Комплексный анализ*

Александр Лузгарев

19 мая 2015 г.

Содержание

*Конспект лекций спецкурса весны 2015 г.; предварительная версия.

1 Функции одной комплексной переменной

1.1 Голоморфные функции

1.1.1. Степенные ряды от комплексной переменной. Степенные ряды от одной комплексной переменной ведут себя так же, как и в вещественном случае: у ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ есть **радиус сходимости** R такой, что этот ряд сходится при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$. Одна из формул для радиуса сходимости: $R = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$. На диске $|z| < R$ эта сходимость абсолютная, и равномерная на любом компактном подмножестве этого диска. Например, радиус сходимости ряда

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

равен 1. Еще один пример — ряд

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

который сходится абсолютно равномерно на любом компактном подмножестве $\mathbb{C}$. Это определение функции $e^z = \exp(z)$; на нее удобно смотреть как на универсальное покрытие $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$.

1.1.2. Голоморфные функции. Пусть Ω — область в $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — некоторая функция. Мы будем часто отождествлять комплексные числа со столбцами вещественных чисел высоты 2.

Определение 1.1.2.1. Будем говорить, что $f \in C^1(\Omega)$, если существует непрерывная функция $df\colon \Omega \to M_2(\mathbb{R})$ такая, что $f(z+h) = f(z) + df(z)(h) + o(|h|)$, $h \in \mathbb{R}^2$, $|h| \to 0$.

Определение 1.1.2.2. Функция f называется **голоморфной**, если функция

$$f'(z) = \lim_{w\to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

существует для всех $z \in \Omega$ и непрерывна в области Ω. Обозначение: $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Функция $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ называется **целой**.

Заметим, что функция f голоморфна тогда и только тогда, когда существует непрерывная функция $f'\colon \Omega \to \mathbb{C}$ такая, что $f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(|h|)$ при $|h| \to 0$. Поэтому голоморфные функции на Ω — это в точности те функции из $C^1(\Omega)$, у которых дифференциал $df(z)$ действует как умножение на комплексное число $f'(z)$.

1.1.3. Аналитические функции. Очевидно, что функции, задаваемые многочленами являются голоморфными; более того, голоморфны и функции, задаваемые степенными рядами (см. лемму 1.1.3.2). Несложно показать (упражнение!), что множество $\mathcal{H}(\Omega)$ является алгеброй относительно обычных (поточечных) операций сложения, умножения, и умножения на скаляр.

Определение 1.1.3.1. Функция $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ называется **аналитической** (обозначение: $f \in \mathcal{A}(\Omega)$), если f можно представить сходящимся степенным рядом в окрестности каждой точки области Ω.

Лемма 1.1.3.2. *$\mathcal{A}(\Omega) \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$.*

Доказательство. Упражнение. □

Позже мы докажем, что в лемме 1.1.3.2 имеет место равенство: $\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega)$.

1.1.4. Условия Коши–Римана. Заметим теперь, что функция $f = u + iv$ от $z = x + iy$ лежит в $C^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда частные производные u_x, u_y, v_x, v_y существуют и непрерывны в Ω; матрица df тогда выглядит так:

$$df = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Подставляя в определение голоморфной функции $w = z + \varepsilon$ и $w = z + i\varepsilon$, где $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \to 0$, получаем, что $f'(z) = u_x + iv_x = -iu_y + v_y$. Значит, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Это эквивалентно тому, что $df = \rho A$ для некоторого $\rho \geqslant 0$ и матрицы $A \in SO(2, \mathbb{R})$. Иными словами, матрица дифференциала голоморфной функции имеет вид $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$; такая матрица соответствует умножению на комплексное число $a + bi$.

Иными словами, дифференциал голоморфной функции либо равен нулю, либо пропорционален матрице поворота. Обратно, как утверждает следующая теорема, если $f \in C^1(\Omega)$ и df пропорционален матрице поворота в каждой точке Ω, то f голоморфна на Ω. Соотношения $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ называются **условиями Коши–Римана**.

Теорема 1.1.4.1. *Функция $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, лежащая в $C^1(\Omega)$, является голоморфной тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям Коши–Римана.*

Доказательство. Мы показали, что из голоморфности следуют условия Коши–Римана. Обратно, для $f = u + iv \in C^1(\Omega)$ запишем

$$\begin{aligned} u(x + \varepsilon, y + \delta) &= u(x, y) + u_x(x, y)\varepsilon + u_y(x, y)\delta + o(|(\varepsilon, \delta)|), \\ v(x + \varepsilon, y + \delta) &= v(x, y) + v_x(x, y)\varepsilon + v_y(x, y)\delta + o(|(\varepsilon, \delta)|). \end{aligned}$$

Обозначим $h = \varepsilon + i\delta$. Используя условия Коши–Римана, получаем, что $f(z + h) - f(h) = (u_x + iv_x)(z)(\varepsilon + i\delta) + o(|h|)$, поэтому f голоморфна и $f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = v_y(z) - iu_y(z)$. □

1.1.5. Конформные функции.

Определение 1.1.5.1. Функция $f \in C^1(\Omega)$ называется **конформной**, если $df \neq 0$ в Ω, и в каждой точке $z \in \Omega$ дифференциал $df(z)$ имеет вид ρA, где $\rho > 0$, $A \in SO(2, \mathbb{R})$.

Неформально это означает, что дифференциал *сохраняет углы и ориентацию* в каждой точке. Таким образом, голоморфные функции — это в точности C^1-функции, которые конформны во всех точках, в которых дифференциал не равен нулю.

1.1.6. Формализм ∂_z и $\partial_{\overline{z}}$. Заметим, что вещественно-линейное отображение df может быть (единственным образом!) записано в виде суммы комплексно-линейного и комплексно-анти-линейного. Действительно,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & \frac{b-c}{2} \\ -\frac{b-c}{2} & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & -\frac{a-d}{2} \end{pmatrix};$$

первое слагаемое в сумме соответствует умножению на комплексное число $\frac{a+d}{2} + i\frac{b-c}{2}$, а второму — комплексное сопряжение и умножение на комплексное число $\frac{a-d}{2} - i\frac{b+c}{2}$. Иначе говоря, для некоторых $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ выполнено $df = w_1 dz + w_2 d\overline{z}$, где dz — тождественное отображение, а $d\overline{z}$ — симметрия относительно вещественной оси. Еще одна форма записи: заметим, что $dx = \frac{1}{2}(dz + d\overline{z})$ и $dy = \frac{1}{2i}(dz - d\overline{z})$. Тогда

$$\begin{aligned} df &= \partial_x f dx + \partial_y f dy \\ &= \partial_x f \frac{1}{2}(dz + d\overline{z}) + \partial_y f \frac{1}{2i}(dz - d\overline{z}) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f)dz + \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f)d\overline{z} \\ &= \partial_z f dz + \partial_{\overline{z}} f d\overline{z}, \end{aligned}$$

где $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$, $\partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$. Получаем, что функция $f \in C^1(\Omega)$ голоморфна тогда и только тогда, когда $\partial_{\overline{z}} f = 0$.

Замечание 1.1.6.1. Рассмотрим дифференциальную форму $f(z)dz$. Ее дифференциал равен $d(f(z)dz) = \partial_z f dz \wedge dz + \partial_{\overline{z}} f d\overline{z} \wedge dz = 0$. Это свойство эквивалентно гомотопической инвариантности интеграла Коши (см. ниже).

Упражнение 1.1.6.2. *Докажите, что оператор Лапласа можно записать в виде* $\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial_z \partial_{\overline{z}}}$.

1.1.7. Сфера Римана. Сейчас мы хотим распространить понятие аналитической функции на функции, которые могут принимать значение ∞ и быть определенными в точке $z = \infty$. Рассмотрим одноточечную компактификацию $\mathbb{C}_\infty$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (с обычной базой топологии: окрестности ∞ — это все дополнения компактных множеств). Интуитивно очевидно, что $\mathbb{C}_\infty$ гомеоморфна двумерной сфере S^2 (поэтому $\mathbb{C}_\infty$ называют **сферой Римана**). Оказывается, они не только гомеоморфны, но и *конформно эквивалентны*; мы докажем это позже. Заметим, что $\mathbb{C}_\infty$ покрывается двумя картами: $(\mathbb{C}, z)$ и $(\mathbb{C}_\infty \backslash \{0\}, z^{-1})$. На их пересечении $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ переход между локальными координатами задается формулой $z \mapsto z^{-1}$ и является конформной эквивалентностью.

Теперь понятно, что мы можем распространить определение голоморфной функции на отображения $f\colon \Omega \to \mathbb{C}_\infty$, где Ω — область в $\mathbb{C}_\infty$. Например, если $f(z_0) = \infty$ для некоторой точки $z_0 \in \mathbb{C}$, то мы говорим, что f голоморфна в точке z_0, если $1/f$ голоморфна в точке z_0. Далее, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ называется голоморфной в точке $\infty \in \Omega$, если $f(1/z)$ голоморфна в точке 0. Наконец, если $f(\infty) = \infty$, то f называется голоморфной в точке ∞, если $1/f(1/z)$ голоморфна в точке 0.

1.1.8. Идеалы алгебры голоморфных функций. Зададимся вопросом: каковы максимальные идеалы алгебры $\mathcal{H}(\Omega)$, где $\Omega \subseteq \mathbb{C}$? Заметим, что для каждой точки $z_0 \in \Omega$ имеется идеал M_{z_0} функций, обращающихся в 0 в этой точке. Это в точности ядро гомоморфизма эвалюации $ev_{z_0}\colon \mathcal{H}(\Omega) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(z_0)$. Поэтому фактор $\mathcal{H}(\Omega)/M_{z_0}$ изоморфен $\mathbb{C}$, и, значит,

M_{z_0} — действительно максимальный идеал. С другой стороны, пусть M — максимальный идеал в $\mathcal{H}(\Omega)$ такой, что $\mathcal{H}(\Omega)/M \cong \mathbb{C}$. Рассмотрим канонический гомоморфизм $\varphi\colon \mathcal{H}(\Omega) \to \mathbb{C}$ и положим $z_0 = \varphi(z)$ Тогда функция $z - z_0$ лежит в M. Заметим, что $z_0 \in \Omega$; иначе функция $z - z_0$ обратима в $\mathcal{H}(\Omega)$, и не может лежать в максимальном идеале. Если $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, то $f(z) - f(z_0)$ можно записать в виде $f(z) - f(z_0) = (z - z_0)h(z)$ для некоторой функции $h \in \mathcal{H}(\Omega)$. Отсюда получаем, что функция $f(z) - f(z_0)$ тоже лежит в M, и потому $\varphi(f) = \varphi(f(z_0)) = f(z_0)$. Это означает, что φ совпадает с гомоморфизмом ev_{z_0}, и $M = M_{z_0}$.

Верно ли, что *любой* максимальный идеал в $\mathcal{H}(\Omega)$ имеет вид M_{z_0} для некоторой $z_0 \in \Omega$? Нет: рассмотрим последовательность точек $a_1, a_2, \ldots$ в Ω, у которой нет предельной точки в Ω. Пусть I — множество функций в $\mathcal{H}(\Omega)$, которые обращаются в 0 во всех точках из $\{a_n\}$, кроме конечного числа. Тогда I — идеал в $\mathcal{H}(U)$, но не существует точки, в которой все функции из I одновременно обращались бы в 0 (из теоремы Вейерштрасса следует, что для любого дискретного подмножества в Ω найдется функция в $\mathcal{H}(U)$, которая обращается в 0 в точности на этом подмножестве). Однако, верна следующая теорема.

Теорема 1.1.8.1. *Каждый конечно порожденный максимальный идеал в $\mathcal{H}(\Omega)$ имеет вид M_{z_0} для некоторой точки $z_0 \in \Omega$.*

Доказательство. Пусть $M \trianglelefteq \mathcal{H}(U)$ — максимальный идеал, порожденный функциями $g_1, \ldots, g_n$. Предположим, что все $g_1, \ldots, g_n$ обращаются в 0 в точке $z_0 \in \Omega$. Тогда все функции из M обращаются в 0 в точке z_0, и потому $M \subseteq M_{z_0}$; из максимальности M теперь следует, что $M = M_{z_0}$. Осталось показать, что такая точка z_0 всегда найдется — а это следует из предложения ниже. □

Предложение 1.1.8.2. *Пусть у конечного набора функций $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ нет общего нуля в Ω. Тогда существуют $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ такие, что $f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n = 1$.*

Доказательство этого предложения будет одной из наших целей.

1.2 Интегрирование

1.2.1. Определение интеграла. Обратимся теперь к интегрированию.

Определение 1.2.1.1. Пусть $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ — C^1-кривая, и $f \in C(\Omega)$. Определим

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Несложно проверить, что выражение в левой части не зависит от выбора C^1-параметризации кривой γ (при сохранении ориентации). Более того, можно разрешить и параметризации отрезком $[a,b]$ вместо $[0,1]$. Заметим, что если $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, то $\int_\gamma f'(z)dz = \int_0^1 f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\gamma(t))dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$. В частности, интеграл функции $f'(z)$ по замкнутой кривой в Ω равен нулю. Возьмем теперь $\gamma_r(t) = re^{2\pi i t}$ для некоторого $r > 0$, $f(z) = z^n$. Тогда

$$\int_{\gamma_r} z^n dz = \int_0^1 r^n e^{2\pi i n t} r 2\pi i e^{2\pi i t} dt = \begin{cases} 0, & n \neq -1; \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

Если $n + 1 \neq 0$, то у функции $f(z)$ есть первообразная $z^{n+1}/(n+1)$, поэтому получается 0. С другой стороны, если $n + 1 = 0$, наше вычисление показывает, что у функции $1/z$ не существует первообразной в области, скажем, $\Omega = \mathbb{C}^*$.

1.2.2. Гомотопическая инвариантность интеграла.

Теорема 1.2.2.1 (гомотопическая инвариатность интеграла). *Пусть* $\gamma_0, \gamma_1 \colon [0,1] \to \Omega$ — *две* C^1*-кривые, для которых* $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ *и* $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$*. Предположим, что они* C^1-гомотопны *(с закрепленными концами), то есть, существует непрерывное отображение* $H\colon [0,1]^2 \to \Omega$*, для которого* $H(t,0) = \gamma_0(t)$*,* $H(t,1) = \gamma_1(t)$*,* $H(0,s) = \gamma_0(0)$*,* $H(1,s) = \gamma_0(1)$ *и* $H(\cdot, s)$ *является* C^1*-кривой для каждого* s*. Тогда*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

для всех $f \in \mathcal{H}(\Omega)$*.*

Доказательство. Как мы заметили выше, $d(f(z)dz) = 0$, то есть, форма $f(z)dz$ замкнута. Замкнутые формы локально точны, поэтому интегралы от $f(z)dz$ по достаточно маленьким замкнутым кривым равны нулю. Триангулируя гомотопию, получаем, что

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz = \sum_j \oint f(z)dz = 0.$$

□

Сформулируем аналог теоремы 1.2.2.1 для замкнутых кривых.

Следствие 1.2.2.2. *Пусть* $\gamma_0, \gamma_1 \colon [0,1] \to \Omega$ — *две замкнутых* C^1*-кривые (то есть,* $\gamma_0(0) = \gamma_0(1)$ *и* $\gamma_1(0) = \gamma_1(1)$*). Предположим, что они* C^1*-гомотопны, то есть, существует непрерывное отображение* $H\colon [0,1]^2 \to \Omega$*, для которого* $H(t,0) = \gamma_0(t)$*,* $H(t,1) = \gamma_1(t)$*, и* $H(\cdot, s)$ *является замкнутой* C^1*-кривой для каждого* s*. Тогда*

$$\oint\limits_{\gamma_0} f(z)dz = \oint\limits_{\gamma_1} f(z)dz.$$

В частности, если γ — *замкнутая* C^1*-кривая в* Ω*, гомотопная точке (стягиваемая), то*

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

1.2.3. Теорема Коши. Через $D(z_0, r)$ мы будем обозначать диск радиуса r с центром в точке z_0, а через $\overline{D(z_0, r)}$ — соответствующий замкнутый диск.

Предложение 1.2.3.1. *Пусть* $\overline{D(z_0, R)} \subseteq \Omega$*,* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$*,* $\gamma = z_0 + re^{it}$*,* $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$*. Тогда*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz$$

для всех $z \in D(z_0, r)$

Доказательство. Применим следствие 1.2.2.2 к области $\Omega = \overline{D(z_0, r)} \backslash D(z, \varepsilon)$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Две граничных окружности Ω гомотопны в Ω. Поэтому

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D(z, \varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D(z, \varepsilon)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{z - \zeta} d\zeta + \frac{f(z)}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D(z, \varepsilon)} \frac{1}{z - \zeta} d\zeta \\
&= O(\varepsilon) + f(z), \varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Устремляя ε к 0, получаем требуемое равенство. □

1.2.4. Голоморфные функции аналитичны.

Теорема 1.2.4.1. *Пусть* Ω *— область в* $\mathbb{C}$*. Тогда* $\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega)$*. Любая функция* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *представляется сходящимся степенным рядом относительно* $z - z_0$ *в диске* $D(z_0, r)$*, где* $r = \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$*.*

Доказательство. Мы уже знаем, что аналитические функции голоморфны (лемма 1.1.3.2). Обратно, если f голоморфна, то по предложению 1.2.3.1

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Это значит, что функция f аналитична и, более того, ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} (z - z_0)^n$$

сходится при $|z - z_0| < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$, где

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \tag{1}$$

для всех $n \geqslant 0$. □

1.2.5. Полезные следствия.

Следствие 1.2.5.1 (Оценка Коши). *Пусть* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *и* $|f(z)| \leqslant M$ *на* Ω*. Тогда*

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{Mn!}{\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)^n}$$

для всех $n \geqslant 0$ *и* $z \in \Omega$*.*

Доказательство. Сразу следует из равенства 1. □

Следствие 1.2.5.2 (Теорема Лиувилля). *Если* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$*, то* f *постоянна. Если* $|f(z)| \leqslant C(1 + |z|^N)$ *для всех* $z \in \mathbb{C}$*, некоторого* $N \geqslant 0$*, и некоторой (конечной) константы* C*, то* f *— многочлен степени не выше* N*.*

Доказательство. Применим следствие 1.2.5.1 к $\Omega = D(0, R)$ и устремим $R \to \infty$; получим, что $f^{(k)} = 0$ для всех $k > N$. □

Следствие 1.2.5.3 (Основная теорема алгебры). *У каждого многочлена* $P \in \mathbb{C}[z]$ *положительной степени есть комплексный корень.*

Доказательство. Пусть $P \in \mathbb{C}[z]$ — многочлен положительной степени без комплексных корней. Тогда функция $f = 1/P \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Так как $|P(z)| \to \infty$ при $|z| \to \infty$, то f ограничена. По теореме 1.2.5.2 функция f равна константе, а потому и P — константа; противоречие. □

1.2.6. Логарифм и корни. Выше мы выяснили, что у функции $1/z$ нет глобальной первообразной в области $\Omega = \mathbb{C}^*$. Покажем, что у $1/z$ есть *локальная* первообразная.

Предложение 1.2.6.1. *Пусть область Ω односвязна. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, не обращающейся в нуль на Ω, существует $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ такая, что $e^{g(z)} = f(z)$. Как следствие, для любого $n \geqslant 1$ существует функция $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ такая, что $(f_n(z))^n = f(z)$ для всех $z \in \Omega$.*

Доказательство. Заметим, что если $e^g = f$, то $g' = f'/f$. Зафиксируем точку $z_0 \in \Omega$ и положим
$$g(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta,$$
где интегрирование происходит по некоторому пути, соединяющему z_0 с z. Результат не зависит от пути: дело в том, что $f'/f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (поскольку f аналитична и не обращается в 0), и любые два пути между z_0 и z гомотопны (в силу односвязности Ω). Покажем теперь, что $g'(z) = f'(z)/f(z)$. Действительно,
$$\frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \int_0^1 \frac{f'(z+th)}{f(z+th)} dt \to \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad h \to 0.$$
Значит, $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Теперь заметим, что $(fe^{-g})' = f'e^{-g} - fg'e^{-g} = 0$, и потому $e^g = cf$ для некоторой ненулевой константы f. Запишем $c = e^k$ для некоторого числа $k \in \mathbb{C}$; тогда $e^{g(z)-k} = f(z)$ для всех $z \in \Omega$. $\square$

Замечание 1.2.6.2. Из предложения 1.2.6.1 следует, в частности, что для односвязной $\Omega \subseteq \mathbb{C}^*$ существует $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ такая, что $e^{g(z)} = z$ для всех $z \in \Omega$. Такая функция g называется **ветвью логарифма**. Аналогично, существуют голоморфные ветви функции $\sqrt[n]{z}$ на Ω для всех $n \geqslant 1$.

1.2.7. Принцип аналитического продолжения.

