $L_d$ равна $r$. Для этого построим фильтрацию: пусть $L_d^{(0)} = \{F \in L^{(0)} \mid a_j = 0 \text{ при } j < i\}$. Тогда $L_d^{(0)} \supseteq L^{(1)} \supseteq \dots \supseteq L_d^{(r)} = L_d$. Достаточно показать, что $L_d^{(i)} \neq L_d^{(i+1)}$, поскольку оценку сверху на разность размерностей мы уже знаем. Снова явно построим элемент из разности $L_d^{(i)} - L_d^{(i+1)}$. Для этого воспользуемся предположением индукции: Пусть $L_{d-1}^{(0)} = L_{d-1}((r_1 - 2)P_1 + r_2 P_2 + \dots + r_n P_n)$. Для $F \in L_{d-1}^{(0)}$ запишем $F_* = a_i x^i y^{r-2-i} + \dots$ и положим $L_{d-1}^{(i)} = \{F \in L_{d-1}^{(0)} \mid a_j = 0 \text{ при } j < i\}$. По предположению индукции

$$L_{d-1}^{(0)} \underset{\neq}{\supseteq} L_{d-1}^{(1)} \underset{\neq}{\supseteq} \dots \underset{\neq}{\supseteq} L_{d-1}^{(r-1)} = L_{d-1}((r_1 - 1)P_1 + r_2 P_2 + \dots + r_n P_n).$$

Если $F_i \in L^{(i)}_{d-1} \setminus L^{(i+1)}_{d-1}$, то $yF_i \in L^{(i)}_d - L^{(i+1)}_d$ при $i \leqslant r-2$, и $xF_{r-2} \in L^{(r-1)}_d - L^{(r)}_d$. Поэтому $L^{(i)}_d \neq L^{(i+1)}_d$ при всех $i = 0, \dots, r-1$, что и требовалось.

□

## 5.4 Теорема Безу

**Теорема 5.4.1.** *Пусть* $F$, $G$ *— проективные плоские кривые степеней* $m$, $n$, *соответственно, не имеющие общих компонент. Тогда*

$$\sum_{P \in \mathbb{P}^2} I(P, F \cap G) = mn.$$

*Доказательство.* Несложно понять, что множество $F \cap G$ конечно; поэтому можно предполагать, что ни одна из точек $F \cap G$ не лежит на бесконечно удаленной прямой $\{z = 0\}$. Тогда $\sum_P I(P, F \cap G) = \sum_P I(P, F_* \cap G_*) = \sum_P \dim_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, P}/(F_*, G_*) = \dim_k k[x, y]/(F_*, G_*)$. Нам нужно посчитать размерность пространства $\Gamma_* = k[x, y]/(F_*, G_*)$. Обозначим $\Gamma = k[x, y, z]/(F, G)$, и пусть $\Gamma_d$ — подпространство однородных многочленов степени $d$ в $\Gamma$. Мы покажем, что $\dim \Gamma_* = \dim \Gamma_d = mn$ для всех достаточно больших $d$

1. Докажем, что $\dim \Gamma_d = mn$ при $d \geqslant m + n$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to k[x, y, z] \xrightarrow{\psi} k[x, y, z] \times k[x, y, z] \xrightarrow{\varphi} k[x, y, z] \xrightarrow{\pi} \Gamma \to 0,$$

где $\psi(C) = (GC, -FC)$ и $\varphi(A, B) = AF + BG$, а $\pi$ — естественная проекция. Переходя к однородным компонентам, получаем точные последовательности

$$0 \to k[x, y, z]_{d-m-n} \xrightarrow{\psi} k[x, y, z]_{d-m} \times k[x, y, z]_{d-n} \xrightarrow{\varphi} k[x, y, z]_d \xrightarrow{\pi} \Gamma_d \to 0.$$

Размерность $k[x, y, z]_d$ несложно посчитать: это $(d+1)(d+2)/2$, поэтому и размерность $\Gamma_d$ вычисляется.

