

# Программа экзамена по теории категорий

лектор Александр Лузгарев

осень 2016

Определение категории. Первые примеры: конкретные категории. Частично упорядоченное множество как категория. Дискретные категории. Изоморфизмы. Моноиды и группы как категории. Группоиды. Фундаментальный группоид. Определение функтора. Первые примеры: функторы между частичными порядками, между моноидами. Примеры функторов на категории групп. Контравариантные функторы. Представимые функторы. Фильтры и ультрафильтры. Мономорфизмы, эпиморфизмы, ретракции, коретракции. Инициальные и терминальные объекты, примеры. Произведения и копроизведения, примеры. Расслоенные произведения и копроизведения, примеры. Произведения в категории метрических пространств. Произведения в категории [компактных] топологических пространств. Уравнители и коуравнители. Примеры: уравнители и коуравнители в категории множеств. Групповой объект в категории. Теорема Экманна–Хилтона и групповые объекты в категории групп. Пределы и копределы, конусы и коконусы. Направленные множества. Примеры пределов:  $p$ -адические числа, формальные степенные ряды. Естественные преобразования между функторами. Вертикальная и горизонтальная композиция естественных преобразований. Естественные изоморфизмы. Лемма Йонеды. Сопряженные функторы. Единица и коединица сопряжения. Универсальные конструкции как сопряженные функторы к забывающим. Дальнейшие примеры: группа Гротендика, абелианизация, компактификация Стоуна–Чеха. Внутренний Ном. Эквивалентность и антиэквивалентность категорий. Скелеты категорий. Ординалы и кардиналы, предельные и непредельные ординалы, скелет категории множеств. Двойственность для конечномерных векторных пространств. Двойственность Понтрягина, примеры. Аффинные алгебраические множества, аффинные схемы. Двойственность Гельфанда. Основная теорема теории Галуа. Симплициальные множества: категория  $\Delta$ , грани и вырождения. Симплициальные объекты в категориях. Лемма Йонеды для категории  $\Delta$ . Нерв категории. Стандартный топологический  $n$ -симплекс. Тотальный сингулярный комплекс топологического пространства. Сингулярные гомологии и когомологии топологического пространства. Геометрическая реализация симплициального множества: конструкция левого расширения Кана. Классифицирующее пространство группы. Первая срезка симплициального множества. Декартова замкнутость категории симплициальных множеств. Предпучки и пучки. Морфизмы пучков, точность функтора глобальных сечений. Шифификация. Топологии Гротендика.