Теорема 1.2.7.1. *Пусть $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *$f^{(n)}(x_0) = 0$ для каждого целого $n \geqslant 0$;*
2. *f тождественно нулевая в некоторой окрестности точки z_0;*
3. *f тождественно нулевая в Ω.*

Доказательство. Очевидно, что (3) $\Rightarrow$ (1). Покажем, что (1) $\Rightarrow$ (2). В некоторой окрестности точки z_0 функция f раскладывается в ряд по степеням $z - z_0$, коэффициенты которого имеют вид $f^{(n)}(z_0)/n!$, то есть, равны нулю. Значит, f тождественно равна нулю в этой окрестности. Осталось доказать, что (2) $\Rightarrow$ (3). Рассмотрим множество Ω' точек $z \in \Omega$, у которых есть окрестность, в которой функция f тождественно равна нулю. Очевидно, что это множество открыто. Покажем, что оно замкнуто. Достаточно показать, что если в любой окрестности точки $z \in \Omega$ есть точки из Ω', то и $z \in \Omega'$. Но для каждого $n \geqslant 0$ функция $f^{(n)}$ непрерывна; если в любой окрестности точки z есть точка, в которой $f^{(n)}$ равна нулю, то и $f^{(n)}(z) = 0$, и, как мы показали выше, из этого следует, что f равна нулю в некоторой окрестности точки z, то есть, $z \in \Omega'$. Теперь множество Ω' открыто, замкнуто, и непусто ($z_0 \in \Omega$); из связности Ω следует, что $\Omega = \Omega'$. $\square$

Следствие 1.2.7.2. *Кольцо $\mathcal{H}(\Omega)$ является областью целостности.*

Доказательство. Пусть $fg = 0$ для $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. В некоторой окрестности точки $z_0 \in \Omega$ обе функции раскладываются в ряд. Кольцо формальных степенных рядов является областью целостности, поэтому одна из функций f, g тождественно равна нулю в этой окрестности. По теореме 1.2.7.1 она равна нулю во всей области $\mathcal{H}(\Omega)$. $\square$

Следствие 1.2.7.3. *Принцип аналитического продолжения Если две голоморфные функции в Ω совпадают в окрестности некоторой точки Ω, то они совпадают везде в Ω.*

Доказательство. Применим теорему 1.2.7.1 к функции $f - g$. $\square$

1.2.8. Точки ветвления.

Предложение 1.2.8.1. *Пусть функция $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ непостоянна, $z_0 \in \Omega$. Тогда существует натуральное число $n > 0$ и голоморфная функция h в некоторой окрестности точки z_0 такие, что $f(z) = f(z_0) + ((z - z_0)h(z))^n$, где $h(z_0) \neq 0$. В частности, существуют диски $D(z_0, \rho)$, $D(f(z_0), r)$ такие, что у любого $w \in D(f(z_0), r)^*$ имеется ровно n прообразов в $D(z_0, \rho)^*$. Если $f(z_0) \neq 0$, то f является гладким диффеоморфизмом в окрестности точки z_0. Любое непостоянное голоморфное отображение открыто. Множество нулей непостоянной функции f дискретно.*

Доказательство. По предположению функция f' не тождественно нулевая. Предположим сначала, что $f'(z_0) \neq 0$. Тогда дифференциал df обратим в точке z_0, и по теореме о неявной функции f является гладким диффеоморфизмом между окрестностью точки z_0 и окрестностью точки $f(z_0)$. Более того, из конформности df следует конформность обратного отображения, а потому и f^{-1} голоморфна. Если же $f'(z_0) = 0$, возьмем наименьшее натуральное $n \geqslant 2$ такое, что $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Тогда $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^n g(z)$ для некоторой голоморфной функции $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, и $g(z_0) \neq 0$. По предложению 1.2.6.1 мы можем в некоторой окрестности точки z_0 записать $g(z) = (h(z))^n$ для голоморфной h, и $h(z_0) \neq 0$. Аналогично рассмотренному выше случаю $n = 1$, мы заключаем, что $(z - z_0)h(z)$ является локальным диффеоморфизмом, откуда следует утверждение про n прообразов. Открытость функции f теперь очевидна. $\square$

Следствие 1.2.8.2 (Принцип максимума). *Пусть $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Если существует точка $z_0 \in \Omega$ такая, что $|f(z)| \leqslant |f(z_0)|$ для всех $z \in \Omega$, то функция f постоянна.*

Доказательство. Если f не постоянна, то $f(\Omega)$ открыто; с другой стороны, если $|f(z)| \leqslant |f(z_0)|$, то $f(z_0) \in \partial f(\Omega)$. $\square$

Теорема 1.2.8.3 (Мореры). *Пусть $f \in C(\Omega)$, и $\mathcal{T}$ — семейство треугольников в Ω, которое содержит все достаточно маленькие треугольники (то есть, у любой точки есть окрестность такая, что все треугольники, лежащие в этой окрестности, лежат в $\mathcal{T}$). Если*

$$\oint_{\partial T} f(z)dz = 0 \text{ для всех } T \in \mathcal{T},$$

то $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Доказательство. Найдем локально первообразную к f. Пусть $D(z_0, r) \subseteq \Omega$ — маленький диск, и пусть

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = z\int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))dz$$

для всех $z \in D(z_0, r)$. Тогда для любого $z \in D(z_0, r)$ и достаточно малого h выполнено

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \int_0^1 f(z+ht)dt.$$

Правая часть стремится к $f(z)$, если h устремить к нулю. Поэтому F голоморфна в диске $D(z_0, r)$, а потому и функция $F' = f$ голоморфна в этом диске. Значит, f голоморфна в области Ω. □

Лемма 1.2.8.4. *Пусть $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ — замкнутая кривая. Тогда для любой точки $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\gamma([0,1])$ интеграл*

$$n(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

*является целым числом. Оно называется **индексом** кривой γ относительно точки z_0. Оно постоянно на каждой компоненте множества $\mathbb{C}\backslash\gamma([0,1])$ и равно 0 на неограниченной компоненте.*

Доказательство. Пусть

$$g(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds.$$

Заметим, что

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-g(t)}\gamma(1) - z_0\right) = -e^{-g(t)}g'(t)(\gamma(t) - z_0) + e^{-g(t)}\gamma'(t) = 0,$$

поскольку $g'(t) = \gamma'(t)/(\gamma(t) - z_0)$. Из этого следует, что $e^{-g(1)}(\gamma(1) - z_0) = e^{-g(0)}(\gamma(0) - z_0) = e^{-g(0)}(\gamma(1) - z_0)$, откуда $e^{g(0)-g(1)}$. Поэтому $g(0) - g(1) \in 2\pi i\mathbb{Z}$, и $n(\gamma; z_0)$ — целое число. Для доказательства постоянства на компонентах заметим, что

$$\frac{d}{dz_0} \oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^2} = -\oint\limits_{\gamma} \frac{d}{dz}[\frac{1}{z - z_0}]dz = 0.$$

Для неограниченной компоненты можно устремить z_0 к бесконечности и получить, что $n(\gamma; z_0) = 0$. □

1.3 От локального к глобальному

1.3.1. Системы линейных уравнений над кольцом голоморфных функций. Мы обещали когда-нибудь доказать предложение 1.1.8.2. Оно утверждает, что если набор функций $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ не имеет общих нулей в Ω, то найдутся функции $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ такие, что $g_1 f_1 + \cdots + g_n f_n = 1$ На него нужно смотреть как на переход от локального к глобальному. Действительно, локально наша задача решается тривиально следующим образом. Пусть $z_0 \in \Omega$; по предположению $g_j(z_0) \neq 0$ для некоторого индекса j. Но тогда $g_j(z) \neq 0$ для z в некоторой окрестности точки z_0, и в этой окрестности существует голоморфная функция $1/g_j$. Возьмем ее в качестве f_j, и положим остальные f_i равными нулю.

Рассмотрим более общую задачу: пусть $U \subseteq \mathbb{C}^n$ — открытое множество, и пусть дана система линейных уравнений вида $GF = H$, где $G \in M(p, q, \mathcal{H}(U))$, $H \in \mathcal{H}(U)^p$, и мы ищем решение $F \in \mathcal{H}(U)^q$. Верно ли, что из существования решения в окрестности каждой точки области U следует существование глобального решения? Ответ на этот вопрос утвердительный, если U является *областью голоморфности*. Любое открытое множество в $\mathbb{C}$ является областью голоморфности, так что ответ всегда утвердительный в случае $n = 1$. В ближайшее время мы ограничимся рассмотрением частного случая — предложения 1.1.8.2.

1.3.2. Разбиения единицы. Заметим, что аналогичный вопрос для класса непрерывных или гладких функций гораздо проще. Для непрерывных функций это следует из свойства отделимости, которое называется *леммой Урысона* для локально компактных хаусдорфовых пространств. Аналогичное утверждение верно для гладких функций на эвклидовых пространствах.

Лемма 1.3.2.1. *Пусть* $K \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$*, где* K *компактно,* U *открыто. Тогда существует функция* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *такая, что*

- $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ *для всех* x*;*
- $f(x) = 1$ *для* $x \in K$*;*
- $f(x) = 0$ *для* $x \notin U$*.*

Доказательство. См. любой курс по вещественному анализу. □

Определение 1.3.2.2. Пусть $\mathcal{U}$ — открытое покрытие открытого множества $U \subseteq \mathbb{R}^n$. **Гладким разбиением единицы**, подчиненным покрытию $\mathcal{U}$, называется набор функций $\varphi_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ таких, что

- $0 \leqslant \varphi_i(x) \leqslant 1$ для всех $x \in U$ и для всех i;
- $\varphi_i(x) = 0$ везде, кроме компактного подмножества некоторого элемента $\mathcal{U}$;
- на любом компакте $K \subseteq U$ все φ_i, кроме конечного числа, обращаются в нуль;
- $\sum_i \varphi_i(x) = 1$ для каждого $x \in U$.

Лемма 1.3.2.3. *Пусть* $\mathcal{U}$ *— открытое покрытие открытого множества* $U \subseteq \mathbb{R}^n$*. Существует гладкое разбиение единицы, подчиненное* $\mathcal{U}$*.*

Доказательство. См. любой курс по вещественному анализу. □

1.3.3. Системы линейных уравнений над кольцом гладких функций.

Теорема 1.3.3.1. *Пусть* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *— открытое множество,* $G \in M(p, q, \mathcal{C}^\infty(U))$*,* $H \in \mathcal{C}^\infty(U)^p$*. Система линейных уравнений* $GF = H$ *имеет решение* $F \in \mathcal{C}^\infty(U)^q$ *тогда и только тогда, когда она имеет решение в* $\mathcal{C}^\infty(V)^q$ *для некоторой окрестности* V *каждой точки* U*.*

Доказательство. Выберем открытое покрытие $\mathcal{U}$ множества U множествами, на которых система имеет решение, и разбиение единицы $\{\varphi_i\}$, подчиненное этому покрытию. Каждая функция φ_i равна нулю вне компактного подмножества некоторого $U_i \in \mathcal{U}$, и существуют $F_i \in \mathcal{C}^\infty(V_i)^q$ такие, что $GF_i = H$ на V_i. Можно считать, что все компоненты вектора $\varphi_i F_i$ равны нулю на дополнении V_i и получить гладкие функции на всем U. Тогда и сумма $F = \sum_i \varphi_i F_i$ будет гладкой. При этом $FG = G\sum_i \varphi_i F_i = \sum_i \varphi_i GF_i = \sum_i \varphi_i H = H$. Поэтому F — глобальное решение нашей системы. □

Конечно, для голоморфных функций такое рассуждение не работает, поскольку лемма Урысона для них безнадежно неверна (даже в случае одной переменной). Например, голоморфная функция тождественно равна нулю, если она равна нулю на некотором открытом подмножестве. Но задачу для голоморфных функций можно свести к уже решенной с помощью неоднородных уравнений Коши–Римана.

1.3.4. Обобщенная интегральная формула Коши. Напомним, что дифференцируемая функция f голоморфна тогда и только тогда, когда $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = 0$. Рассмотрим неоднородное уравнение Коши–Римана $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g(z) = f(z)$. Мы покажем, что для любой $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ оно имеет решение $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

Сначала докажем обобщенную интегральную формулу Коши.

Теорема 1.3.4.1. *Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество, ограниченное хорошей (спрямляемой) замкнутой несамопересекающейся кривой. Пусть f — гладкая функция в окрестности замыкания $\overline{U}$, и $z \in U$. Тогда*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_U \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z}.$$

Доказательство. Заметим, что для фиксированного z выполнено

$$d\left(f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z}\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right) d\bar{\zeta} \wedge d\zeta = \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z}.$$

Выберем маленький диск $D(z, r) \subseteq U$ и обозначим через γ_r границу этого диска. По теореме Стокса

$$\iint\limits_{U \setminus D(z,r)} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z} = \int_\gamma f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\gamma_r} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Заметим, что (например, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости)

$$\lim_{r \to 0} \iint\limits_{U \setminus D(z,r)} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z} = \iint\limits_U \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z}.$$

Кроме того,

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \lim_{r \to 0} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) i dt = 2\pi i f(z).$$

□

1.3.5. Неоднородное уравнение Коши–Римана.

Предложение 1.3.5.1. *Пусть $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, где $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество, содержащее компакт K. Тогда существуют открытое множество V и $g \in \mathcal{C}^\infty(V)$ такие, что $K \subseteq V \subseteq U$ и $\partial g / \partial \bar{z} = f$ на V.*

Доказательство. Можно считать, что f — гладкая функция на всей плоскости $\mathbb{C}$ с компактным носителем, лежащим внутри U. Положим теперь

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_{\mathbb{C}} f(\zeta) \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z}.$$

Нетрудно видеть, что $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$. Посчитаем производную $\partial g/\partial \bar{z}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g(z) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \iint\limits_{\mathbb{C}} f(\zeta)\frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \iint f(\zeta + z)\frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\partial f(\zeta + z)}{\partial \bar{z}}\frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\partial f(\zeta + z)}{\partial \bar{\zeta}}\frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}\frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z} \\
&= f(z)
\end{aligned}$$

□

Теорема 1.3.5.2. *Пусть* $U \subseteq \mathbb{C}$ *— открытое множество, и* $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$*. Существует* $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ *такая, что* $\partial g/\partial \bar{z} = f$*.*

Поверим пока в эту теорему.

Доказательство предложения 1.1.8.2. Для каждого открытого множества $V \subseteq U$ можно рассмотреть гомоморфизм $\mathcal{H}(V)$-модулей $\varphi_0\colon \mathcal{H}(V)^n \to \mathcal{H}(V)$, заданный умножением на строку $G^T = (g_1, \dots, g_n)$. Иными словами, $\varphi_0(F) = g_1 f_1 + \dots + g_n f_n = F^T G = G^T F$. По нашему предположению у каждой точки U есть окрестность V, для которой это отображение сюръективно. Мы хотим показать, что оно сюръективно при $V = U$.

Определим еще один гомоморфизм $\mathcal{H}(V)$-модулей $\varphi_1\colon \mathcal{H}(V)^m \to \mathcal{H}(V)^n$, где $m = n(n-1)/2$. Отождествим $\mathcal{H}(V)^m$ с пространством кососимметричных матриц из $M(n, n, \mathcal{H}(V))$. Для такой матрицы $A = (a_{ij})$ положим $\varphi_1(A) = AG$ Тогда $\varphi_0 \circ \varphi_1(A) = G^T A G = 0$, поскольку A кососимметрична, а GAG^T — скаляр. Значит, $\mathrm{img}(\varphi_1) \subseteq \ker(\varphi_0)$. Покажем, что на самом деле отображение φ_1 локально сюръективно на $\ker(\varphi_0)$. Выберем $F = (f_1, \dots, f_n)^T \in \mathcal{H}(V)^n$ так, что $G^T F = \varphi_0(F) = 1$ на V, и пусть $H \in \ker(\varphi_0)$. Тогда матрица $A = HF^T - FH^T$ кососимметрична, а $\varphi_1(A) = (HF^T - FH^T)G = H$.

Мы получили последовательность гомоморфизмов $\mathcal{H}(V)$-модулей

$$\mathcal{H}(V)^m \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{H}(V)^n \xrightarrow{\varphi_0} \mathcal{H}(V) \to 0,$$

которая локально точна. Заметим, что отображения φ_0 и φ_1 точно так же определены и для векторов гладких функций, и для них выполняются те же свойства точности. Имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\mathcal{H}(U)^m \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "i"] & \mathcal{H}(U)^n \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, "i"] & \mathcal{H}(U) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\
\mathcal{C}^\infty(U)^m \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\frac{\partial}{\partial \bar{z}}"] & \mathcal{C}^\infty(U)^n \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, "\frac{\partial}{\partial \bar{z}}"] & \mathcal{C}^\infty(U) \arrow[r] \arrow[d, "\frac{\partial}{\partial \bar{z}}"] & 0 \\
\mathcal{C}^\infty(U)^m \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d] & \mathcal{C}^\infty(U)^n \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d] & \mathcal{C}^\infty(U) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

с точными (по теореме 1.3.5.2) столбцами. Строки ее являются комплексами, причем вторая и третья строки точны по теореме 1.3.3.1. Теперь доказательство легко завершить диаграммным поиском. Напомним, что нам нужно найти вектор $F \in \mathcal{H}(U)^n$ такой, что $\varphi_0(F) = 1$. Выберем $\widetilde{F} \in \mathcal{C}^\infty(U)^n$ так. что $\varphi_0(\widetilde{F}) = 1$. Тогда $\varphi_0(\partial\widetilde{F}/\partial\overline{z}) = (\partial/\partial\overline{z})\varphi_0(\widetilde{F}) = 0$. Из точности третьей строки следует, что найдется $A \in \mathcal{C}^\infty(U)^m$ такой, что $\varphi_1(A) = \partial\widetilde{F}/\partial\overline{z}$. Из сюръективности левого столбца следует, что найдется $B \in \mathcal{C}^\infty(U)^m$ такой, что $\partial B/\partial\overline{z} = A$. Положим $F = \widetilde{F} - \varphi_1(B)$; тогда $\partial F/\partial\overline{z} = \partial\widetilde{F}/\partial\overline{z} - (\partial/\partial\overline{z})(\varphi_1(B)) = \partial\widetilde{F}/\partial\overline{z} - \varphi_1(A) = 0$. Значит, функция F голоморфна. Кроме того, $\varphi_0(F) = \varphi_0(\widetilde{F}) - \varphi_0(\varphi_1(B)) = 1$. □

Для доказательства теоремы 1.3.5.2 нам понадобится два вспомогательных факта. Первый утверждает, что любое открытое подмножество плоскости можно «приблизить» возрастающей цепочкой компактов.

Предложение 1.3.5.3. *Для любого открытого подмножества $U \subseteq \mathbb{C}$ существует последовательность $\{K_n\}$ компактных множеств такая, что*

- $U = \bigcup_n K_n$*;*
- K_n *содержится во внутренности* K_{n+1} *для всех* n*;*
- *каждое компактное подмножество* U *содержится в некотором* K_n*;*
- *каждая компонента дополнения к* K_n *содержит некоторую компоненту дополнения к* U*.*

Неформально говоря, последнее свойство означает, что в K_n нет «дырок» кроме тех, которые там должны быть из-за наличия дырок в U.

Доказательство. Положим $V_n = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > n\} \cup \bigcup_{a \notin U} D(a, 1/n)$, $K_n = \mathbb{C} \backslash V_n$. Заметим, что множество K_n содержится в U, замкнуто и ограничено, а потому компактно. Очевидно, что $U = \bigcup K_n$. Если $z \in K_n$ и $r = 1/n - 1/(n+1)$, то $D(z, r) \subseteq K_{n+1}$; поэтому K_n лежит во внутренности K_{n+1}.

Пусть W_n — внутренность K_n. Заметим, что $U = \bigcup W_n$; если $K \subseteq U$ — компакт, то K содержится в объединении конечного числа W_i, а потому и в объединении конечного числа K_i. Наконец, для доказательства последнего свойства заметим, что каждый диск из определения V_n пересекается с $\mathbb{C}\backslash U$ и связен. Значит, каждая компонента V_n пересекает $\mathbb{C}\backslash U$. Из этого следует, что никакая компонента $\mathbb{C}\backslash U$ не может пересекать две компоненты V_n. □

Предложение 1.3.5.4 (Теорема Рунге). *Пусть K — компактное подмножество комплексной плоскости, и $\{\alpha_j\}$ — множество, содержащее по одной точке в каждой компоненте $\mathbb{C}_\infty \backslash K$. Если $U \supseteq K$ — открытое подмножество, $f \in \mathcal{H}(U)$, $\varepsilon > 0$, то существует рациональная функция R, все полюса которой лежат в заданном множестве $\{\alpha_j\}$, такая, что $|f(z) - R(z)| < \varepsilon$ для всех $z \in K$.*

Доказательство. Рассмотрим банахово пространство $C(K)$ непрерывных комплекснозначных функций на K. Обозначим через M подпространство в $C(K)$, состоящее из ограничений на K рациональных функций, все полюса которых лежат в $\{\alpha_j\}$. Нам нужно показать, что f лежит в замыкании M. По теореме Хана–Банаха это равносильно тому, что каждый ограниченный линейный функционал на $C(K)$, равный нулю на M, равен нулю и на f. По теореме Риса каждый такой функционал есть интеграл по некоторой борелевской мере. Остается доказать следующий факт: если μ — комплексная борелевская мера на K такая, что $\int_K R d\mu = 0$ для всех рациональных функций R с полюсами только в $\{\alpha_j\}$, а $f \in \mathcal{H}(U)$, то $\int_K f\, d\mu = 0$.