2. Рассмотрим отображение $\alpha\colon \Gamma \to \Gamma$, $\overline{H} \mapsto \overline{ZH}$. Мы утверждаем, что оно инъективно. Действительно, пусть $zH \in (F, G)$, то есть, $zH = AF + BG$. Из условия (и нашего выбора бесконечно удаленной прямой) следует, что $F(x, y, 0)$ и $G(x, y, 0)$ — взаимно простые однородные многочлены от $x$ и $y$. При подстановке $z = 0$ в равенство $zH = AF + BG$ получаем, что $A(x, y, 0)F(x, y, 0) = -B(x, y, 0)G(x, y, 0)$, и потому $B(x, y, 0) = F(x, y, 0)C$ и $A(x, y, 0) = G(x, y, 0)C$ для некоторого $C \in k[x, y]$. Положим $A_1 = A + CG$, $B_1 = B - CF$. При подстановке $z = 0$ многочлены $A_1$ и $B_1$ обращаются в 0, поэтому $A_1 = zA_2$ и $B_1 = zB_2$. Теперь из равенства $zH = A_1F + B_1G$ следует, что $H = A_2F + B_2G$, и потому $H \in (F, G)$, что и требовалось.

3. Пусть $d \geqslant m + n$. Докажем, что $\dim \Gamma_* = \dim \Gamma_s$. Выберем однородные многочлены $A_1, \dots, A_{mn} \in k[x, y, z]_d$ степени $d$, образы которых в $\Gamma_d$ образуют базис $\Gamma_d$. Обозначим через $A_{i,*} = A_i(x, y, 1) \in k[x, y]$ их дегомогенизации; пусть $\overline{A_{i,*}}$ — образ $A_{i,*}$ в $\Gamma_*$. Осталось доказать, что $\overline{A_{i,*}}$ образуют базис пространства $\Gamma_*$. Заметим сначала, что отображение $\alpha$ индуцирует изоморфизм между $\Gamma_d$ и $\Gamma_{d+1}$ при $d \geqslant m + n$. Действительно, мы показали, что при этих условиях размерность $\Gamma_d$ не зависит от $d$, и что $\alpha$ инъективно. Следовательно, образы многочленов $z^r A_1, \dots, z^r A_{mn}$ образуют базис $\Gamma_{d+r}$ для всех $r \geqslant 0$.

4. Покажем, что $\overline{A_{i,*}}$ — система образующих. Действительно, пусть $\overline{H} \in \Gamma_*$ для некоторого многочлена $H \in k[x,y]$, и пусть $H^* \in k[x,y,z]$ — гомогенизация $H$. После домножения на достаточно большую степень $z$ мы получим однородный многочлен $z^N h^* \in k[x,y,z]$ степени $d+r$, и по определению $A_i$ тогда
$$Z^n H^* = BF + CG + \sum_{i=1}^{mn} \lambda_i z^r A_i$$
для некоторых $\lambda_i \in k$ и $B, C \in k[x,y,z]$. После дегомогенизации получаем
$$H = (z^N H^*)_* = B_* F_* + C_* G_* + \sum \lambda_i A_{i,*},$$
и поэтому $\overline{H}$ лежит в линейной оболочке $\overline{A_{i,*}}$.

5. Покажем, что $\overline{A_{i,*}}$ — линейно независимая система. Если $\sum_i \lambda_i \overline{A_{i,*}} = 0$, то $\sum_i \lambda_i A_{i,*} = BF_* + CG_*$. Значит, можно подобрать степени $r, s, t$ так, что
$$z^r \sum_i \lambda_i A_i = z^s B^* F + z^t C^* G,$$
где $B^*, C^*$ — гомогенизации $B$, $C$, соответственно. Значит $\sum_i \lambda_i \overline{z^r A_i} = 0$ в $\Gamma_{d+r}$, но поскольку $\overline{z^r A_i}$ образуют базис $\Gamma_{d+r}$, получаем, что $\lambda_i = 0$.

□

### 5.5 Фундаментальная теорема [Макса] Нетера

**Определение 5.5.1.** Формальную сумму вида $\sum_{P \in \mathbb{P}^2} n_P P$, где $n_P \in \mathbb{Z}$ — целые числа, лишь конечное число из которых отлично от нуля, мы будем называть **0-циклом на** $\mathbb{P}^2$. Иными словами, 0-циклы — это элементы свободной абелевой группы с базисом $\mathbb{P}^2$. **Степенью** такого 0-цикла называется сумма $\sum_P n_P$. 0-цикл называется **неотрицательным**, если $n_P \geqslant 0$. Обозначение: $\sum n_P P \geqslant 0$. Будем говорить, что $\sum n_P P \geqslant \sum m_P P$, если $n_P \geqslant m_P$ при всех $P$ (то есть, если разность $\sum n_P P - \sum m_P P$ неотрицательна).