Для доказательства этого факта рассмотрим функцию $h(z) = \int_K \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}$ для $z \in \mathbb{C}_\infty \backslash K$. Нетрудно видеть, что функция h голоморфна на $\mathbb{C}_\infty \backslash K$.

Пусть V_j — компонента дополнения к K, содержащая α_j, и пусть $D(\alpha, r) \subseteq V_j$ (для удобства пока будем считать, что $\alpha_j \neq \infty$). Тогда предел

$$\frac{1}{\zeta - z} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(z - \alpha_j)^n}{(\zeta - \alpha_j)^{n+1}}$$

сходится равномерно по $\zeta \in K$ для фиксированного $z \in D(\alpha_j, r)$. Каждая сумма в правой части является рациональной функцией, поэтому к ней можно применить наше предположение. Получаем, что $h(z) = 0$ для всех $D(\alpha_j, r)$. По теореме 1.2.7.1 теперь $h(z) = 0$ для всех $z \in V_j$. Это рассуждение (с небольшой модификацией в случае $\alpha_j = \infty$) проходит для всех j. Это значит, что $h(z) = 0$ для всех $z \in \mathbb{C}_\infty \backslash K$. Выберем замкнутый путь γ в $U \backslash K$ так, чтобы формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

выполнялась для любой точки $z \in K$ и для любой $f \in \mathcal{H}(U)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\int_K f\, d\mu &= \int_K d\mu(\zeta) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - \zeta} dw \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(w) dw \int_K \frac{d\mu(\zeta)}{w - \zeta} \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(w) h(w) dw \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Доказательство теоремы 1.3.5.2. Рассмотрим последовательность $\{K_n\}$ компактных множеств с такими свойствами:

- K_n содержится во внутренности K_{n+1} для всех n;
- объединение внутренностей K_n совпадает с U;
- каждая ограниченная компонента дополнения K_n пересекается с дополнением к U.

По теореме Рунге каждая функция, голоморфная в окрестности K_n, может быть равномерно аппроксимирована на K_n рациональными функциями, все полюса которых лежат в дополнении к U.

Докажем по индукции, что существует последовательность $\{g_n\}$, где g_n — гладкая функция, для которой $\partial g_n / \partial \bar{z} = f$ в некоторой окрестности K_n, и $|g_n(z) - g_{n-1}(z)| < 2^{-n}$ для всех $z \in K_{n-1}$ (при $n > 1$). Функцию g_1 можно выбрать в силу предложения 1.3.5.1. Сделаем индукционный переход: пусть построены функции $g_1, \ldots, g_n$. По предложению 1.3.5.1 существует функция h, гладкая в окрестности K_{n+1}, для которой $\partial h / \partial \bar{z} = f$ в этой окрестности. Тогда в окрестности K_n выполнено $\partial(h - g_n)/\partial \bar{z} = 0$, и потому функция $h - g_n$ голоморфна в этой окрестности. По теореме Рунге ее можно приблизить рациональной функций r с полюсами в дополнении U. Выберем r так, что $|h(z) - g_m(z) - r(z)| < 2^{-n}$ для всех $z \in K_n$.

Положим теперь $g_{n+1} = h - r$. Нетрудно видеть, что $\partial g_{n+1}/\partial \bar{z} = f$ в окрестности K_{n+1}, и что $|g_{n+1}(z) - g_n(z)| < 2^{-n}$ на K_n.

Построенная последовательность $\{g_n\}$ сходится равномерно на каждом K_n к функции g, определенной на всем U. Разность $g_{n+j} - g_n$ голоморфна в окрестности K_n для всех n, j. Поэтому при фиксированном n последовательность $\{g_{n+j} - g_n\}$ состоит из голоморфных функций в окрестности K_n и равномерно сходится на K_n. Из этого следует, что и предел этой последовательности, который равен $g - g_n$, голоморфен во внутренности K_n. Поэтому функция g гладка на внутренности K_n. Это верно для каждого n, поэтому $g \in \mathcal{C}^\infty$, и очевидно, что $\partial g/\partial \bar{z} = f$. □

1.3.6. Задача Кузена для одной переменной. Сейчас мы извлечем еще несколько важных следствий из разрешимости неоднородного уравнения Коши–Римана. Следующее предложение фактически является решением задачи Кузена для одной переменной.

Предложение 1.3.6.1. *Пусть $\{U_i\}$ — семейство открытых множеств в $\mathbb{C}$, и $\{g_{ij}\}$ — семейство голоморфных функций таких, что*

- $g_{ij} \in \mathcal{H}(U_i \cap U_j)$ *для всех* i, j;
- $g_{ij} = -g_{ji}$ *для всех* i, j;
- $g_{ij} + g_{ij} + g_{ki} = 0$ *для всех* i, j, k.

*(такой набор голоморфных функций называется **данными Кузена на покрытии** $\{U_i\}$). Тогда существует семейство функций $\{h_i\}$ таких, что $h_i \in \mathcal{H}(U_i)$ для всех i, и что $g_{ij} = h_j - h_i$ для всех i, j.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_p\}$ — гладкое разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}$ множества $U = \bigcup_i U_i$. То есть,

- для каждого p существует индекс k_p такой, что φ_p имеет компактный носитель в U_{k_p};
- на любом компактном подмножестве U все φ_p, кроме конечного числа, обращаются в нуль;
- $\sum_p \varphi_p = 1$.

Можно считать, что функция $\varphi_p g_{k_p i}$ определена на U_i, доопределив ее нулем на $U_i \backslash (U_i \cap U_{k_p})$. Для каждого i определим функцию $f_i = \sum_p \varphi_p g_{k_p i}$ на U_i. Тогда на пересечении $U_i \cap U_j$ выполнено $f_j - f_i = \sum_p \varphi_p (g_{k_p j} - g_{k_p i}) = \sum_p \varphi_p g_{ij} = g_{ij}$. Значит, набор $\{f_i\}$ является гладким решением задачи Кузена.

Заметим теперь, что $\partial f_i/\partial \bar{z} = \partial f_j/\partial \bar{z}$ на $U_i \cap U_j$, поскольку разность $f_j - f_i = g_{ij}$ голоморфна. Значит, существует функция $u \in \mathcal{C}^\infty(U)$ такая, что $u = \partial f_i/\partial \bar{z}$ для всех i. По теореме 1.3.5.2 существует функция $v \in \mathcal{C}^\infty(U)$ такая, что $\partial v/\partial \bar{z} = u$. Тогда функция $h_i = f_i - v$ голоморфна на U_i, и $h_j - h_i = g_{ij}$, поэтому мы нашли голоморфное решение задачи Кузена. □

1.3.7. Задача Миттаг–Лефлера. Перейдем к теореме Миттаг–Лефлера. Напомним, что мероморфная функция f на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{C}$ — это функция, определенная и голоморфная во всех точках U, кроме дискретного множества, в которых она имеет полюса. Полюс порядка k в точке λ означает, что $(z - \lambda)^k f(z)$ можно доопределить в точке λ до голоморфной функции в некоторой окрестности λ. В некотором диске с центром в λ тогда можно записать $f(z) = a_{-k}(z-\lambda)^{-k} + \dots + a_{-1}(z-\lambda)^{-1} + a_0 + a_1(z-\lambda) + a_2(z-\lambda)^2 + \dots$. Рациональная функция $a_{-k}(z-\lambda)^{-k} + \dots + a_{-1}(z-\lambda)^{-1}$ называется **главной частью** функции f в полюсе λ.

Теорема 1.3.7.1 (Миттаг–Лефлера). *Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество, $S \subseteq U$ — дискретное подмножество, и пусть для каждой точки $\lambda \in S$ задан многочлен P_λ от $(z-\lambda)^{-1}$ без свободного члена. Тогда существует мероморфная функция f на U, все полюса которой лежат в S, причем для каждой точки $\lambda \in S$ главная часть f в λ равна P_λ.*

Доказательство. Выберем открытое покрытие $\{U_i\}$ множества U так, чтобы каждое U_i содержало не более одной точки из S. Для каждого i зададим мероморфную функцию f_i на U_i следующим образом: если U_i содержит точку $w_i \in S$, положим $f_i = P_{w_i}$, а иначе пусть $f_i = 0$. Зададим данные Кузена на нашем покрытии следующим образом: положим $g_{ij} = f_j - f_i$ на $U_i \cap U_j$. Заметим, что функция g_{ij} голоморфна. Нетрудно проверить, что это действительно данные Кузена, и по предложению 1.3.6.1 существует набор $\{h_i\}$ функций $h_i \in \mathcal{H}(U_i)$ такой, что $h_j - h_i = g_{ij}$ на $U_i \cap U_j$. Тогда $f_i - h_i = f_j - h_j$ на $U_i \cap U_j$, и потому эти функции можно склеить в одну мероморфную функцию f на U. Прибавление к f_i голоморфной функции не меняет полюсов и главных частей в этих полюсах, поэтому f удовлетворяет нужным условиям. $\square$

1.3.8. Теорема Вейерштрасса.

Теорема 1.3.8.1. *Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество; $S \subseteq U$ — дискретное множество, и для каждой точки $\lambda \in S$ задано ненулевое целое число k_λ. Тогда существует мероморфная функция на U, которая в каждой точке $\lambda \in S$ имеет нуль порядка k_λ, если $k_\lambda > 0$, и полюс порядка $-k_\lambda$, если $k_\lambda < 0$, и не имеет других нулей и полюсов.*

Доказательство. Выберем последовательность $\{U_n\}$ открытых множеств с компактными замыканиями так, что

- $\overline{U_n} \subseteq U_{n+1}$;
- $\bigcup U_n = U$;
- каждая ограниченная компонента дополнения к $\overline{U_n}$ содержит точку в дополнении к U.

Более того, потребуем, чтобы точки из S не лежали на границе множеств U_n. Обозначим $K_n = \overline{U_n}$, $S_n = S \cap K_n = S \cap U_n$. Мы построим последовательность функций $\{f_n\}$ со следующими свойствами

1. f_n — рациональная функция на $\mathbb{C}$;
2. f_n имеет нули и полюса нужных порядков в точках из S_n, и не имеет других нулей и полюсов на K_n;
3. нули и полюса функции f_{n+1}/f_n встречаются парами: в каждой паре находятся нуль и полюс одного порядка в двух точках, лежащих в одной компоненте дополнения к K_n.

Для начала положим $f_1(z) = \prod_{\lambda \in S_1}(z-\lambda)^{k_\lambda}$. Очевидно, что f_1 обладает нужными свойствам. Пусть теперь функции $f_1, \dots, f_n$ построены, и мы хотим построить f_{n+1}. Выберем какую-нибудь рациональную функцию ν на $\mathbb{C}$ так, чтоб у ν были нужные нули и полюса в точках S_{n+1}, и не было других нулей и полюсов на K_{n+1}. Функция $f_n^{-1}\nu$ рациональная, и все ее нули и полюса лежат в дополнении к K_n. Значит, она имеет вид

$$f_n^{-1}(z)\nu(z) = \prod (z - a_i)^{m_i},$$

где $a_i \notin K_n$ для всех i. Для каждого i рассмотрим компоненту в дополнении к K_n, в которой лежит точка a_i и заметим, что в той же компоненте лежит некоторая точка $b_i \notin K_{n+1}$. Положим теперь

$$f_{n+1} = \nu(z) \prod_i (z - b_i)^{-m_i}.$$

Тогда f_{n+1} имеет нужные нули и полюса на K_{n+1}, а нули и полюса функции f_{n+1}/f_i встречаются парами вида (a_i, b_i). Мы построили нужную последовательность $\{f_n\}$.

Пусть h — рациональная функция, а γ — простая замкнутая кривая на комплексной плоскости, которая не проходит через нули и полюса h. Тогда выражение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)} d\zeta$$

равно числу нулей минус число полюсов функции h (с учетом кратности) в ограниченной компоненте дополнения к γ. Если теперь γ лежит в открытом множестве V, а нули и полюса функции h встречаются парами одной кратности, лежащими в одной компоненте дополнения к V, то такой интеграл равен нулю. Из этого, в свою очередь, следует, что на V корректно определен голоморфный логарифм функции h, то есть, функция $g \in \mathcal{H}(V)$ такая, что $h(z) = e^{g(z)}$: достаточно положить $g(z) = \ln h(z_0) + \int_{z_0}^{z} \frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)} d\zeta$.

Применим указанное рассуждение к функции $h = f_{n+1}/f_n$ и открытому множеству $V = U_n$. Получим, что существует функция $g_n \in \mathcal{H}(U_n)$ такая, что $\exp(g_n) = f_{n+1}/f_n$. Определим теперь данные Кузена $\{g_{ij}\}$ на покрытии $\{U_n\}$ следующим образом: для $i < j$ положим $g_{ij} = g_i + g_{i+1} + \dots + g_{j-1}$ на $U_i = U_i \cap U_j$, а для $i > j$ положим $g_{ij} = -g_{ji}$. Нетрудно видеть, что $e^{g_{ij}} = f_j/f_i$ на $U_i \cap U_j$ для всех пар i, j. Кроме того, $g_{ij} + g_{jk} + g_{ki} = 0$ для всех троек i, j, k.

По предложению 1.3.6.1 существут голоморфные функции $h_i \in \mathcal{H}(U_i)$ такие, что $g_{ij} = h_j - h_i$ на $U_i \cap U_j$. Тогда $f_j e^{-h_j} = f_i e^{g_{ij}} e^{-h_j} = f_i e^{-h_i}$ на $U_i \cap U_j$. Поэтому функции $f_i e^{-h_i}$ на покрытии $\{U_i\}$ склеиваются в голоморфную функцию f на U. Очевидно, что f имеет нужные нули и полюса на U. □

2 Функции нескольких комплексных переменных

2.1 Голоморфные функции

2.1.1. Интегральная формула Коши. Как определить голоморфные функции нескольких комплексных переменных? Можно предложить следующие варианты:

- назовем функцию голоморфной, если она голоморфна по каждой координате;
- назовем функцию голоморфной, если она голоморфна по каждой координате и непрерывна как функция нескольких переменных;
- назовем функцию голоморфной, если ее можно разложить в мульти-степенной ряд.

Оказывается, эти три определения равносильны.

Определение 2.1.1.1. Мы будем называть **открытым полидиском** с центром в точке $a = (a_1, \dots, a_n)$ и полирадиусом $r = (r_1, \dots, r_n)$ множество

$$D(a, r) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_j - a_j| < r_j, \quad j = 1, \dots, n\}.$$

Это просто декартово произведение открытых дисков $D(a_j, r_j)$. Его замыкание будет обозначаться через $\overline{D}(a, r)$.

Предложение 2.1.1.2 (Интегральная формула Коши). *Пусть f — функция, определенная в некоторой окрестности U замкнутого полидиска $\overline{D}(a, r)$, и голоморфная по каждой координате z_i в каждой точке этой окрестности. Тогда*

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{|\zeta_n - a_n| = r_n} \int_{|\zeta_1 - a_1| = r_1} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) d\zeta_1 \dots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)}$$

для всех точек $z = (z_1, \dots, z_n) \in D(a, r)$.

Доказательство. Применим n раз обычную формулу Коши (предложение 1.2.3.1). □

Заметим, что функция f не предполагается непрерывной, ограниченной, или даже интегрируемой на $\overline{D}(a, r)$. Интеграл в предложении 2.1.1.2 имеет смысл только как кратный интеграл, но не как интеграл по отношению к произведению мер на подмножестве $\mathbb{C}^n$.

2.1.2. Определение голоморфной функции.

Лемма 2.1.2.1 (Лемма Осгуда). *Пусть функция f на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{C}^n$ ограничена на каждом компактном подмножестве U и голоморфна по каждой координате на U. Тогда для всякого замкнутого полидиска $\overline{D}(a, s) \subseteq U$ степенной ряд вида*

$$\sum_{i_1, \dots, i_n = 0}^{\infty} c_{i_1, \dots, i_n} (z_1 - a_1)^{i_1} \dots (z_n - a_n)^{i_n}$$

равномерно сходится к f на $\overline{D}(a, s)$.

Доказательство. Пусть $r_i > s_i$ — такие числа, что замкнутый полидиск $\overline{D}(a, r)$ также содержится в U. По условию функция f ограничена на $\overline{D}(a, r)$. Подставим в правую часть интегральной формулы Коши следующее разложение знаменателя в ряд:

$$\frac{1}{(z_1 - \zeta_1) \dots (\zeta_n - z_n)} = \sum_{i_1, \dots, i_n = 0}^{\infty} \frac{(z_1 - a_1)^{i_1} \dots (z_n - a_n)^{i_n}}{(\zeta_1 - a_1)^{i_1 + 1} \dots (\zeta_n - a_n)^{i_n + 1}}.$$

Этот ряд сходится равномерно по ζ и z для всех $|z_i - a_i| \leqslant s_i < r_i = |\zeta_i - a_i|$. Поэтому его можно почленно интегрировать. Полученный ряд равномерно сходится по $z \in \overline{D}(a, s)$. Получаем, что

$$f(z) = \sum_{i_1, \dots, i_n = 0}^{\infty} c_{i_1, \dots, i_n} (z_1 - a_1)^{i_1} \dots (z_n - a_n)^{i_n},$$

и ряд в правой части сходится равномерно на $\overline{D}(a, s)$, где

$$c_{i_1, \dots, i_n} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{|\zeta_n - a_n| = r_n} \int_{|\zeta_1 - a_1| = r_1} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) d\zeta_1 \dots d\zeta_n}{(\zeta_{-} a_1)^{u_1 + 1} \dots (\zeta_n - a_n)^{i_n + 1}}.$$

□

Определение 2.1.2.2. Функция f на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{C}^n$ называется **голоморфной в точке** a, если у нее есть разложение в степенной ряд, как в лемме 2.1.2.1, сходящееся к f в некотором открытом полидиске с центром в a. Функция называется **голоморфной на** U, если она голоморфна в каждой точке U.

По лемме 2.1.2.1, если функция голоморфна по каждой координате отдельно в каждой точке U и ограничена на каждом компакте в U, то она голоморфна. В частности, если функция голоморфна по каждой координате отдельно и непрерывна, то она голоморфна. Позднее мы покажем, что от требования непрерывности или ограниченности на компактах можно отказаться.

Предложение 2.1.2.3. *Пусть f — голоморфная функция в окрестности замкнутого полидиска $\overline{D}(a, r)$, и $|f|$ ограничена константой M на этом полидиске. Тогда для каждого мульти-индекса $(i_1, \dots, i_n)$ выполнено неравенство*

$$\left| \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial z_n^{i_n}} f(a) \right| \leqslant M(i_1!) \dots (i_n!) r_1^{-i_1} \dots r_n^{-i_n}.$$

Доказательство. Разложим f в степенной ряд, сходящийся на $\overline{D}(a, r)$, как в лемме 2.1.2.1. Продифференцируя нужное количество раз и подставив значения $c_{i_1,\dots,i_n}$ из доказательства леммы 2.1.2.1, получим нужные оценки. □

2.1.3. Неравенство субгармоничности.

Теорема 2.1.3.1 (Неравенство субгармоничности). *Пусть функция f голоморфна в окрестности замкнутого полидиска $\overline{D} = \overline{D}(a, r)$. Тогда*

$$\ln |f(a)| \leqslant \frac{1}{D(a, r)} \int_{D(a,r)} \ln |f(z)| dV(z),$$

где dV обозначает меру объема на $\mathbb{C}^n$.

Доказательство. Напомним, как выглядит неравенство субгармоничности для одной переменной:

$$\ln |g(a)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |g(a + \rho e^{i\theta})| d\theta.$$

Упражнение: докажите это неравенство для любой голоморфной функции g.

Применим его к функции f, рассматриваемой как функция от одной переменной z_1, в которой остальные переменные принимают фиксированные значения $a_2, \dots, a_n$. Для $0 \leqslant \rho_1 \leqslant r_1$ получаем

$$\ln |f(a)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(a_1 + \rho_1 e^{i\theta_1}, a_2, \dots, a_n)| d\theta_1.$$

Применим теперь неравенство субгармоничности к функции, стоящей под знаком интеграла: рассмотрим ее как функцию f от z_2, в которой значения $z_1 = a_1 + \rho_1 e^{i\theta_1}$, $z_3 = a_3$, ..., $z_n = a_n$ фиксированы. Для $0 \leqslant \rho_2 \leqslant r_2$ получаем

$$\ln |f(a)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(a_1 + \rho_1 e^{i\theta_1}, a_2 + \rho_2 e^{i\theta_2}, a_3, \dots, a_n)| d\theta_1 d\theta_2.$$

Продолжая этот процесс, получаем

$$\ln |f(a)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \ln |f(a_1 + \rho_1 e^{i\theta_1}, \dots, a_n + \rho_n e^{i\theta_n})| d\theta_1 \dots d\theta_n.$$

Умножая обе части на $\rho_1, \dots, \rho_n$ и интегрируя относительно $d\rho_1 \dots d\rho_n$ по множеству $\{0 \leqslant \rho_i \leqslant r_i \mid i = 1, \dots, n\}$, получаем нужное неравенство. □

2.1.4. Теорема Хартога. В следующих утверждениях мы зачастую будем доказывать некоторые факты про подмножества $\mathbb{C}^n$ индукцией по n. Для этого полезно ввести следующие обозначения: для вектора $z = (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n)^T \in \mathbb{C}^n$ мы будем обозначать через $\widetilde{z}$ «усеченный» вектор без последней координаты: $\widetilde{z} = (z_1, \dots, z_{n-1})^T$. Таким образом, $z = (\widetilde{z}, z_n)$. Аналогично, полирадиус r можно записать в виде $r = (\widetilde{r}, r_n)$. Тогда полидиск $D(a, r)$ можно записать в виде $D(\widetilde{a}, \widetilde{r}) \times D(a_n, r_n)$.

Следующая лемма утверждает, что голоморфную функцию на полидиске можно продолжить вдоль одной координаты, если соответствующий степенной ряд сходится в этом продолжении (равномерно на компактах) как ряд от этой координаты при фиксированных остальных.

Лемма 2.1.4.1 (Лемма Хартога). *Пусть* f *голоморфна на полидиске* $D(0, r)$*, и пусть* $f(z) = \sum_k f_k(\widetilde{z}) z_n^k$ *— разложение* f *в степенной ряд по переменной* z_n*, где функции* f_k *голоморфны на* $D(0, \widetilde{r})$*. Предположим, что существует* $c > r_n$ *такое, что указанный ряд от* z_n *сходится в* $\overline{D}(0, c)$ *для каждого фиксированного* $\widetilde{z} \in D(0, \widetilde{r})$*. Тогда он сходится равномерно на каждом компактном подмножестве полидиска* $D(0, \widetilde{r}) \times D(0, c)$*. Как следствие,* f *продолжается до голоморфной функции в этом большем полидиске.*

Доказательство. Как обычно, для доказательства сходимости степенного ряда достаточно сравнить его с геометрической прогрессией. Возьмем произвольную точку $\widetilde{a} \in D(0, \widetilde{r})$ и окружим ее маленьким замкнутым полидиском $\overline{D}(\widetilde{a}, \widetilde{s}) \subseteq D(0, \widetilde{r})$. Рассмотрим функцию $|f|$ на компактном полидиске $\overline{D}(\widetilde{a}, \widetilde{s}) \times \overline{D}(0, b)$ для некоторого $b < r_n$. Этот полидиск содержится в полидиске $D(0, r)$, на котором функция f голоморфна. Поэтому $|f|$ ограничена на нем некоторой константой M (можно считать, что $M > 1$). Из неравенств Коши следует, что $|f_k(\widetilde{z})| \leqslant M b^{-k}$ для всех $\widetilde{z} \in \overline{D}(\widetilde{a}, \widetilde{s})$. Поэтому $k^{-1} \ln |f_k(\widetilde{z})| \leqslant k^{-1} \ln M - \ln b \leqslant \ln M - \ln b = M_0$ для всех $\widetilde{z} \in \overline{D}(\widetilde{a}, \widetilde{s})$ и для всех k. По предположению степенной ряд для f сходится в точке $(\widetilde{z}, c)$. Значит, последовательность $|f_k(\widetilde{z})| c^k$ стремится к нулю. Поэтому

$$\limsup_k (k^{-1} \ln |f_k(\widetilde{z})|) \leqslant -\ln c$$

для всех $\overline{z} \in \overline{D}(\widetilde{a}, \widetilde{s})$. Заметим, что функции $k^{-1} \ln |f_k(\overline{z})|$ ограничены и измеримы на $\overline{D}(\widetilde{a}, \widetilde{s})$. По лемме Фату тогда

$$\begin{aligned}\limsup_k \int_{D(\widetilde{a}, \widetilde{s})} k^{-1} \ln |f_k(\widetilde{z})| dV(\widetilde{z}) &\leqslant \int_{D(\widetilde{a}, \widetilde{s})} \limsup_k k^{-1} \ln |f_k(\widetilde{z})| dV(\widetilde{z}) \\ &\leqslant -|D(\widetilde{a}, \widetilde{s})| \ln c.\end{aligned}$$

Указанное неравенство означает, что интеграл $\int_{D(\widetilde{a}, \widetilde{s})} k^{-1} \ln |f_k(\widetilde{z}) dV(\widetilde{z})$ сколь угодно близко приближается снизу к $-|D(\widetilde{a}, \widetilde{s})| \ln c$. Поэтому для каждого положительного $c_0 < c$ можно выбрать $\delta > 0$ так, что

$$\int_{D(\widetilde{a}, \widetilde{s})} k^{-1} \ln |f_k(\widetilde{z})| dV(\widetilde{z}) \leqslant -|D(\widetilde{a}, \widetilde{s})| \ln c_0 - \delta$$

начиная с некоторого k. Функция, стоящая под интегралом, ограничена для всех k и всех $\widetilde{z} \in D(\widetilde{a}, \widetilde{s})$. Поэтому можно выбрать достаточно маленькое $\varepsilon > 0$ так, что при замене области интегрирования $D(\widetilde{a}, \widetilde{s})$ на $D_\varepsilon = D(\widetilde{w}, \widetilde{s} - \varepsilon^{(n-1)})$, где $\widetilde{w} \in D(\widetilde{a}, \varepsilon^{(n-1)})$, а $\varepsilon^{(n-1)} = (\varepsilon, \dots, \varepsilon)$, получим

$$\int_{D_\varepsilon} k^{-1} \ln |f_k(\widetilde{z})| dV(\widetilde{z}) \leqslant -|D_\varepsilon| \ln c_0.$$

По теореме 2.1.3.1 из этого следует, что $k^{-1}\ln|f_k(\widetilde{w})| \leqslant -\ln c_0$, то есть, что $|f_k(\overline{w})|c_0^k \leqslant 1$ для всех $\widetilde{w} \in D_\varepsilon$ и для всех достаточно больших k. Из этого следует, что ряд для функции f равномерно сходится на компактных подмножествах полидиска $D_\varepsilon \times D(0, c_0)$. Это рассуждение работает для произвольной точки $\widetilde{a} \in D(0, \widetilde{r})$ и для произвольного $c_0 < c$, сколь угодно близкого к c. Поэтому ряд для функции f продолжает эту функцию до непрерывной на $D(0, \widetilde{r}) \times D(0, c)$ и голоморфной по каждой переменной. По лемме Осгуда 2.1.2.1 полученное продолжение голоморфно. $\square$

Теорема 2.1.4.2 (Теорема Хартога)**.** *Если функция f голоморфна отдельно по каждой переменной в области $U \subseteq \mathbb{C}^n$, то она голоморфна в U.*

Доказательство. Используем индукция по n. В базовом случае $n = 1$ доказывать нечего. Пусть теперь $n > 1$ и теорема верна в размерности $n - 1$.

Пусть $a \in U$. Выберем маленький замкнутый полидиск $\overline{D}(a, r)$, содержащийся в U. Рассмотрим множества

$$X_k = \{z_n \in \overline{D}(a_n, r_n/2) \mid |f(\widetilde{z}, z_n)| \leqslant k \text{ для всех } \widetilde{z} \in \overline{D}(\widetilde{a}, \widetilde{r})\}$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$. Из непрерывности функции f по z_n следует, что это множество замкнуто для каждого k. С другой стороны, по предположению индукции функция f также непрерывна по $\widetilde{z}$, и потому ограничена на $\overline{D}(\widetilde{a}, \widetilde{r})$ для каждого фиксированного $z_n \in \overline{D}(a_n, r_n/2)$. Значит, $\overline{D}(a_n, r_n/2) \subseteq \bigcup_k X_k$. По теореме Бэра о категориях из этого следует, что для некоторого k внутренность множества X_k непуста. Предположим, что $D(b_n, \delta) \subseteq X_k$ для некоторой точки $b_n \in D(a_n, r_n/2)$.

Теперь мы знаем, что функция f равномерно ограничена в полидиске $D(\widetilde{a}, \widetilde{r}) \times \overline{D}(b_n, \delta)$, и голоморфна там отдельно по каждой координате. По лемме Осгуда 2.1.2.1 из этого следует, что f голоморфна в $D(\widetilde{a}, \widetilde{r}) \times D(b_n, \delta)$, и ее разложение в степенной ряд в окрестности точки $(\widetilde{a}, b_n)$ сходится равномерно на компактных множествах этого полидиска.

Выбереме $s_n > r_n/2$ так, чтобы $D(b_n, s_n) \subseteq D(a_n, r_n)$ (это можно сделать, поскольку $|b_n - a_n| < r_n/2$). Тогда f голоморфна по координате z_n на диске $D(b_n, s_n)$ для каждого $\widetilde{z} \in D(\widetilde{a}, \widetilde{r})$, и потому ее разложение в степенной ряд в точке $(\widetilde{a}, b_n)$ сходится как степенной ряд по z_n в диске $D(b_n, s_n)$ для каждой фиксированной точки $\widetilde{z} \in D(\widetilde{a}, \widetilde{r})$. Это означает, что можно применить лемму Хартога 2.1.4.1 и заключить, что f голоморфна на большем полидиске $D(\widetilde{a}, \widetilde{r}) \times D(b_n, s_n)$. Заметим, что точка a (выбранная произвольным образом из области U в самом начале) лежит в этом полидиске. $\square$

2.1.5. Уравнения Коши–Римана. Как и в случае одной переменной, можно записать каждую комплексную переменную z_j как $x_j + iy_j$ и определить дифференциальные операторы

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

Следствие 2.1.5.1. *Функция, определенная в открытом множестве $U \subseteq \mathbb{C}^n$ голоморфна в U тогда и только тогда, когда для каждого $j = 1, \ldots, n$ она дифференцируема по x_j, y_j, и $\partial f/\partial \overline{z_j} = 0$ в U.*

Доказательство. Тривиально следует из теоремы 1.1.4.1 и теоремы Хартога 2.1.4.2. $\square$

На самом деле, верно более сильное утверждение: достаточно потребовать, чтобы f была дифференцируемой *обобщенной* функцией, удовлетворяющей уравнениям Коши–Римана.

2.1.6. Метрика на алгебре голоморфных функций. Для открытого множества $U \subseteq \mathbb{C}^n$ мы будем обозначать через $\mathcal{H}(U)$ множество всех голоморфных функций на U. Очевидно, что $\mathcal{H}(U)$ образует алгебру над $\mathbb{C}$ относительно операций поточечного сложения и умножения. Более того, на $\mathcal{H}(U)$ имеется естественная топология *равномерной сходимости на компактах.* Эту топологию можно определить следующим образом. Для каждого компакта $K \subset U$ определим полунорму $||\cdot||_k$ на $\mathcal{H}(U)$, положив

$$||f||_K = \sup_{z \in K} |f(z)|.$$

Для $g \in \mathcal{H}(U)$ в качестве базы окрестностей точки g в нашей топологии возьмем все множества вида

$$\{f \in \mathcal{H}(U) \mid ||f - g||_K < \varepsilon\},$$

где K пробегает компактные подмножества в U, а ε — положительные вещественные числа. Можно обойтись счетной базой: достаточно взять в качестве возможных множеств K возрастающую последовательность компактов $\{K_n\}$ такую, что каждое компактное подмножество в U содержится в некотором K_n (см. предложение 1.3.5.3), а в качестве ε брать числа вида $1/m$ для целых $m \geqslant 1$. Поэтому наша топология порождается счетным набором полунорм, и, стало быть, $\mathcal{H}(U)$ является метрическим пространством, например, относительно метрики

$$d(f, g) = \sum_j \frac{1}{2^j} \frac{||f - g||_j}{1 + ||f - g||_j},$$

где $||\cdot||_1, ||\cdot||_2, \ldots$ — некоторая нумерация наших полунорм. Последовательность сходится в этой топологии тогда и только тогда, когда она сходится равномерно на каждом компактном подмножестве в U. Оказывается, пространство $\mathcal{H}(U)$ является полным относительно этой топологии. Действительно, рассмотрим последовательность $\{f_j\}$ в $\mathcal{H}(U)$, которая является последовательностью Коши относительно каждой полунормы $||\cdot||_K$. На каждом компакте K эта последовательность равномерно сходится к некоторой непрерывной функции. Полнота пространства $\mathcal{H}(U)$ теперь вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2.1.6.1. *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность голоморфных функций на U, которая равномерно сходится на каждом компактном подмножестве U. Тогда предел этой последовательности также является голоморфной функцией на U.*

Доказательство. Для случая одной переменной эта теорема почти сразу вытекает из теоремы Мореры 1.2.8.3. В случае нескольких переменных достаточно применить результат отдельно по каждой переменной и заключить, что предел нашей последовательности является функцией, голоморфной отдельно по каждой координате. Кроме того, эта предельная функция непрерывна, из чего по лемме Осгуда 2.1.2.1 она голоморфна. □

Топологическое пространство, топология на котором задается счетным семейством полунорм, полное относительно этой топологии, называется **пространством Фреше**. Следующая теорема утверждает, что $\mathcal{H}(U)$ обладает еще одним интересным свойством.

Теорема 2.1.6.2. *Каждое замкнутое ограниченное подмножество пространства $\mathcal{H}(U)$ компактно. Здесь мы называем подмножество $A \subseteq \mathcal{H}(U)$ ограниченным, если для каждого компакта $K \subset U$ множество $\{||f||_K \mid f \in A\}$ ограничено.*

Доказательство. Достаточно показать, что из любой ограниченной последовательности $\{f_n\}$в $\mathcal{H}(U)$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. По теореме 2.1.6.1 нам всего лишь нужно проверить, что в $\{f_n\}$ имеется подпоследовательность, которая на каждом компакте равномерно сходится к непрерывной функции. По теореме Асколи–Арцела ограниченная равностепенно непрерывная последовательность функций на компакте имеет равномерно сходящуюся подпоследовательность. Проверим, что наша последовательность равностепенно непрерывна на каждом компакте. Из неравенств Коши следует, что на каждом компакте частные производные $\{\partial f_n/\partial z_j\}$ равномерно ограничены. Кроме того, выполняются уравнения Коши–Римана: $\partial f_n/\partial \overline{z_j} = 0$. Поэтому (вещественные) частные производные вещественной и мнимой частей последовательности $\{f_n\}$ равномерно ограничены на каждом компакте. Нужная равностепенная непрерывность теперь следует из теоремы о среднем значении.

Теперь для каждого компакта K_m в последовательности компактов, приближающих U (как в предложении 1.3.5.3), можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на K_m. Будем выбирать такие подпоследовательности для $m = 1, 2, \ldots$ индуктивно, на каждом шаге заменяя нашу последовательность на выбранную подпоследовательность. После такого выбора диагональ полученного набора функций равномерно сходится на каждом K_m, а потому и на каждом компактном подмножестве в U. $\square$

Нетрудно доказать *принцип единственности* для случаея нескольких переменных: если голоморфная функция f на связном открытом множестве $U \subseteq \mathbb{C}^n$ такова, что в некоторой точке U все ее частные производные всех порядков обращаются в нуль, то $f = 0$ на U.

2.1.7. Области голоморфности. Известно, что для каждого открытого подмножества $U \subseteq \mathbb{C}$ существует функция $f \in \mathcal{H}(U)$, которую нельзя голоморфно продолжить ни на одно большее открытое множество. В случае нескольких переменных ситуация кардинальным образом отличается. Существуют открытые множества $U \subset V$ такие, что *каждая* голоморфная функция на U продолжается до голоморфной функции на V.

Предложение 2.1.7.1. *Пусть $D(0,r)$ — открытый полидиск в $\mathbb{C}^n$, где $n > 1$. Пусть U — связное открытое подмножество в $D(0,r)$. Для каждого $\tilde{z} \in D(0,\tilde{r}$ положим $U_{\tilde{z}} = \{z_n \in \mathbb{C} \mid (\tilde{z}, z_n) \in U\}$. Предположим, что U удовлетворяет следующим условиям:*

1. *существует константа $s < r_n$ такая, что $\overline{D}(0,s)$ содержит $D(0,r_n)\backslash U_{\tilde{z}}$ для каждого $\tilde{z} \in D(0,\tilde{r})$;*

2. *равенство $U_{\tilde{z}} = D(0,r_n)$ выполнено для всех $\tilde{z}$ из некоторого открытого подмножества в $D(0,\tilde{r})$.*

Тогда у каждой голоморфной функции на U есть голоморфное продолжение на $D(0,r)$.

Доказательство. Для каждой точки $z_n \in D(0,r_n)$ можно выбрать гладкую простую замкнутую кривую $\gamma \subseteq D(0,r_n)\backslash\overline{D}(0,s)$ так, что z_n и $\overline{D}(0,s)$ содержатся в ограниченной компоненте дополнения γ. Для $f \in \mathcal{H}(U)$, $\tilde{z} \in D(0,\tilde{r})$ положим

$$\widehat{f}(\tilde{z}, z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\tilde{z},\zeta)}{\zeta - z_n} d\zeta.$$

По интегральной теореме Коши результат не зависит от выбора γ. Полученная функция $\widehat{f}$, очевидно, голоморфна по z_n. Она также голоморфна по $\tilde{z}$, поскольку для фиксированного z_n кривая γ не зависит от $\tilde{z}$. Поэтому функция $\widehat{f}$ голоморфна в диске $D(0,r)$. Если $\tilde{z}$ — некоторая точка, для которой $D(0,r_n) = U_{\tilde{z}}$, то $f(\tilde{z}, z_n)$ голоморфна по переменной z_n на всем диске $D(0,r_n)$, и по интегральной формуле Коши $\widehat{f}(\tilde{z}, z_n) = f(\tilde{z}, z_n)$ для всех $z_n \in D(0,r_n)$. Поскольку множество таких точек $\tilde{z}$ непусто, открыто и замкнуто, а U связно, из принципа единственности следует, что $\widehat{f} = f$ на U. $\square$

Приведем конкретные примеры, удовлетворяющие условиям предложения 2.1.7.1.

Пример 2.1.7.2. Пусть $D(0,r)$ — открытый полидиск, K — компактное подмножество в нем такое, что $D(0,r)\backslash K$ связно. Очевидно, что U и $D(0,r)$ удовлетворяют условиям предложения 2.1.7.1. Таким образом, любая голоморфная функция на $D(0,r)\backslash K$ продолжается до голоморфной функции на всем полидиске $D(0,r)$.

Может показаться, что пример 2.1.7.2 обладает свойством продолжения голоморфных функций только потому, что множество U в нем топологически нетривиально (его вторые гомологии отличны от нуля). Однако, это не так: в следующем примере множество U стягиваемо.

Пример 2.1.7.3. Пусть A — открытое кольцо $D(0,1)\backslash\overline{D}(0,1/2)$. Положим

$$U = (D(0,1) \times A) \cup (D(0,1/2) \times D(0,1)).$$

Это открытое подмножество в $D(0,(1,1))$. Тогда $U_{\tilde{z}} = U_{z_1} = D(0,1)$ для всех $|z_1| < 1/2$ и A для $|z_1| \geqslant 1/2$. Нетрудно видеть, что U и $D(0,(1,1))$ удовлетворяют условиям предложения 2.1.7.1.

Подчеркнем еще раз, что мы наблюдаем феномен, который отсутствует для функций одной переменной. Оказывается, для таких множеств U, которые описаны в предложении 2.1.7.1, существуют препятствия для решения задач перехода от локального к глобальному, описанных в разделе 1.3. С другой стороны, для открытых множеств, в которых не наблюдается описанный феномен, подобные задачи всегда имеют решение. Такие открытые множества называются *областями голоморфности*.

Определение 2.1.7.4. Открытое множество $U \subseteq \mathbb{C}^n$ называется **областью голоморфности**, если существует функция $f \in \mathcal{H}(U)$ со следующим свойством: для любой точки $w \in \partial U$ и для любого полирадиуса r не существует голоморфной функции на полидиске $D(w,r)$, совпадающей с f на некоторой компоненте пересечения $D(w,r) \cap U$.