**Определение 5.5.2.** Пусть $F, G$ — проективные плоские кривые без общих компонент степеней $m, n$, соответственно. Определим **цикл пересечения** $F \cdot G$ формулой
$$F \cdot G = \sum_{P \in \mathbb{P}^2} I(P, F \cap G) P.$$

Теорема Безу утверждает, что $F \cdot G$ — неотрицательный 0-цикл степени $mn$. Некоторые войства кратности пересечения, полученные в разделе 5.2, превращаются в утверждения про циклы пересечения: например, $F \cdot G = G \cdot F$, $F \cdot (GH) = F \cdot G + F \cdot H$, $F \cdot (G + AF) = F \cdot G$, если $A$ — однородный многочлен степени $\deg(G) - \deg(F)$.

Основной результат этого раздела посвящен следующему вопросу. Пусть $F, G, H$ — кривые, и пусть $H \cdot F \geqslant G \cdot F$ (неформально гоовря, $H$ пересекает $F$ сильнее, чем $G$). Верно ли, что существует кривая $B$, для которой $B \cdot F = H \cdot F - G \cdot F$? Заметим, что для существования такой кривой достаточно найти однородные многочлены $A$ и $B$ такие, что $H = AF + BG$, поскольку тогда
$$\begin{aligned} H \cdot F &= (BG) \cdot F \\ &= B \cdot F + G \cdot F. \end{aligned}$$

Пусть $P \in \mathbb{P}^2$, $F, G, H$ — кривые, и пусть у кривых $F$ и $G$ нет общих компонент, проходящих через точку $P$. Будем говорить, что **условия Нетера выполняются в точке** $P$ (для кривых $F, G, H$), если $H_* \in (F_*, G_*) \trianglelefteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,P}$, то есть, если существуют $a, b \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,P}$, для которых $H_* = aF_* + bG_*$. Иными словами, условия Нетера — это локальная версия сформулированного выше условия на $F, G, H$.

**Теорема 5.5.3** (Фундаментальная теорема Нетера). *Пусть $F, G, H$ — проективные плоские кривые, и пусть у $F$ и $G$ нет общих компонент. Уравнение $H = AF + BG$ разрешимо (относительно однородных многочленов $A$, $B$ степеней $\deg(H) - \deg(F)$, $\deg(H) - \deg(G)$, соответственно) тогда и только тогда, когда условия Нетера выполняются в каждой точке $P \in F \cap G$.*

*Доказательство.* Очевидно, что если $H = AF + BG$, то $H_* = A_*F_* + B_*G_*$ во всех точках $P$. Для доказательства в обратную сторону можно предполагать, что на прямой $\{z = 0\}$ нет точек $F \cap G$. После дегомогенизации получаем $F_* = F(x, y, 1)$, $G_* = G(x, y, 1)$, $H_* = H(x, y, 1)$. Условия Нетера означают, что образ $H_*$ в $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,P}/(F_*, G_*)$ нулевой для всех точек $P \in F \cap G$. Из этого следует, что образ $H_*$ равен нулю в $k[x, y]/(F_*, G_*)$, то есть, что $H_* = aF_* + bG_*$ для некоторых $a, b \in k[x, y]$. Но тогда $z^r H = AF + BG$ для некоторых $r \geqslant 0$, $A, B \in k[x, y, z]$. В доказательстве теоремы Безу 5.4.1 мы видели, что умножение на $z$ инъективно на $k[x, y, z]/(F, G)$, и поэтому $H = \widetilde{A}F + \widetilde{B}G$ для некоторых $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$. Пусть $\widetilde{A} = \sum_i \widetilde{A}_i$, $\widetilde{B} = \sum_i \widetilde{B}_i$, где $\widetilde{A}_i$, $\widetilde{B}_i$ — однородные многочлены степени $i$. Но тогда $H = \widetilde{A}_s F + \widetilde{B}_t G$, где $s = \deg(H) - \deg(F)$, $t = \deg(H) - \deg(G)$. □

Разумеется, польза этой теоремы в том, что условия Нетера проще проверить.