Иными словами, U называется областью голоморфности, если существует голоморфная функция на U, у которой нету локально голоморфного продолжения вдоль участка границы U. Обратите внимание, что это условие отличается от условия отсутствия *глобального продолжения* на некоторое большее открытое множество. Например, функция $\ln$ на множестве $U = \mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$ не имеет глобального голоморфного продолжения ни на одно большее открытое множество, но имеет некоторые локальные продолжения вдоль границы: например, для $x < 0$ и $0 < r < -x$ существуют голоморфные функции на $D(x,r)$, совпадающие с $\ln$ на каждой из двух компонент пересечения $D(x,r) \cap U$ (эти два продолжения, разумеется, не совпадают).

2.1.8. Голоморфная выпуклость. Сейчас мы дадим равносильное определение области голоморфности, которое проще проверять на практике. Пусть U — фиксированное открытое множество. Для каждого компакта $K \subset U$ рассмотрим множество

$$\widehat{K} = \{w \in U \mid |f(w)| \leqslant ||f||_K \text{ для всех } f \in \mathcal{H}(U)\}.$$

Оно называется **голоморфно выпуклой оболочкой** компакта K в U. Нетрудно видеть, что если $\widehat{K}$ само является компактом, то $\widehat{\widehat{K}} = \widehat{K}$.

Определение 2.1.8.1. Открытое множество $U \subset \mathbb{C}^n$ называется **голоморфно выпуклым**, если для любого компакта K в U голоморфная выпуклая оболочка K в U сама компактна.

Предложение 2.1.8.2. *Если* U *голоморфно выпукло, то* U *— область голоморфности.*

Доказательство. Рассмотрим какое-нибудь (счетное) плотное подмножество в U и занумеруем его элементы так, чтобы каждый элемент встречался в этой нумерации бесконечно много раз. Для каждого i пусть S_i — открытый шар наибольшего радиуса с центром в w_i, содержащийся в U. Выберем также возрастающую последовательность компактов $\{K_n\}$ как в предложении 1.3.5.3.

По предположению множество $\widehat{K_j}$ компактно для каждого j. Заметим, что множество S_j (если оно не совпадает со всем пространством $\mathbb{C}^n$) содержит точки, сколь угодно близкие к ∂U. Поэтому найдется точка $z_j \in S_j$, не лежащая в $\widehat{K_j}$. Это означает, что существует голоморфная функция $f_j \in \mathcal{H}(U)$ такая, что $f_j(z_j) = 1$ и $||f_j||_{K_j} < 1$. Заменив f_j на f_j^N для достаточно большого N, можно считать, что $||f_j||_{K_j} < 1/2^j$. Можно также считать, что f_j не равна тождественно 1 ни на какой компоненте множества U. Тогда $\prod_j (1 - f_j)^j$ равномерно сходится на каждом K_m к функции $f \in \mathcal{H}(U)$, которая не равна тождественно 0 ни на какой компоненте множества U. Кроме того, f имеет нуль по крайней мере j-го порядка в точке z_j. Рассмотрим полидиск D с центром в граничной точке U. Каждая компонента пересечения $U \cap D$ содержит бесконечно много сфер S_j, поэтому f имеет нули сколь угодно большого порядка на каждой компоненте этого пересечения. Если бы f продолжалась с одной из этих компонент до голоморфной функции $\widehat{f}$ на D, то и $\widehat{f}$, и все ее частные производные обращались бы в 0 в каждой точке D, которая является граничной точкой компоненты. Тогда $\widehat{f}$ обращалась бы в 0 тождественно на D, и потому на каждой компоненте U, пересекающей D. Это невозможно, поскольку f не обращается в 0 тождественно ни на одной компоненте U. Стало быть, U — область голоморфности. □

Верно и обратное утверждение.

Теорема 2.1.8.3. *Пусть* $U \subseteq \mathbb{C}^n$ *открыто. Множество* U *является областью голоморфности тогда и только тогда, когда оно голоморфно выпукло.*

Доказательство. По предложению 2.1.8.2 осталось доказать, что если подмножество U — область голоморфности, то оно голоморфно выпукло.

Пусть $K \subset U$ — компакт. Существует $s > 0$ такое, что полидиск $D(a, \widehat{s})$ содержится в U для всех $a \in K$. Пусть $f \in \mathcal{H}(U)$ и $0 < r < s$. Тогда

$$\left|\frac{\partial^{u_1+\dots+i_n}}{\partial z_1^{i_1}\dots\partial z_n^{i_n}} f(a)\right| \leqslant M(i_1!)\dots(i_n!)r^{-i_1-\dots-i_n}$$

для всех $a \in K$ (см. предложение 2.1.2.3), где M — супремум $|f|$ на объединении $\bigcup_{a\in K} D(a, \widehat{r})$. По определению $\widehat{K}$ те же неравенства выполняются для всех точек $a \in \widehat{K}$. Множество $\widehat{K}$ ограничено, поскольку каждая координатная функция z_i голоморфна на U, и потому ограничена на $\widehat{K}$ той же константой, что и на K. Поэтому, если $\widehat{K}$ не компактно, оно должно иметь граничную точку b, которая одновременно является граничной точкой множества U. Однако, из полученных выше оценок следует, что степенной ряд для функции f в окрестности точки a сходится в $D(a, \widehat{s})$. Если U — область голоморфности, то такого быть не может. Поэтому $\widehat{K}$ компактно для каждого компакта K, откуда следует голоморфная выпуклость. □

2.2 Локальные свойства

2.2.1. Кольцо ростков голоморфных функций.

Определение 2.2.1.1. Пусть X — топологическое пространство, $x \in X$. Предположим, что f и g — функции, определенные в окрестностях U и V точки x соответственно. Если найдется окрестность W точки x такая, что $W \subseteq U \cap V$ и $f(y) = g(y)$ для всех $y \in W$, то f и g называются **эквивалентными в точке** x. Класс эквивалентности функции f в точке x называется **ростком функции** f **в точке** x.

Множество ростков всех комплекснозначных функций в точке x является $\mathbb{C}$-алгеброй (с очевидным образом определенными операциями). Можно смотреть на эту алгебру так: это индуктивный предел $\varinjlim F(U)$, где F — алгебра комплекснозначных функций на U, а предел берется по направленному множеству всех окрестностей точки x. Можно ограничивать классы функций: например, ростки непрерывных функций в x образуют подалгебру в алгебре ростков всех комплекснозначных функций. Если $X = \mathbb{C}^n$, то ростки голоморфных функций в x образуют подалгебру в алгебре ростков гладких функций в x, которая, в свою очередь, является подалгеброй в алгебре ростков непрерывных функций в x.

Алгебра ростков голоморфных функций в точке $\lambda \in \mathbb{C}^n$ обозначается через $\mathcal{H}_\lambda$ (или через ${}_n\mathcal{H}_\lambda$), если нужно подчеркнуть размерность n объемлющего пространства. Таким образом,

$$\mathcal{H}_\lambda = \varinjlim_{U \ni \lambda} \mathcal{H}(U).$$

Из определения голоморфной функции немедленно следует, что алгебра ${}_n\mathcal{H}_0$ изоморфна алгебре $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ сходящихся (в некотором полидиске с центром в нуле) степенных рядов от n переменных.

Рассмотрим топологию Зариского на $\mathbb{C}^n$: множество замкнуто в этой топологии тогда и только тогда, когда оно является множеством нулей некоторого набора многочленов от n переменных. Функция на множестве U, открытом по Зарискому, называется **регулярной**, если ее можно представить в виде частного двух многочленов так, что знаменатель не обращается в 0 на U. Алгебра регулярных функций на открытом по Зарискому множестве U обозначается через $\mathcal{O}(U)$. Алгебра ростков регулярных функций в точке $\lambda \in \mathbb{C}^n$ обозначается через

$${}_n\mathcal{O}_\lambda = \varinjlim_{U \ni \lambda} \mathcal{O}(U).$$

Ее можно описать так: это алгебра функций вида f/g, где $f, g \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ и $g(\lambda) \neq 0$ Таким образом, ${}_n\mathcal{O}_\lambda$ — это кольцо частных алгебры $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ по отношению к мультипликативному множеству, состоящему из многочленов, не обращающихся в 0 в точке λ.

Предложение 2.2.1.2. *Алгебры* ${}_n\mathcal{O}_\lambda$ *и* ${}_n\mathcal{H}_\lambda$ *являются локальными кольцами; максимальный идеал в обоих случаях состоит из элементов, которые можно представить функциями, обращающимися в* 0 *в точке* λ.

Доказательство. Если (регулярная или голоморфная) функция не обращается в 0 в точке λ, то ее росток в этой точке обратим. Поэтому любой собственный идеал в указанных алгебрах содержится в описанном максимальном идеале. □

Заметим, что алгебры ${}_n\mathcal{H}_\lambda$ для различных точек λ изоморфны между собой, как и алгебры ${}_n\mathcal{O}_\lambda$. Поэтому для изучения их структуры достаточно ограничиться рассмотрением случая $\lambda = 0$.

2.2.2. Теорема Гильберта о базисе. Напомним, что [коммутативное] кольцо называется **нетеровым**, если любой его идеал конечно порожден. Нетрудно понять, что если M — конечно порожденный модуль над нетеровым кольцом A, то каждый подмодуль и каждый фактор-модуль M также конечно порожден.

Теорема 2.2.2.1 (Гильберта о базисе). *Если кольцо A нетерово, то и кольцо многочленов $A[x]$ нетерово.*

Доказательство. Пусть I — идеал в $A[x]$, и пусть J — идеал в A, состоящий из всех старших коэффициентов элементов I (нетрудно проверить, что это действительно идеал). Поскольку кольцо A нетерово, идеал J конечно порожден. Пусть $J = a_1A + \cdots + a_nA$. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ найдется многочлен $f_i \in I$ со старшим коэффициентом a_i; пусть $f_i = a_i x^{d_i} + g_i$, где степень g_i меньше, чем d_i.

Обозначим $d = \max_i d_i$. Пусть $f = ax^m + g$ — многочлен из идеала I степени $m \geqslant d$ (здесь степень g меньше m). При этом $a \in J$, и потому найдутся $b_1, \ldots, b_n \in A$ такие, что $a = \sum_i a_i b_i$. Тогда многочлен $f - \sum_i b_i f_i x^{m-d_i}$ лежит в I и имеет степень меньше m. Продолжая в том же духе, мы убеждаемся, что любой элемент I может быть записан в виде линейной комбинации элементов $f_1, \ldots, f_n$ и многочлена степени меньше d, лежащего в I. Но все многочлены степени меньше d образуют конечно порожденный модуль над нетеровым кольцом A; поэтому пересечение идеала I с этим модулем тоже является конечно порожденным A-модулем. Теперь возьмем $f_1, \ldots, f_n$ вместе с системой образующих этого A-модуля, и получим систему образующих $A[x]$-модуля I. $\square$

По индукции теперь можно доказать, что кольцо $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ многочленов над $\mathbb{C}$ от n переменных нетерово. Из этого следует, что кольцо ${}_n\mathcal{O}_0$ нетерово. Действительно, если I — идеал в ${}_n\mathcal{O}_0$, рассмотрим $J = I \cap \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$. Множество J порождает I как ${}_n\mathcal{O}_0$-модуль и одновременно является конечно порожденным $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$-модулем. Поэтому I является конечно порожденным ${}_n\mathcal{O}_0$-модулем. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.2.2.2. *Алгебра многочленов $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ и локальная алгебра ${}_n\mathcal{O}_0$ являются нетеровыми кольцами.*

2.2.3. Теоремы Вейерштрасса. Наша ближайшая цель — доказать, что кольцо ${}_n\mathcal{H}_0$ нетерово. В дальнейшем нам удобно будет обозначать ростки функций жирными буквами, чтобы отличать их от обычных функций.

Пусть f — голоморфная функция, определенная в окрестности нуля. Будем говорить, что f **имеет нуль порядка k по z_n в точке** 0, если функция $f(0, \ldots, 0, z_n)$ имеет нуль порядка k в точке 0, где $0 \leqslant k < \infty$. Функция f может иметь нуль конечного порядка по z_n в точке 0, а может и бесконечного — если $f(0, \ldots, 0, z_n)$ равна нулю тождественно в некоторой окрестности точки $z_n = 0$. Заметим, что если f не обращается в нуль тождественно в окрестности точки $z = 0$, то можно выбрать координаты в $\mathbb{C}^n$ так, что у f будет нуль конечного порядка по z_n в точке 0. Говорят, что росток $\mathbf{f} \in \mathcal{H}_0$ **имеет нуль порядка k по z_n**, если у некоторого его представителя есть нуль порядка k по z_n в точке 0.

Предложение 2.2.3.1. *Пусть функция f голоморфна в окрестности U точки $0 \in \mathbb{C}^n$ и имеет нуль порядка k по z_n в точке 0. Тогда существует полидиск $D(0, \tilde{r}) \times D(0, r_n)$ такой, что для всех $\tilde{z} \in D(0, \tilde{r})$ функция $f(\tilde{z}, z_n)$ от одной переменной z_n имеет ровно k нулей в $D(0, r_n)$ (с учетом кратности), и не имеет нулей на границе диска $D(0, r_n)$.*

Доказательство. Упражнение. $\square$

Определение 2.2.3.2. Пусть множество $U \subseteq \mathbb{C}^n$ открыто. Его подмножество $T \subset U$ называется **тонким**, если локально в окрестности каждой точки U оно содержится в множестве нулей некоторой нетривиальной голоморфной функции. Более строго, для любой точки $z \in U$ существует окрестность V точки z и голоморфная функция $f \in \mathcal{H}(V)$ такая, что $f = 0$ на $V \cap T$, причем f не обращается в нуль тождественно ни в одной окрестности точки z.

Теорема 2.2.3.3 (об устранимой особенности). *Пусть функция f ограничена и голоморфна в открытом множестве вида $U \backslash T$, где U открыто, а T тонко в U. Тогда у f существует единственное голоморфное продолжение на все множество U.*

Доказательство. Достаточно доказать существование локально в окрестности каждой точки $a \in U$. Можно считать (после замены координат), что для некоторой окрестности V точки a пересечение $T \cap V$ содержится в множестве нулей нетривиальной голоморфной функции g на V, и у g есть нуль конечного порядка k по z_n для некоторого k. По предложению 2.2.3.1 существует полидиск вида $D(a, r)$ такой, что для любой $\tilde{z} \in D(\tilde{a}, \tilde{r})$ множестве T пересекается с $\{\tilde{z}\} \times \overline{D}(a_n, r_n)$ не более чем в k точках, и все они лежат в $\{\tilde{z}\} \times D(a_n, r_n)$. Рассмотрим функцию

$$h(\tilde{z}, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_n - a_n| = r_n} \frac{f(\tilde{z}, \zeta_n)}{\zeta_n - z_n} d\zeta_n.$$

Нетрудно видеть, что она голоморфна в $D(a, r)$ и совпадает с f вне T (по интегральной теореме Коши и теореме об устранимой особенности для функций одной переменной). □

Определение 2.2.3.4. Многочленом Вейерштрасса степени k по z_n называется многочлен $\mathbf{h} \in {}_{n-1}\mathcal{H}_0[z_n]$ вида

$$\mathbf{h}(z) = z_n^k + \mathbf{a}_1(\tilde{z}) z_n^{k-1} + \cdots + \mathbf{a}_{k-1}(\tilde{z}) z_n + \mathbf{a}_k(\tilde{z}),$$

где каждый элемент $\mathbf{a}_i$ необратим в ${}_{n-1}\mathcal{H}_0$.

Теорема 2.2.3.5 (подготовительная теорема Вейерштрасса). *Если $\mathbf{f} \in {}_n\mathcal{H}_0$ имеет нуль порядка k по z_n, то $\mathbf{f}$ можно единственным образом представить в виде $\mathbf{f} = \mathbf{u}\mathbf{h}$, где $\mathbf{h}$ — многочлен Вейерштрасса степени k по z_n, а $\mathbf{u}$ обратим в ${}_n\mathcal{H}_0$.*

Доказательство. Зафиксируем некоторого представителя f ростка $\mathbf{f}$ и, воспользовавшись предложением 2.2.3.1, выберем полидиск $D(0, r)$, в котором функция $f(\tilde{z}, z_n)$ от переменной z_n имеет ровно k корней (ни одного на границе) для каждой точки $\tilde{z} \in D(0, \tilde{r})$. Обозначим эти нули через $b_1(\tilde{z}), \ldots, b_k(\tilde{z})$. Рассмотрим многочлен вида

$$h(z) = \prod_{j=1}^{k} (z_n - b_j(\tilde{z})) = z_n^k - a_1(\tilde{z}) z_n^{k-1} + \cdots + (-1)^k a_k(\tilde{z}).$$

Заметим, что функции $b_j(\tilde{z})$ не обязаны быть непрерывными: мы нумеруем корни в произвольном порядке отдельно для каждой точки $\tilde{z}$, и эти нумерации для разных точек $\tilde{z}$ никак не согласованы друг с другом. Однако, функции $a_j(\tilde{z})$ голоморфны. Дело в том, что это просто элементарные симметрические функции от b_j. Такие функции можно представить в виде многочленов от степенных сумм $s_m = \sum_{j=1}^k b_j^m$. Заметим теперь, что

$$s_m(\tilde{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = r_n} \zeta^m \frac{\partial f / \partial \zeta(\tilde{z}, \zeta)}{f(\tilde{z}, \zeta)} d\zeta.$$

Эти функции, очевидно, голоморфны в $D(0,\widetilde{r})$, а потому голоморфны и $a_j(\widetilde{z})$. Заметим, что в точке $\widetilde{z}=0$ все b_j равны нулю, а потому и все a_j равны нулю. Значит, росток $\mathbf{h}$ функции h в нуле является многочленом Вейерштрасса.

Осталось показать, что функция $u=f/h$ не обращается в 0 на $D(0,r)$. Для каждого фиксированного $\widetilde{z}\in D(0,\widetilde{r})$ функция $f(\widetilde{z},z_n)/h(\widetilde{z},z_n)$ от одной переменной z_n имеет голоморфное продолжение на $D(0,r_n)$, поскольку у числителя и знаменателя одинаковое число нулей в этом диске. Функция h, кроме того, ограничена на $D(0,\widetilde{r})\times\partial D(0,r_n)$. Из этого (и из принципа максимума модуля) следует, что f/h ограничена и отделена от нуля на $D(0,r)$. Функция f/h уже голоморфна везде, кроме множества, на котором h обращается в 0. Поэтому можно применить теорему 2.2.3.3 об устранимой особенности и продолжить f/h до голоморфной функции, не обращающейся в 0 на всем полидиске.

Из конструкции видно, что h — единственный многочлен Вейерштрасса степени k, у которого нули такие же, как у f, для всех $\widetilde{z}\in D(0,\widetilde{r})$. Поэтому указанное разложение единственно. □

Теорема 2.2.3.6 (Теорема Вейерштрасса о делении). *Пусть* $\mathbf{h}\in {}_{n-1}\mathcal{H}_0[z_n]$ *— многочлен Вейерштрасса степени* k*, и* $\mathbf{f}\in {}_n\mathcal{H}_0$*. Тогда* $\mathbf{f}$ *можно единственным образом представить в виде* $\mathbf{f}=\mathbf{g}\mathbf{h}+\mathbf{q}$ *для* $\mathbf{g}\in {}_n\mathcal{H}_0$*,* $\mathbf{q}\in {}_{n-1}\mathcal{H}_0[z_n]$ *— многочлен степени меньше* k*. Если, кроме того,* $\mathbf{f}$ *является многочленом от* z_n*, то и* $\mathbf{g}$ *является многочленом от* z_n*.*

Доказательство. Выберем представителей f,h ростков $\mathbf{f}$, $\mathbf{h}$, определенных в окрестности достаточно малого полидиска $\overline{D}(0,r)$, выбранного так, что $h(\widetilde{z},z_n)$ имеет ровно k нулей в $\overline{D}(0,r_n)$ (как функция от z_n) для каждого $\widetilde{z}\in\overline{D}(0,\widetilde{r})$, ни один из которых не лежит на границе $|z_n|=r_n$. Рассмотрим функцию

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r_n}\frac{f(\widetilde{z},\zeta)}{h(\widetilde{z},\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta-z_n}.$$

Она голоморфна на $D(0,r)$, как и функция $q=f-gh$. Функцию q можно записать в виде

$$q(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r_n}\frac{f(\widetilde{z},\zeta)}{h(\widetilde{z},\zeta)}\frac{h(\widetilde{z},\zeta)-h(\widetilde{z},z_n)}{\zeta-z_n}d\zeta.$$

Заметим, что функция

$$\frac{h(\widetilde{z},\zeta)-h(\widetilde{z},z_n)}{\zeta-z_n}$$

является многочленом от z_n степени меньше, чем k (коэффициенты которого — функции от $(\widetilde{z},\zeta)$). Из этого следует, что q — многочлен от z_n степени меньше, чем k.

Для доказательства единственности предположим, что $f=gh+q=g_1h+q_1$. Тогда $q-q_1=h(g_1-g)$, и в левой части стоит многочлен от z_n степени меньше k, а в правой — функция, имеющая по крайней мере k нулей для каждого фиксированного $\widetilde{z}\in D(0,\widetilde{r})$. Это возможно только для тождественно нулевой функции.

Если f является многочленом от z_n, можно поделить его на h с остатком по обычному алгоритму деления в кольце многочленов над коммутативным кольцом, и получить представление, в котором g — многочлен от z_n. □

2.2.4. Нетеровость локального кольца голоморфных функций.

Теорема 2.2.4.1. *Кольцо* ${}_n\mathcal{H}_0$ *нетерово.*

Доказательство. Будем вести доказательство индукцией по размерности n. База: $n = 0$, алгебра ${}_n\mathcal{H}_0$ в этом случае изоморфна $\mathbb{C}$. Пусть теперь ${}_{n-1}\mathcal{H}_0$ нетерово. По теореме Гильберта о базисе 2.2.2.1 кольцо ${}_{n-1}\mathcal{H}_0[z_n]$ нетерово. Пусть I — собственный идеал в ${}_n\mathcal{H}_0$, и $\mathbf{h} \in I$ — ненулевой элемент в нем. После замены координат можно считать, что у $\mathbf{h}$ нуль конечного порядка по z_n. По подготовительной теореме Вейерштрасса 2.2.3.5 (после домножения на обратимый элемент) можно считать, что $\mathbf{h}$ является многочленом Вейерштрасса по z_n. То есть, $\mathbf{h} \in I \cap {}_{n-1}\mathcal{H}_0[z_n]$. Это идеал в нетеровом кольце ${}_{n-1}\mathcal{H}_0[z_n]$, и потому он порожден конечным множеством элементов $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_m$. По теореме Вейерштрасса о делении 2.2.3.6 каждый элемент $\mathbf{f} \in I$ можно записать в виде $\mathbf{g}\mathbf{h} + \mathbf{q}$, где $\mathbf{g} \in {}_n\mathcal{H}_0$, $\mathbf{q} \in {}_{n-1}\mathcal{H}_0[z_n]$. Поэтому $\mathbf{h}$ и $\mathbf{q}$ оба лежат в $I \cap {}_{n-1}\mathcal{H}_0[z_n]$, то есть, в идеале, порожденном $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_m$. Из этого следует, что и $\mathbf{f}$ лежит в идеале кольца ${}_n\mathcal{H}_0$, порожденном $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_m$. Это означает, что элементы $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_m$ порождают идеал I. □

2.2.5. Многообразия. Пусть S — конечное подмножество в $\mathcal{H}(U)$ для открытого множества $U \subseteq \mathbb{C}^n$. Определим

$$V(S) = \{z \in U \mid f(z) = 0 \text{ для всех } f \in S\}.$$

Определение 2.2.5.1. Подмножество $V \subseteq U$ называется **голоморфным подмногообразием** в U, если для каждой точки $\lambda \in U$ существуют окрестность W_λ и конечное множество $S \subseteq \mathcal{H}(W_\lambda)$ такие, что $V \cap W_\lambda = V(S)$.

Иными словами, голоморфное подмногообразие — это подмножество, которое локально в каждой точке U выглядит как множество общих нулей конечного числа голоморфных функций. Очевидно, что голоморфное подмногообразие всегда замкнуто в U.

Алгебраические подмногообразия определяются аналогично, только нужно использовать открытые по Зарискому множества и регулярные функции вместо голоморфных. Однако, множество нулей регулярной функции в окрестности каждой точки выглядит как множество нулей многочлена — ее числителя. Поэтому алгебраическое подмногообразие U является замкнутым по Зарискому подмножеством в U. Обратно, любое замкнутое по Зарискому подмножество в U может быть задано как множество нулей некоторого набора многочленов, и в силу нетеровости кольца многочленов можно считать, что этот набор конечен. Поэтому алгебраические подмногообразия в U — это в точности замкнутые по Зарискому подмножества U.

Очевидно, что конечные объединения и пересечения голоморфных подмногообразий U также являются голоморфными подмногообразиями в U. Пусть V, W — голоморфные подмногообразия в U. Мы будем говорить, что они **эквивалентны в точке** $\lambda \in V \cap W$, если существует окрестность U_λ точки λ такая, что $V \cap U_\lambda = W \cap U_\lambda$. Класс эквивалентности, содержащий V, называется ростком голоморфного подмногообразия V в точке $\lambda \in V$. **Ростком голоморфного многообразия** в точке $\lambda \in \mathbb{C}^n$ называется росток голоморфного подмногообразия V некоторой окрестности точки λ, причем $\lambda \in V$. Аналогичным образом определяются ростки алгебраических многообразий; иногда мы говорим «многообразие», если сказанное можно применить и к голоморфным, и к алгебраическим многообразиям.

Пусть $\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_k$ — ростки многообразий в точке λ. Можно выбрать окрестность U точки λ, в которой у этих ростков есть представители. Росток пересечения этих представителей корректно определен и называется **пересечением** ростков $\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_k$; он обозначается через $\mathbf{V}_1 \cap \cdots \cap \mathbf{V}_k$. Аналогично можно определить объединение конечного числа ростков многообразий, и отношение включения $\subseteq$. Будем говорить, что росток $\mathbf{f}$ функции в точке λ обращается в 0 на ростке $\mathbf{V}$ многообразия в точке λ, если существует окрестность U точки λ и представители f для $\mathbf{f}$, V для $\mathbf{V}$ в окрестности U такие, что f обращается в 0 на V.

Как и раньше, для изучения ростков многообразий мы часто будем считать, что $\lambda = 0$.

Определение 2.2.5.2. Пусть $\mathbf{V}$ — росток голоморфного многообразия в точке 0. Рассмотрим подмножество в ${}_n\mathcal{H}_0$, состоящее из всех ростков функций, обращающихся в 0 на $\mathbf{V}$. Это идеал в кольце ${}_n\mathcal{H}_0$; он будет обозначаться через $\operatorname{id}\mathbf{V}$. Обратно, если I — идеал в ${}_n\mathcal{H}_0$, определим росток многообразия $\operatorname{loc} I$ следующим образом: выберем конечное множество образующих идеала I и обозначим через S конечное множество представителей этих образующих, определенных в окрестности U точки 0. Тогда определено голоморфное подмногообразие общих нулей $V(S)$ этих функций. Росток многооразия $\operatorname{loc} I$ определим как росток $V(S)$. Определения для алгебраических многообразий совершенно аналогичны.

Мы должны проверить корректность определения ростка $\operatorname{loc} I$; для этого докажем следующее предложение.

Предложение 2.2.5.3. *Пусть I — идеал в ${}_n\mathcal{H}_0$ (или в ${}_n\mathcal{O}_0$). Тогда $\operatorname{loc} I$ — росток многообразия, на котором каждый элемент I обращается в 0. Кроме того, любой росток многообразия с этим свойством содержится в $\operatorname{loc} I$.*

Доказательство. Докажем предложение для случая ${}_n\mathcal{H}_0$. Пусть S — конечное подмножество в $\mathcal{H}(U)$, ростки элементов которого в $0 \in U$ порождают идеал I. Тогда каждый росток функции $\mathbf{f} \in I$ обращается в 0 на ростке $\mathbf{f}$ многообразия $V = V(S)$ в точке 0. Предположим, что росток $\boldsymbol{W}$ некоторого подмногообразия в точке 0 также обладает этим свойством. Тогда $\boldsymbol{W}$ имеет представителя W в некоторой окрестности $U_1 \subseteq U$ точки 0. Росток каждого элемента S лежит в I, и потому для каждого $f \in S$ можно выбрать окрестность $U_f \subseteq U_1$ точки 0 так, что f обращается в 0 на $W \cap U_f$. Тогда каждый элемент S обращается в 0 на пересечении $W \cap \bigcap_{f \in S} U_f$. Поэтому указанное пересечение содержится в V, и росток W содержится в ростке V. $\square$

Предложение 2.2.5.4. *Идеалы в ${}_n\mathcal{H}_0$ (в ${}_n\mathcal{O}_0$) и ростки голоморфных (алгебраических) подмногообразий в точке 0 обладают следующими свойствами:*

1. *если* $\mathbf{V_1} \subseteq \mathbf{V_2}$, *то* $\operatorname{id}\mathbf{V_1} \supseteq \operatorname{id}\mathbf{V_2}$.
2. *если* $I_1 \subseteq I_2$, *то* $\operatorname{loc} I_1 \supseteq \operatorname{loc} I_2$;
3. $\mathbf{V} = \operatorname{loc}\operatorname{id}\mathbf{V}$;
4. $I \subseteq \operatorname{id}\operatorname{loc} I$ *(но равенство не всегда выполнено);*
5. $\operatorname{id}(\mathbf{V_1} \cup \mathbf{V_2}) = (\operatorname{id}\mathbf{V_1} \cap (\operatorname{id}\mathbf{V_2}) \supseteq (\operatorname{id}\mathbf{V_1}) \cdot (\operatorname{id}\mathbf{V_2})$;
6. $\operatorname{id}(\mathbf{V_1} \cap \mathbf{V_2}) \supseteq (\operatorname{id}\mathbf{V_1}) + (\operatorname{id}\mathbf{V_2})$;
7. $\operatorname{loc}(I_1 \cdot I_2) = \operatorname{loc}(I_1 \cap I_2) = \operatorname{loc}(I_1) \cup \operatorname{loc}(I_2)$;
8. $\operatorname{loc}(I_1 + I_2) = \operatorname{loc}(I_1) \cap \operatorname{loc}(I_2)$.

Доказательство. Несложное упражнение. $\square$

Возникает естественный вопрос: когда $\operatorname{id}\operatorname{loc} I = I$? Оказывается,

$$\operatorname{id}\operatorname{loc} I = \sqrt{I} = \{\mathbf{f} \in {}_n\mathcal{H}_0 \mid \mathbf{f}^k \in I \text{ для некоторого } k\}.$$

Идеал $\sqrt{I}$ называется **радикалом** идеала I. Поэтому $\operatorname{id}\operatorname{loc} I$ тогда и только тогда, когда I совпадает со своим радикалом; такой идеал называется **радикальным**. Это нетривиальное утверждение называется *теоремой Гильберта о нулях* (Nullstellensatz); мы докажем ее чуть позже.

2.2.6. Неприводимые многообразия. Подмногообразие V в открытом множестве U называется **приводимым**, если $V = V_1 \cup V_2$ для некоторых подмногообразий V_1, V_2, отличных от V. В противном случае V называется **неприводимым**. Аналогично, росток многообразия $\mathbf{V}$ называется **приводимым**, если $\mathbf{V} = \mathbf{V_1} \cup \mathbf{V_2}$ для некоторых ростков многообразий $\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2}$, отличных от $\mathbf{V}$, и **неприводимым** в противном случае.

Предложение 2.2.6.1. *Росток многообразия $\mathbf{V}$ неприводим тогда и только тогда, когда идеал $\operatorname{id}\mathbf{V}$ прост.*

Доказательство. Если $\mathbf{V} = \mathbf{V_1} \cup \mathbf{V_2}$ приводим, то $\operatorname{id}\mathbf{V_1} \cdot \operatorname{id}\mathbf{V_2} \subseteq \operatorname{id}\mathbf{V}$, причем $\operatorname{id}\mathbf{V_i}$ не содержится в $\operatorname{id}\mathbf{V}$ для $i = 1, 2$; поэтому идеал $\operatorname{id}\mathbf{V}$ не прост.

Обратно, если $\operatorname{id}\mathbf{V}$ не прост, то он содержит произведение $I_1 \cdot I_2$ для некоторых идеалов I_1, I_2, не содержащихся в $\operatorname{id}\mathbf{V}$. Тогда $\mathbf{V} \subseteq \operatorname{loc} I_1 \cup \operatorname{loc} I_2$, причем $\mathbf{V}$ не содержится ни в $\operatorname{loc} I_1$, ни в $\operatorname{loc} I_2$. Положим $\mathbf{V_i} = \mathbf{V} \cap \operatorname{loc} I_i$ для $i = 1, 2$; тогда $\mathbf{V} = \mathbf{V_1} \cup \mathbf{V_2}$, и $\mathbf{V}$ приводимо. □

Теорема 2.2.6.2. *Любой росток многообразия можно представить в виде объединения вида $\mathbf{V_1} \cup \cdots \cup \mathbf{V_k}$, где каждый $\mathbf{V_i}$ — неприводимый росток многообразия, содержащийся в $\mathbf{V}$ и не совпадающий с ним, причем $\mathbf{V_i}$ не содержится в $\mathbf{V_j}$ при $i \neq j$. Такое представление единственно с точностью до порядка.*

Доказательство. Предположим, что $\mathbf{V}$ — росток многообразия, который не представляется в виде объединения неприводимых. Тогда $\mathbf{V}$ приводим и может быть записан в виде объединения $\mathbf{V} = \mathbf{V_1} \cup \mathbf{V_2}$ двух ростков многообразий, не совпадающих с $\mathbf{V}$. Хотя бы один из $\mathbf{V_1}$, $\mathbf{V_2}$ снова не представляется в виде конечного объединения неприводимых. Продолжая таким же образом, мы получим бесконечную убывающую последовательность ростков многообразий, в который каждый следующий содержится в предыдущем и не совпадает с ним. По предложению 2.2.5.4 этой цепочке соответствует бесконечная возрастающая цепочка идеалов нашего нетерова кольца, что невозможно.

Мы показали, что каждый росток есть конечное объединение неприводимых. После этого можно удалить те из них, которые содержатся в других, и получить разложение, удовлетворяющее условиям. Пусть теперь есть два разложения

$$\mathbf{V} = \mathbf{V_1} \cup \cdots \cup \mathbf{V_k} = \mathbf{V}'_1 \cup \cdots \cup \mathbf{V}'_m.$$

Тогда $(\mathbf{V_i} \cap \mathbf{V}'_1) \cup \cdots \cup (\mathbf{V_i} \cup \mathbf{V}'_m)$. Из неприводимости следует, что $\mathbf{V_i}$ содержится в одном из $\mathbf{V}'_j$. Обратно, каждый $\mathbf{V}'_j$ содержится в одном из $\mathbf{V_i}$. Поскольку между различными $\mathbf{V_i}$ нет включений, мы получили, что каждое $\mathbf{V_i}$ совпадает с некоторым $\mathbf{V}'_j$, и наоборот. Это и означает, что разложение единственно. □

2.3 Неявные и обратные отображения

2.3.1. Теорема о неявном отображении.

Определение 2.3.1.1. Пусть U, U' — открытые множества в $\mathbb{C}^n$. Голоморфное отображение $U \to U'$ называется **биголоморфным**, если у него есть голоморфное обратное. Замкнутое подмножество V в открытом множестве U называется **регулярным голоморфным подмногообразием**, если у каждой точки $\lambda \in V$ есть окрестность U_λ вместе с биголоморфным отображением $F\colon U_\lambda \to D(0, r) \subseteq \mathbb{C}^n$ таким, что $F(\lambda) = 0$ и $F(U_\lambda \cap V) = \{z \in D(0, r) \mid z_{k+1} = \cdots = z_n = 0\}$ для некоторого числа k. Такое k называется **размерностью** подмногообразия в точке λ.

Таким образом, регулярное подмногообразие локально (с точностью до биголоморфного отображения) выглядит как линейное подпространство в $\mathbb{C}^n$.

Определение 2.3.1.2. Росток голоморфного подмногообразия называется **регулярным** или **невырожденным**, если он является ростком регулярного голоморфного подмногообразия; в противном случае росток называется **сингулярным** или **вырожденным**. Пусть V — голоморфное подмногообразие открытого множества в $\mathbb{C}^n$, и $z \in V$. Точка z называется **сингулярной** или **вырожденной** точкой V, если росток V в z сингулярен, и **регулярной** или **невырожденной** точкой V, если росток V в z регулярен.

Теорема 2.3.1.3 (о неявной функции). *Пусть* $U \subseteq \mathbb{C}^n$ *— открытое подмножество,* $f \in \mathcal{H}(U)$, *и* $\lambda \in U$, *причем* $f(\lambda) = 0$. *Предположим также, что* $\partial f/\partial z_n(\lambda) \neq 0$. *Тогда существует полидиск* $D(\lambda, r)$ *в* $\mathbb{C}^n$ *и голоморфная функция* $g\colon D(\widetilde{\lambda}, \widetilde{r}) \to D(\lambda_n, r_n)$ *такая, что* $f(z) = 0$ *для точки* $z \in D(\lambda, r)$ *тогда и только тогда, когда* $g(\widetilde{z}) = z_n$.

Доказательство. Из условий следует, что f имеет нуль порядка 1 по z_n в точке λ. Поэтому мы можем применить подготовительную теорему Вейерштрасса 2.2.3.5 и заключить, что существует полидиск $D(\lambda, r)$, обратимая голоморфная функция u на $D(\lambda, r)$, и голоморфная функция g на $D(\widetilde{\lambda}, \widetilde{r})$ так, что $g(\widetilde{\lambda}) = 0$ и $f(\widetilde{z}, z_n) = u(\widetilde{z}, z_n)(z_n - g(\widetilde{z}))$ на $D(\lambda, r)$. Осталось заметить, что множества нулей функций $f(\widetilde{z}, z_n)$ и $z_n - g(\widetilde{z})$ на диске $D(\lambda, r)$ одинаковы. □

Определение 2.3.1.4. Пусть множество $U \subseteq \mathbb{C}^n$ открыто, и $F = (f_1, \dots, f_m)\colon U \to \mathbb{C}^m$ — голоморфное отображение. **Якобианом** отображения F называется матрица

$$J_F(z) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(z)\right)$$

размера $m \times n$.

Теорема 2.3.1.5 (о неявном отображении). *Пусть*

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : U \to \mathbb{C}^m$$

— голоморфное отображение из области $U \subseteq \mathbb{C}^n$, $\lambda \in U$ *и* $F(\lambda) = 0$. *Предположим, что последние* m *столбцов матрицы* $J_F(\lambda)$ *образуют невырожденную матрицу* $m \times m$. *Тогда существует полидиск*

$$D(\lambda, r) = D(\widetilde{\lambda}, \widetilde{r}) \times D(\widehat{\lambda}, \widehat{r}) \subseteq \mathbb{C}^{n-m} \times \mathbb{C}^m$$

и голоморфное отображение $G\colon D(\widetilde{\lambda}, \widetilde{r}) \to D(\widehat{\lambda}, \widehat{r})$ *такие, что* $F(z) = 0$ *для точки* $z = (\widetilde{z}, \widehat{z}) \in D(\lambda, r)$ *тогда и только тогда, когда* $G(\widetilde{z}) = \widehat{z}$.

Доказательство. Будем доказывать теорему индукцией по m. База $m = 1$ — это в точности теорема о неявной функции 2.3.1.3. Предположим, что результат верен для $m - 1$. Разрежем матрицу $J_F(\lambda)$ на первые $n - m$ столбцов и последние m столбцов: $J_F(\lambda) = (\widetilde{J}_F(\lambda), \widehat{J}_F(\lambda))$. По предположению матрица $\widehat{J}_F(\lambda)$ невырожденна. После линейной замены координат в пространстве $\mathbb{C}^m$ можно считать, что $\widehat{J}_F(\lambda)$ — единичная матрица. В частности, $\partial f_m/\partial z_n = 1$ в точке λ. По теореме о неявной функции из этого следует, что существует полидиск $D(\lambda, r)$ и голоморфная функция

$$h\colon D((\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}), (r_1, \dots, r_{n-1})) \to D(\lambda_n, r_n)$$

такая, что $f_m(z) = 0$ для $z \in D(\lambda, r)$ в точности тогда, когда $z_n = h(z_1, \dots, z_{n-1})$. Определим голоморфное отображение

$$H\colon D((\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}), (r_1, \dots, r_{n-1})) \to \mathbb{C}^{m-1}$$

следующим образом: его i-я координата h_i равна

$$(z_1, \ldots, z_{n-1}) \mapsto f_i(z_1, \ldots, z_{n-1}, h(z_1, \ldots, z_{n-1})).$$

Тогда $H(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) = 0$. Пусть $J_H(\lambda)$ — якобиан этого отображения; его последние $m-1$ столбцов образуют единичную матрицу. По предположению индукции в некотором (возможно, меньшем) полидиске существует голоморфное отображение

$$G_0 \colon D(\widetilde{\lambda}, \widetilde{r}) \to D((\lambda_{n-m+1}, \ldots, \lambda_{n-1}), (r_{n-m+1}, \ldots, r_{n-1}))$$

такое, что для точки $(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in D((\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}), (r_1, \ldots, r_{n-1}))$ уравнение $H(z_1, \ldots, z_{n-1}) = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $G_0(\widetilde{z}) = (z_{n-m+1}, \ldots, z_{n-1})$. Поскольку $F(z) = 0$ для $z \in D(\lambda, r)$ тогда и только тогда, когда $z_n = h(z_1, \ldots, z_{n-1})$ и $H(z_1, \ldots, z_{n-1}) = 0$, отображение

$$G(\widehat{z}) = (G_0(\widetilde{z}), h(\widetilde{z}, G_0(\widetilde{z})))$$

обладает нужными свойствами. □

2.3.2. Ранг якобиана и регулярность.