**Предложение 5.5.4.** *Пусть $F, G, H$ — плоские кривые, $P \in F \cap G$. Условия Нетера выполняются в точке $P$ в каждом из следующих случаев:*

1. *$F$ и $G$ пересекаются трансверсально в точке $P$, и $P \in H$.*
2. *$P$ — простая точка на $F$, и $I(P, H \cap F) \geqslant I(P, G \cap F)$.*
3. *касательные к $F$ и $G$ в точке $P$ не совпадают, и $m_P(H) \geqslant m_P(F) + m_P(G) - 1$.*

*Доказательство.* Докажем (2). Из неравенства $I(P, H \cap F) \geqslant I(P, G \cap F)$ следует, что $\mathrm{ord}_P^F(H) \geqslant \mathrm{ord}_P^F(G)$ (в кольце дискретного нормирования $\mathcal{O}_{F,P}$), поэтому $\overline{H_*} \in (\overline{G_*}) \trianglelefteq \mathcal{O}_{F,P}$. Но $\mathcal{O}_{F,P}/(\overline{G_*}) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,P}/(F_*, G_*)$, и поэтому образ $H_*$ в $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,P}(F_*, G_*)$ нулевой, что и требовалось.

Перейдем к (3). Как всегда, можно предполагать, что $P = [0 : 0 : 1]$, и тогда $m_P(H_*) \geqslant m_P(F_*) + m_P(G_*) - 1$. Это означает, что разложение многочлена $H_*$ в сумму однородных компонент начинается не раньше, чем со степени $m_P(F_*) + m_P(G_*) - 1$. Поэтому $H_*$ лежит в идеале $(x, y)^t$ при $t \geqslant m_P(F_*) + m_P(G_*) - 1$. Но в недрах доказательства теоремы 5.2.1 (доказательство существования, свойство(5)) мы проверили, что при этих условиях $(x, y)^t \subseteq (F_*, G_*)$.

Осталось заметить, что (1) следует из (2) (как, впрочем, и из (3)). □

Следующие два утверждения получаются тривиальным применением критериев из предложения 5.5.4 и теоремы 5.5.3.

**Следствие 5.5.5.** *Если кривые $F$ и $G$ пересекаются в $\deg(F)\deg(G)$ различных точках, и $H$ проходит через все эти точки, то найдется кривая $B$ такая, что $B \cdot F = H \cdot F - G \cdot F$.*

**Следствие 5.5.6.** *Если все точки пересечения кривых $F$ и $G$ являются простыми точками $F$ и $H \cdot F \geqslant G \cdot F$ то найдется кривая $B$ такая, что $B \cdot F = H \cdot F - G \cdot F$.*

**Упражнение 5.5.7.** Пусть $C, C'$ — кривые порядка 3, $C' \cdot C = \sum_{i=1}^{9} P_i$, $Q$ — кривая порядка 2, и $Q \cdot C = \sum_{i=1}^{6} P_i$. Предположим, что $P_1, \dots, P_6$ — простые точки кривой $C$. Тогда точки $P_7$, $P_8$ и $P_9$ лежат на одной прямой.

**Следствие 5.5.8** (Теорема Паскаля). *Если шестиугольник вписан в неприводимую кривую второго порядка, то три точки пересечения его противоположных сторон лежат на одной прямой.*

**Следствие 5.5.9** (Теорема Паппа). *Пусть $L_1$, $L_2$ — прямые; $P_1, P_2, P_3 \in L_1$, $Q_1, Q_2, Q_3 \in L_2$, и ни одна из этих точек не является пересечением $L_1 \cap L_2$ Обозначим через $L_{ij}$ прямую проходящую через $P_i$ и $Q_j$. Для каждой перестановки $(i, j, k)$ чисел $(1, 2, 3)$ обозначим $R_k = L_{ij} \cap L_{ji}$. Тогда точки $R_1$, $R_2$ и $R_3$ лежат на одной прямой.*

## Список литературы


[V] Ravi Vakil, *The Rising Sea: Foundations of Algebraic Geometry*, December 29, 2015 draft, `http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/index.html`.

[E] David Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, GTM 150, Springer-Verlag, 1995.

[H] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry.*