Теорема 2.3.2.1 (об обратном отображении). *Пусть $U \subseteq \mathbb{C}^n$ — окрестность точки λ, и $H \colon U \to \mathbb{C}^n$ — голоморфное отображение. Если матрица $J_H(\lambda)$ невырожденна, то H биголоморфно отображает некоторую (возможно, меньшую) окрестность U' точки λ на некоторую окрестность точки $H(\lambda)$.*

Доказательство. Применим теорему о неявном отображении 2.3.1.5 к отображению $F \colon \mathbb{C}^n \times U \to \mathbb{C}^n$, $(\widetilde{z}, \widehat{z}) \mapsto H(\widehat{z}) - \widetilde{z}$. Полученное отображение G будет обратным к H на некотором полидиске. □

Теорема 2.3.2.2. *Пусть U — область в $\mathbb{C}^n$, отображение $F \colon U \to \mathbb{C}^m$ голоморфно, и J_F имеет постоянный ранг k на U. Тогда у каждой точки $\lambda \in U$ найдется окрестность U_λ, в которой F биголоморфно эквивалентно отображению $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_1, \ldots, z_k, 0, \ldots, 0)$ из окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$ в окрестность точки $0 \in \mathbb{C}^m$. Таким образом, множество нулей функции F является подмногообразием размерности $n-k$ в U_λ, и для каждой точки $\lambda \in U$ образ $F(U_\lambda)$ является подмногообразием размерности k в окрестности точки $F(\lambda)$.*

Доказательство. После переноса можно считать, что $\lambda = 0$ и $F(\lambda) = 0$. Проведя линейную замену координат можно добиться, чтобы верхняя левая подматрица размера $k \times k$ в $J_F(z)$ была невырожденной в окрестности U' точки 0. Определим отображение

$$G \colon U' \to \mathbb{C}^n,$$
$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (f_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, f_k(z_1, \ldots, z_n), z_{k+1}, \ldots, z_n).$$

Тогда матрица J_G невырожденна в U', и G биголоморфно отображает одну окрестность U'' точки $0 \in \mathbb{C}^n$ в другую. Отображение $F \circ G^{-1}$ имеет вид $(z_1, \ldots, z_k, \widetilde{f}_{k+1}, \ldots, \widetilde{f}_m)$. Поскольку якобиан отображения $F \circ G^{-1}$ имеет ранг k в U'', функции $\partial \widetilde{f}_j / \partial z_i$ тождественно равны нулю при $i > k$ и, стало быть, являются функциями только от $z_1, \ldots, z_k$. Положим

$$H(z_1, \ldots, z_m) = (z_1, \ldots, z_k, z_{k+1} - \widetilde{f}_{k+1}(z_1, \ldots, z_k), \ldots, z_m - \widetilde{f}_m(z_1, \ldots, z_k)).$$

Отображение H биголоморфно в некоторой окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^m$, и

$$H \circ F \circ G^{-1}(z_1, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_k, 0, \ldots, 0)$$

в некоторой окрестности U точки $0 \in \mathbb{C}^n$, что и требовалось. □

Следствие 2.3.2.3. *Пусть* $F\colon U \to \mathbb{C}^m$ *— голоморфное отображение, определяющее подмногообразие* $V = \{z \in U \mid F(z) = 0\}$. *Тогда* V *невырожденно в каждой точке* $z \in V$ *такой, что ранг* J_F *постоянен в окрестности точки* z *в* U.

Доказательство. Очевидно $\square$

Заметим, что множество точек, в которых ранг J_F не превосходит k, является подмногообразием в U. Действительно, оно определяется условиями вырождения в 0 всех миноров размера $k+1$. Положим $V = \{z \in U \mid F(z) = 0\}$, $W_k = \{z \in U \mid \operatorname{rk} J_F(z) \leqslant k\}$. Пусть j — максимальное из чисел k таких, что W_k — собственное подмногообразие в U. Тогда $U \backslash W_j$ — открытое плотное множество, на котором ранг J_F равен $j+1$. Множество $V_0 = V \cup (U \backslash W_j)$ состоит из невырожденных точек V и является подмногообразием размерности $n-j$ в $U \backslash W_j$. Было бы неплохо, если бы V_0 было открытым плотным подмножеством в V — из этого следовало бы, что «почти все» точки многообразия невырожденны. Однако, бывают случаи, когда V совпадает с W_j; тогда $V_0 = \varnothing$, и якобиан отображения F ничего не говорит нам про регулярные точки V. Это означает, что мы неправильно выбрали отображение F, задающее наше подмногообразие V. Поэтому нам необходимо уметь описывать многообразие как множество нулей *хорошего* набора функций, который давал бы детальную информацию о локальном поведении многообразия. Такой *оптимальный* выбор функций возможен; с его помощью мы докажем Nullstellensatz и другие полезные факты.

2.3.3. Голоморфные функции на подмногообразии. Пусть V — голоморфное (или алгебраическое) подмногообразие открытого множества в $\mathbb{C}^n$. Функция $f\colon V \to \mathbb{C}$ называется **голоморфной (регулярной)**, если существует окрестность $U_\lambda \subseteq \mathbb{C}^n$ точки λ такая, что f продолжается до голоморфной (регулярной) функции на U_λ. Голоморфные (регулярные) функции на V образуют алгебру, которая обозначается через $\mathcal{H}(V)$ ($\mathcal{O}(V)$); алгебра ростков голоморфных (регулярных) функций в точке $\lambda \in V$ обозначается через ${}_V\mathcal{H}_\lambda$ (${}_V\mathcal{O}_\lambda$) и называется **локальным кольцом** подмногообразия V в точке λ.

Следующее утверждение очевидно.

Предложение 2.3.3.1. *Пусть* V *— подмногообразие открытого множества в* $\mathbb{C}^n$, *и пусть* $\mathbf{V}_\lambda$ *— его росток в точке* λ. *Тогда* ${}_V\mathcal{H}_\lambda = {}_n\mathcal{H}_\lambda / \operatorname{id}(\mathbf{V}_\lambda)$, *и это нетерово локальное кольцо. Аналогичное утверждение верно для* ${}_V\mathcal{O}_\lambda$.

Определение 2.3.3.2. Пусть V, W — подмногообразия открытых множеств в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$ соответственно, и пусть $F\colon V \to W$ — отображение. Оно называется **голоморфным (регулярным)**, если каждая его координатная функция является голоморфной (регулярной) функцией $V \to \mathbb{C}$. Голоморфная (регулярная) функция с голоморфной (регулярной) обратной называется **биголоморфной (бирегулярной)**.

Предложение 2.3.3.3. *Пусть* V, W *— голоморфные подмногообразия открытых множеств в* $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^m$, $F\colon V \to W$ *— отображение,* $\lambda \in V$. *Отображение* F *голоморфно в некоторой окрестности точки* λ *тогда и только тогда, когда отображение* $g \mapsto g \circ F$ *задает гомоморфизм алгебр* ${}_W\mathcal{H}_{F(\lambda)} \to {}_V\mathcal{H}_\lambda$. *Аналогичный результат верен для алгебраических подмногообразий.*

Доказательство. Очевидно. $\square$

Итак, любое голоморфное отображение $F\colon V \to W$ задает гомоморфизм алгебр $F^*\colon {}_W\mathcal{H}_{F(\lambda)} \to {}_V\mathcal{H}_\lambda$. Оказывается, можно по произвольному гомоморфизму этих алгебр восстановить голоморфное отображение.

Теорема 2.3.3.4. *Пусть V и W — голоморфные подмногообразия открытых подмножеств в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$, $\lambda \in V$, $\mu \in W$, и задан гомоморфизм алгебр $\varphi\colon {}_W\mathcal{H}_\mu \to {}_V\mathcal{H}_\lambda$. Тогда существует голоморфное отображение F из некоторой окрестности точки λ в V в некоторую окрестность точки μ в W, для которого $F^* = \varphi$. Аналогичный результат верен для алгебраических подмногообразий.*

Доказательство. Гомоморфизм φ переводит обратимые элементы в обратимые. Заметим, что для каждого элемента $\mathbf{f} \in {}_W\mathcal{H}_\mu$ существует единственное комплексное число c такое, что элемент $\mathbf{f} - c$ необратим — это число $\mathbf{f}(\mu)$. Предположим, что φ переводит некоторый необратимый элемент $\mathbf{f} \in {}_W\mathcal{H}_\mu$ в обратимый элемент $\varphi(\mathbf{f}) \in {}_V\mathcal{H}_\lambda$. Тогда существует единственное ненулевое число $c \in \mathbb{C}$ такое, что элемент $\varphi(\mathbf{f}) - c$ необратим; но элемент $\mathbf{f} - c$ обратим, и $\varphi(\mathbf{f} - c) = \varphi(\mathbf{f}) - c$; получаем противоречие.

Стало быть, $\mathbf{f}$ лежит в максимальном идеале кольца ${}_W\mathcal{H}_\mu$ тогда и только тогда, когда $\varphi(\mathbf{f})$ лежит в максимальном идеале кольца ${}_V\mathcal{H}_\lambda$. Пусть $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m \in {}_W\mathcal{H}_\mu$ — ростки координатных функций, ограниченных на W. Тогда ростки $\varphi(\boldsymbol{w}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{w}_n) \in {}_V\mathcal{H}_\lambda$ представляются некоторым функциями, которые продолжаются до голоморфных функций $f_1, \ldots, f_m$ на некоторой окрестности точки $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Эти функции задают некоторое голоморфное отображение F из окрестности точки $\lambda \in \mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$. Заметим, что $\varphi(\boldsymbol{w}_j - \boldsymbol{w}_j(\mu))$ является ростком функции $f_j|_V - w_j(\mu)$ в точке λ, который лежит в максимальном идеале кольца ${}_V\mathcal{H}_\lambda$. Поэтому $f_j(\lambda) = w_j(\mu)$ для всех j, и, следовательно, $F(\lambda) = \mu$.

Отображение F теперь индуцирует гомоморфизм алгебр $F^*\colon {}_m\mathcal{H}_\mu \to {}_n\mathcal{H}_\lambda$. Возьмем композицию этого гомоморфизм с ограничением ростков на V; получим гомоморфизм $\widetilde{F^*}\colon {}_m\mathcal{H}_\mu \to {}_V\mathcal{H}_\lambda$. С другой стороны, можно начать с гомоморфизма $\varphi\colon {}_W\mathcal{H}_\mu \to {}_V\mathcal{H}_\lambda$ и рассмотреть его композицию с ограничением ростков на W, то есть, с естественным гомоморфизмом ${}_m\mathcal{H}_\mu \to {}_W\mathcal{H}_\mu$. Получим гомоморфизм $\widetilde{\varphi}\colon {}_m\mathcal{H}_\mu \to {}_V\mathcal{H}_\lambda$. Достаточно показать, что $\widetilde{\varphi} = \widetilde{F^*}$, и что F отображает некоторую окрестность точки $\lambda \in V$ в W.

По построению, $\widetilde{F^*}(\boldsymbol{w}_j) = \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{w}_j)$ для всех j. Поэтому наши гомоморфизмы совпадают на всех многочленах. Любой элемент ${}_m\mathcal{H}_\mu$ можно представить в виде суммы многочлена степени k и элемента k-ой степени максимального идеала этого кольца (для каждого фиксированного k). Поэтому $\widetilde{F^*} - \widetilde{\varphi}(f)$ лежит в k-й степени максимального идеала кольца ${}_V\mathcal{H}_\lambda$ для всех $f \in {}_m\mathcal{H}_\mu$ и для всех k. По лемме Накаямы пересечение всех степеней максимального идеала нетерова локального кольца равно 0. Поэтому $\widetilde{F^*} = \widetilde{\varphi}$.

Осталось заметить, что $\operatorname{id} W$ лежит в ядре гомоморфизма $\widetilde{\varphi} = \widetilde{F^*}$ (по определению $\widetilde{\varphi}$). Поэтому для каждого $f \in \operatorname{id} W$ выполнено $(f \circ F)|_V = \widetilde{F^*}(f) = 0$. Значит, такой элемент f равен нулю на $F(V)$. Применяя этот факт к конечному числу образующих идеала $\operatorname{id} W$, получаем, что достаточно малая окрестность точки $\lambda \in V$ переходит внутрь W под действием F. $\square$

Определение 2.3.3.5. Два ростка многообразий $\mathbf{V}, \boldsymbol{W}$ называются **биголоморфно эквивалентными**, если существует биголоморфное отображение $F\colon V \to W$ между некоторыми их представителями V и W.

Следствие 2.3.3.6. *Два ростка голоморфных многообразий биголоморфно эквивалентны тогда и только тогда, когда их локальные кольца изоморфны (как $\mathbb{C}$-алгебры).*

Доказательство. Очевидно. $\square$

Следствие 2.3.3.7. *Голоморфное многообразие V невырожденно в точке $\lambda \in V$ тогда и только тогда, когда его локальное кольцо ${}_V\mathcal{H}_\lambda$ изоморфно алгебре ${}_k\mathcal{H}_0$ для некоторого k.*

Доказательство. Невырожденность равносильна существованию биголоморфного отображения $F\colon U \to W$, где $U \subseteq \mathbb{C}^n$ — окрестность точки λ, а $W \subseteq \mathbb{C}^n$ — окрестность точки 0, такого, что $V \cap U$ переходит в $\{z \in W \mid z_{k+1} = \dots = z_n = 0\}$. Рассмотрим отображение $G\colon V \to \mathbb{C}^k$, координатные функции которого — это первые k координатных функций отображения F. Тогда G — биголоморфное отображение между $V \cap U$ и $\mathbb{C}^k \cap W$. Более того, любой росток биголоморфного отображения G между окрестностью точки $\lambda \in V$ и окрестностью точки $0 \in \mathbb{C}^k$ является ограничением на $V \cap U$ ростка биголоморфного отображения $F\colon U \to W$ между окрестностями в $\mathbb{C}^n$. Действительно, если дано G с координатными функциями f_i, можно продолжить их и получить голоморфные функции f_i $(i = 1, \dots, k)$ в некоторой окрестности U точки $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Положим $f_i(z_1, \dots, z_n) = z_i$ для $i = k+1, \dots, n$. Тогда набор $f_1, \dots, f_n$ задает голоморфное отображение $F\colon U \to \mathbb{C}^n$. У него есть голоморфное обратное в некоторой окрестности 0: достаточно взять обратное к G на первых k координатах, и тождественное отображение на остальных. Поэтому невырожденность точки $\lambda \in V$ равносильна тому, что росток V в точке λ биголоморфно эквивалентен ростку $\mathbb{C}^k$ в точке 0, а по следствию 2.3.3.6 это равносильно изоморфизму их локальных колец. □

2.4 Nullstellensatz

2.4.1. Сведение к случаю простого идеала. Мы хотим доказать, что $\operatorname{id}\operatorname{loc} I = \sqrt{I}$ для каждого идеала I в кольце $A = {}_n\mathcal{H}_0$ (или ${}_n\mathcal{O}_0$, или $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$). Во всех этих случаях тривиально выполнено включение $\sqrt{I} \subseteq \operatorname{id}\operatorname{loc} I$. Оказывается, достаточно доказать это утверждение для простых идеалов I. Действительно, у каждого идеала I нетерова кольца A есть *примарное разложение*, то есть, представление в виде $I = \bigcap_{j=1}^m I_j$ для примарных идеалов $I_1, \dots, I_m$. Кроме того, радикал примарного идеала прост. Поэтому, если мы предположим, что Nullstellensatz выполнена для простых идеалов, то

$$\begin{aligned}
\operatorname{id}\operatorname{loc} I &= \operatorname{id}\left(\bigcup_{j=1}^m \operatorname{loc} I_j\right) \\
&= \bigcap_{j=1}^m \operatorname{id}\operatorname{loc} I_j \\
&\subseteq \bigcap_{j=1}^m \operatorname{id}\operatorname{loc} \sqrt{I_j} \\
&= \bigcap_{j=1}^m \sqrt{I_j} \\
&= \sqrt{I}.
\end{aligned}$$

2.4.2. Nullstellensatz Гильберта.

Теорема 2.4.2.1 (Нетер о нормализации). *Пусть A — конечно порожденная алгебра над бесконечным полем K. Тогда существует алгебраически независимый набор элементов $x_1, \dots, x_m \in A$, состоящий из линейных комбинаций порождающих алгебры A, для которого A является конечным расширением над $K[x_1, \dots, x_m]$.*

Доказательство. Индукция по числу образующих алгебры A. Для нуля образующих $(A = K)$ лемма тривиальна. Пусть теперь лемма верна для алгебр с $n-1$ образующими, и пусть A порождена элементами $y_1, \dots, y_n$. Если они алгебраически независимы над K, то A — алгебра многочленов, и можно просто взять $B = A$. Если же они зависимы, рассмотрим нетривиальное полиномиальное соотношение $p(y_1, \dots, y_n) = 0$ над K. В силу бесконечности K найдутся ненулевые элементы $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in K$ такие, что $q(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1) \neq 0$, где q — сумма однородных слагаемых наибольшей степени в p. Сделаем замену переменных $y'_i = y_i - \lambda_i y_n$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, $y'_n = y_n$. Тогда

$$0 = p(y'_1 + \lambda_1 y_n, \dots, y'_{n-1} + \lambda_{n-1} y_n, y_n) = q(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1) p'(y'_1, \dots, y'_{n-1}, y_n),$$

где p' — многочлен от $y'_1, \dots, y'_{n-1}, y_n$, старший коэффициент которого как многочлена от y_n равен 1. Это означает, что элемент y_n цел над подалгеброй $A' \subseteq A$, порожденной элементами $y'_1, \dots, y'_{n-1}$. К этой подалгебре можно применить предположение индукции и заключить, что существует подалгебра $B \subseteq A'$ такая, что $B \cong K[x_1, \dots, x_m]$, причем x_i — линейная комбинация элементов $y'_1, \dots, y'_{n-1}$, и A' цела над B. По транзитивности тогда и A цела над B. $\square$

Предложение 2.4.2.2. *Предположим, что* A, B *— области целостности, и* A *— целое расширение* B. A *является полем тогда и только тогда, когда* B *является полем.*

Доказательство. Предположим, что A поле. У каждого ненулевого элемента $b \in B$ тогда есть обратный $a \in A$. Элемент a цел над B, и потому

$$a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \dots + c_0 = 0$$

для некоторых $c_{n-1}, \dots, c_0 \in B$. Умножая обе части на b^{n-1}, получаем, что

$$a = -(c_{n+1} + \dots + c_0 b^{n-1}) \in B.$$

Поэтому B является полем.

Обратно, если B поле, и $a \in A$ — ненулевой элемент. Рассмотрим минимальный многочлен $a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \dots + c_0$ элемента a; в нем $c_0 \neq 0$. Но тогда элемент $-c_0^{-1}(a^{n-1} + c_{n-1} a^{n-2} + \dots + c_1)$ является обратным к a, и потому A — поле. $\square$

Следствие 2.4.2.3. *Пусть* A *— целое расширение* B, $P \trianglelefteq A$ *— простой идеал.* $P \trianglelefteq A$ *максимален тогда и только тогда, когда* $P \cap B \trianglelefteq B$ *максимален.*

Доказательство. Область целостности A/P является целым расширением области целостности $B/(P \cap B)$. По предложению 2.4.2.2 A/P является полем тогда и только тогда, когда $B/(P \cap B)$ является полем. $\square$

Теорема 2.4.2.4 (о поднятии). *Пусть* A *— целое расширение* B, $P \trianglelefteq B$ *— простой идеал. Тогда* $P = Q \cap B$ *для некоторого простого идеала* $Q \trianglelefteq A$.

Доказательство. Множество $S = B \backslash P$ является мультипликативной системой и в B, и в A. Рассмотрим соответствующие локализации. Мы утверждаем, что $S^{-1}A$ цело над $S^{-1}B$. Действительно, пусть $a/s \in S^{-1}A$, и a удовлетворяет уравнению $a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \dots + b_0 = 0$ с коэффициентами из B. Тогда a/s удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{a}{s}\right)^n + \frac{b_{n-1}}{s} \left(\frac{a}{s}\right)^{n-1} + \dots + \frac{b_0}{s^n} = 0$$

с коэффициентами из $S^{-1}B$.

Пусть теперь J — некоторый максимальный идеал в $S^{-1}A$. Тогда по следствию 2.4.2.3 идеал $J \cap S^{-1}B$ совпадает с единственным максимальным идеалом $S^{-1}P$ кольца $S^{-1}B$. Пересечение $Q = J \cap A$ тогда является простым идеалом в A, и $Q \cap B = J \cap B = P$. $\square$

Теорема 2.4.2.5 (Nullstellensatz Гильберта). *Если* $I \trianglelefteq \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, *то* $\operatorname{id}\operatorname{loc} I = \sqrt{I}$.

Доказательство. Можно предполагать, что идеал I прост. Предположим, что элемент $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ не лежит в I. По теореме Нетер о нормализации 2.4.2.1 можно считать, что координаты в $\mathbb{C}^n$ и целое число m выбраны так, что $A = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]/I$ является конечным расширением кольца $B = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$. Рассмотрим минимальный многочлен (над B) образа элемента f в A/I:

$$f^k + b_{k-1} f^{k-1} + \dots + b_0 \in I,$$

где $b_0, \dots, b_{k-1} \in B$. При этом $b_0 \neq 0$, и потому найдется точка $\lambda \in \mathbb{C}^m$, для которой $b_0(\lambda) \neq 0$. Пусть M — максимальный идеал вида $\operatorname{id}\{\lambda\}$ в B. По теореме 2.4.2.4 и следствию 2.4.2.3 существует максимальный идеал $N \trianglelefteq A$ такой, что $N \cap B = M$. Поле вычетов A/N является конечным расширением поля $B/M = \mathbb{C}$, и потому совпадает с $\mathbb{C}$. Рассмотрим точку $\zeta \in \mathbb{C}^n$, координаты которой — образы в $A/N \cong \mathbb{C}$ образующих $z_1, \dots, z_n$. Тогда N — максимальный идеал в A, состоящий из образом многочленов из $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, обращающихся в нуль в точке ζ. Многочлены из I обращаются в нуль в ζ, поскольку $A = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]/I$. Значит, $\zeta \in \operatorname{loc} I$. Кроме того, из равенства $N \cap B = M$ следует, что $\zeta_i = \lambda_i$ для $i = 1, \dots, m$. Поэтому

$$f^n(\zeta) + b_{n-1}(\lambda) f^{n-1}(\zeta) + \dots + b_0(\lambda) = 0.$$

Мы выбрали λ так, что $b_0(\lambda) \neq 0$, и потому $f(\zeta) \neq 0$, то есть, $f \notin \operatorname{id}\operatorname{loc} I$. $\square$

Доказательство Nullstellensatz для ${}_n\mathcal{H}_0$ будет следовать той же общей стратегии. Мы докажем аналог леммы Нетер о нормализации: если $P \trianglelefteq A = {}_n\mathcal{H}_0$ — простой идеал, то найдется подалгебра $B \subseteq A$ такая, что $B \cong {}_m\mathcal{H}_0$ для некоторого $m \leqslant n$, и A/P — конечное расширение B. В доказательстве теоремы 2.4.2.5 мы использовали, что каждый максимальный идеал в $B = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$, соответствующий точке в $\mathbb{C}^m$, поднимается до максимального идеала в $A = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]/I$, соответствующий точке в $\operatorname{loc} I$. Это рассуждение работает, поскольку в B достаточно много максимальных идеалов, чтобы разделить точки. Разумеется, такое не может быть выполнено в локальном кольце ${}_m\mathcal{H}_0$. Решение состоит в том, чтобы показать, что из конечности расширения ${}_m\mathcal{H}_0/P$ над ${}_m\mathcal{H}_0$ следует некоторое свойство поднятия в полидиске с центром в нуле. А именно, пусть $\pi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ — естественная проекция. Тогда существует полидиск $D \subseteq \mathbb{C}^m$ с центром в нуле, и представитель V ростка $\operatorname{loc} P$ в $\pi^{-1}(D)$ такой, что любая точка в D поднимается вдоль π до точки в V.

2.4.3. Конечные разветвленные голоморфные накрытия. Напомним, что непрерывное отображение $\pi\colon V \to W$ между топологическими пространствами называется **собственным**, если прообраз $\pi^{-1}(K)$ любого компакта $K \subseteq W$ компактен.

Определение 2.4.3.1. Пусть V, W — голоморфные подмногообразия открытых подмножеств в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$, соответственно, и пусть $\pi\colon V \to W$ — собственное голоморфное отображение такое, что прообраз каждой точки W конечен. Отображение π называется **конечным разветвленным голоморфным накрытием**, если существуют открытые плотные подмножества $W_0 \subseteq W$ и $V_0 = \pi^{-1}(W_0) \subseteq V$ такие, что $W \backslash W_0$ — подмногообразие в W, и π индуцирует локально биголоморфное отображение между V_0 и W_0. Это отображение $\pi\colon V_0 \to W_0$ называется **плотным регулярным поднакрытием** в $\pi\colon V \to W$.

Разумеется, отображение $\pi\colon V_0 \to W_0$ между голоморфными подмногообразиями называется *локально биголоморфным*, если у каждой точки $\lambda \in V_0$ есть окрестность U такая, что после ограничения π оказывается биголоморфным отображением между U и некоторой окрестностью точки $\pi(\lambda)$ в W_0. Если у каждой точки $w \in W_0$ есть окрестность A такая, что $\pi^{-1}(A)$ является несвязным объединением открытых множеств, каждое из которых π биголоморфно отображает в A, то π называется *конечным голоморфным накрытием*. Заметим, что локально биголоморфное отображение не обязано быть конечным голоморфным накрытием.

Предложение 2.4.3.2. *Если $\pi\colon V \to W$ — конечное разветвленное голоморфное накрытие с плотным регулярным поднакрытием $\pi\colon V_0 \to W_0$, то $\pi\colon V_0 \to W_0$ — конечное голоморфное накрытие.*

Доказательство. Пусть $w \in W$ и $\pi^{-1}(w) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Выберем непересекающиеся окрестности $U_1, \ldots, U_k$ точек $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Если A — окрестность точки w с компактным замыканием в W_0, то $\pi^{-1}(\overline{A})\backslash\bigcup U_i$ — компактное подмножество в V_0. Семейство всех подмножеств такого вида замкнуто относительно конечных пересечений, и потому (если все они непусты) их пересечение содержит некоторую точку λ. Тогда обязательно $\pi(\lambda) = w$, и, стало быть, $\lambda = \lambda_i$ для некоторого i. Но это невозможно, поскольку λ не лежит ни в одном U_i. Мы получили противоречие, и потому для некоторого A подмножество $\pi^{-1}(A)$ является несвязным объединением открытых множеств $\pi^{-1}(A) \cap U_i$.

Теперь предположим, что $w \in W_0$. Выберем открытые подмножества U_i в V_0 так, чтобы $\pi|_{U_i}$ оказалось биголоморфным отображением на некоторую окрестность точки w. Выберем $A \subseteq \bigcap \pi(U_i)$; тогда $\pi^{-1}(A) = \bigcup(\pi^{-1}(A) \cap U_i)$. Для каждого i отображение π индуцирует биголоморфное отображение из $\pi^{-1}(A) \cap U_i$ в A. Мы показали, что у каждой точки из W_0 есть окрестность, которая (посредством отображения π) покрывается конечным набором биголоморфных копий себя. Поэтому π — конечное биголоморфное накрытие. □

Заметим, что количество точек в прообразе точки W_0 является локально постоянной функцией на W_0. Если W_0 связно, то эта функция постоянна и равна некоторому натуральному числу r; тогда мы называем $\pi\colon V \to W$ *конечным разветвленным голоморфным накрытием чистого порядка* r, а $\pi\colon V_0 \to W_0$ — *конечным голоморфным накрытием чистого порядка* r.

Предложение 2.4.3.3. *Пусть $\pi\colon V \to W$, W_0 — как выше. Предположим также, что W_0 локально связно в W, $w \in W$, $\lambda \in \pi^{-1}(w)$. Тогда существуют сколь угодно малые окрестности U точки λ и $A = \pi(U)$ точки w такие, что $\pi\colon U \to A$ — конечное разветвленное голоморфное накрытие чистого порядка.*

Доказательство. Пусть $\pi^{-1}(w) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Выберем попарно непересекающиеся окрестности U_i в V так, чтоб $\lambda_i \in U_i$. Как и в доказательстве предложения 2.4.3.2, можно выбрать окрестность A точки w так, чтобы $\pi^{-1}(A) \subseteq \bigcup U_i$. Заменяя U_i на $U_i \cap \pi^{-1}(A)$, можно считать, что $\pi^{-1}(A) = \bigcup U_i$. Можно выбрать A так, что пересечение $A_0 = W_0 \cap A$ будет связным. Тогда $\pi^{-1}(A_0)$ — конечное голоморфное накрытие A_0 чистого порядка. Возьмем $U_i' = \pi^{-1}(A_0) \cap U_i = U_i \cap V_0$. Тогда U_i' плотно в U_i, и ограничение отображения π на U_i' является конечным голоморфным накрытием чистого порядка. Поэтому ограничение отображения π на U_i является конечным разветвленным голоморфным накрытием A чистого порядка. □

Пусть $\pi\colon V \to W$ — конечное разветвленное голоморфное накрытие, $\lambda \in V$. Заметим, что у точки λ есть достаточно малая окрестность, на которой π является конечным разветвленным голоморфным накрытием чистого порядка. Будем уменьшать эту окрестность; порядок должен стабилизироваться на некотором положительном натуральном числе $o_\pi(\lambda)$. Это число называется **порядком ветвления** отображения π в точке λ.

Пусть $W \subseteq \mathbb{C}^m$ — область, и p — многочлен над $\mathcal{H}(W)$ со старшим коэффициентом 1. Нетрудно проверить, что кольцо $\mathcal{H}(W)$ является нормальной областью целостности, и потому дискриминант многочлена p лежит в $\mathcal{H}(W)$. Кроме того, подмножество в W, на котором все корни p различны — это в точности подмножество, на котором дискриминант не обращается в нуль.

Приведем примеры, как строятся конечные разветвленные голоморфные накрытия. Для этого мы будем использовать следующие обозначения. Пусть $m \leqslant n$, тогда имеется каноническое разложение $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n-m}$ и соответствующая ему проекция $\pi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$. Для точки $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ мы пишем $z = (z', z'') \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n-m}$.

Пусть $W \subseteq \mathbb{C}^m$ — открытое подмножество, и пусть для некоторого $j > m$ задан многочлен

$$p = a_0 + a_1 z_j + \dots + z_n z_j^n \in \mathcal{H}(W)[z_j],$$

так что его коэффициенты $a_0, \dots, a_n$ лежат в $\mathcal{H}(W)$. Тогда рассмотрим функцию

$$p(z', z_j) = a_0(z') + a_1(z') z_j + \dots + a_n(z') z_j^n$$

от $z' = (z_1, \dots, z_m)$. Она индуцирует голоморфную функцию

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n \supseteq \pi^{-1}(W) &\to \mathbb{C}, \\ z &\mapsto p(\pi(z), z_j). \end{aligned}$$

Предложение 2.4.3.4. *Пусть W — область в $\mathbb{C}^m$, $\pi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ — проекция, $U = \pi^{-1}(W)$. Для каждого $j = m+1, \dots, n$ пусть задан [непостоянный] многочлен p_j от z_j с коэффициентаи в $\mathcal{H}(W)$ и старшим коэффициентом 1. Положим*

$$V = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in U \mid p_j(\pi(z), z_j) = 0,\ j = m+1, \dots, n\}.$$

Тогда $\pi\colon V \to W$ — конечное разветвленное голоморфное накрытие.

Доказательство. Пусть $d_j \in \mathcal{H}(W)$ — дискриминант многочлена p_j $(j = m+1, \dots, n)$, и D — объединение множеств нулей функций d_j. Тогда подмножество $W_0 = W \backslash D$ открыто в W. Положим $V_0 = \pi^{-1}(W_0)$, где $\pi\colon V \to W$ — ограничение проекции $U \to W$ на V. Нетрудно проверить, что W_0 плотно в W. Осталось проверить, что V_0 плотно в V, и что отображение π собственно, имеет конечные слои, и локально биголоморфно на V_0.

Пусть $K \subseteq W$ — компакт, $L = \pi^{-1}(K)$. Мы утверждаем, что L — ограниченное подмножество в $\mathbb{C}^n$. Очевидно, что координатная функция z_j, $j \leqslant m$, ограничена на L. Для $j > m$ функция z_j ограничена на L, поскольку точки $z \in L$ удовлетворяют полиномиальному (по z_j уравнению $p_j(\pi(z), z_j) = 0$, коэффициенты которого — ограниченные функции на K. Поделив это уравнение на $z_j^{n_j - 1}$ (здесь n_j — порядок p_j), можно оценить $|z_j|$ в терминах коэффициентов многочлена p_j. Поэтому все координатные функции $|z_j|$ ограничены на L, и, стало быть, подмножество L ограничено. Очевидно, что L замкнуто в $\mathbb{C}^n$; поэтому L компактно. Мы показали, что отображение π собственно.

Пусть теперь $a = (a_1, \dots, a_n) \in V$, $\widetilde{a} = \pi(a) \in W$. Каждый многочлен $p_j(\widetilde{a}, z_j)$ имеет старший коэффициент (по z_j) 1, и в точке $z_j = a_j$ имеет нуль некоторого [ненулевого] порядка. По предложению 2.2.3.1 для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $\widetilde{D}$ точки $\widetilde{a}$ такая, что для всех $\widetilde{z} \in \widetilde{D}$ многочлен $p_j(\widetilde{z}, z_j)$ имеет корень на расстоянии не более ε от a_j. В частности, у любой точки V есть достаточно близкие к ней точки в V, лежащие над точками открытого плотного подмножества $W_0 \subseteq W$. Иными словами, V_0 плотно в V.

Поскольку W_0 — это в точности множество точек $\widetilde{z} \in W$, в которых корни всех многочленов p_j различны, его обратный образ V_0 есть подмножество в U, на котором каждое

p_j обращается в 0, но производная p_j по z_j не обращается в 0. Рассмотрим отображение $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-m}$, заданное формулой

$$F(z) = (p_{m+1}(\pi(z), z_{m+1}), \ldots, p_n(\pi(z), z_n)).$$

Последние $n - m$ столбцов его якобиана J_F образуют диагональную матрицу с элементами, не обращающимися в 0 на V_0. Поэтому ранг J_F равен $n - m$ на открытом множестве, содержащем V_0. Из теоремы о неявном отображении следует, что для любой точки $\lambda \in V_0$ найдутся окрестность A_λ точки λ в $\mathbb{C}^n$, окрестность B_λ точки $\pi(\lambda)$ в $\mathbb{C}^m$, и голоморфное отображение $G\colon B_\lambda \to A_\lambda$ так, что точки из A_λ, в которых F обращается в 0 (то есть, точки $V_0 \cap A_\lambda$) — это в точности точки из образа G. Поэтому G является голоморфным обратным к ограничению π на $V_0 \cap A_\lambda$. Значит, у π есть локально голоморфное обратное на V_0. Таким образом, π локально биголоморфно на V_0. Значит, $V \to W$ — конечное разветвленное голоморфное накрытие. □

Нам понадобится следующая техническая лемма.

Лемма 2.4.3.5. *Для любых натуральных n, r найдется конечное множество $\{f_1, \ldots, f_q\}$ линейных функционалов на $\mathbb{C}^n$ такое, что для любого множества $\{z_1, \ldots, z_r\}$ из r различных точек в $\mathbb{C}^n$ найдется индекс i, для которого все числа $f_1(z_1), \ldots, f_i(z_r)$ различны.*

Доказательство. □

Предложение 2.4.3.6. *Пусть W — открытое связное подмножество в $\mathbb{C}^m$, D — собственное подмногообразие в W, $W_0 = W \backslash D$. Пусть $\pi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ — каноническая проекция. Если V_0 — подмногообразие в $\pi^{-1}(W_0)$, $\overline{V_0}$ — его замыкание в $\pi^{-1}(W)$, и если π индуцирует голоморфное накрытие $V_0 \to W_0$ порядка r и собственное отображение $\pi\colon \overline{V_0} \to W$, то*

1. *$\overline{V_0}$ — подмногообразие в $\pi^{-1}(W)$;*
2. *$pi\colon \overline{V_0} \to W$ — конечное разветвленное голоморфное накрытие;*
3. *для каждого $w \in W$ множество $\pi^{-1}(w) \cap \overline{V_0}$ содержит не более r элементов;*
4. *каждая функция $f \in \mathcal{H}(\overline{V_0}$ является корнем многочлена над $\mathcal{H}(W)$ степени r со старшим коэффициентом 1.*

Доказательство. □

Мы будем использовать полезное следствие из этого предложения.

Следствие 2.4.3.7. *Пусть W — связное открытое подмножество в $\mathbb{C}^m$, $\pi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ — каноническая проекция, V — подмногообразие в $\pi^{-1}(W)$. Если $\pi\colon V \to W$ — конечное разветвленное голоморфное накрытие, а $\pi\colon V_0 \to W_0$ — плотное регулярное поднакрытие, то*

1. *над каждой точкой из W лежит не более r точек из V, где r — порядок накрытие $\pi\colon V_0 \to W_0$;*
2. *кольцо $\mathcal{H}(V)$ является целым расширением кольца $\mathcal{H}(W)$;*
3. *если A_0 — некоторая компонента связности V_0, то ее замыкание $\overline{A_0}$ в V является подмногообразием в V, и $\pi\colon \overline{A_0} \to W$ — тоже конечное разветвленное голоморфное накрытие.*

Доказательство. ☐

Определение 2.4.3.8. **Локусом ветвления** конечного разветвленного голоморфного накрытия $\pi\colon V \to W$ называется подмножество V, состоящее из точек, порядок ветвления в которых не меньше 2.

Следствие 2.4.3.9. *Пусть $\pi\colon V \to W$ — конечное разветвленное голоморфное накрытие, где V, W — как в следствии 2.4.3.7. Для любого натурального k подмножество точек в V, в которых π имеет порядок ветвления хотя бы k, является подмногообразием в V. В частности, локус ветвления π — подмногообразие в V. Кроме того, образ локуса ветвления относительно π является подмногообразием в W.*

Доказательство. ☐

Пример 2.4.3.10. Пусть $V = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z_2 - w^3 = 0\}$. Положим $W = \mathbb{C}$ и определим проекции $\pi_i\colon V \to W$ формулами $\pi_1(z, w) = z$, $\pi_2(z, w) = w$. Наконец, пусть $V_0 = V \backslash \{(0, 0)\}$, $W_0 = W \backslash \{0\}$. Тогда каждое $\pi_i\colon V \to W$ является конечным разветвленным голоморфным накрытием с локусом ветвления $\{(0, 0)\}$, а $\pi_i\colon V \to W$ — конечным голоморфным накрытием. Нетрудно понять, что в точке $(0, 0)$ отображение π_1 имеет порядок ветвления 3, а π_2 — порядок ветвления 2. Это показывает, что порядок ветвления в точке многообразия V зависит не только от V, но и от выбора разветвленного голоморфного накрытия.

Пример 2.4.3.11. Положим $p(u, v, z) = z^3 - 3uz + 2v$, $V = \{(u, v, z) \in \mathbb{C}^3 \mid p(u, v, z) = 0\}$. Обозначим через $\pi\colon V \to W = \mathbb{C}^2$ проекцию $(u, v, z) \mapsto (u, v)$. По предложению 2.4.3.4 отображение π является конечным разветвленным голоморфным накрытием. Его порядок ветвления равен хотя бы 2 в тех точках, где p и $\partial p/\partial z$ обращаются в 0 одновременно. Это в точности точки, где $u = z^2$ и $v = z^3$. Это может случиться только если $u^3 = v^2$. Порядок ветвления равен 3 в тех точках, где p, $\partial p/\partial z$ и $\partial^2 p/\partial z^2$ обращаются в 0 одновременно. Из этого следует, что единственная точка с порядком ветвления 3 — это начало координат. Пусть $D = \{(u, v) \in W \mid u^3 = v^2\}$. Над каждой точкой из $D \backslash \{0\}$ лежит одна точка V с порядком ветвления 2 (это точка (z^2, z^3, z)), и одна точка с порядком ветвления 1 (это точка $(z^2/4, -z^3/8, z)$). Над каждой точкой из $W_0 = W \backslash D$ лежат три точки V, и порядок ветвления в каждой из них равен 1.

2.4.4. Доказательство Nullstellensatz. Зафиксируем координатную систему в $\mathbb{C}^n$. Для $j < n$ мы будем обозначать через ${}_j\mathcal{H}_0$ подалгебру в ${}_n\mathcal{H}_0$, состоящую из ростков голоморфных функций, зависящих только от переменных $z_1, \ldots, z_j$. Тогда ${}_n\mathcal{H}_0$ является ${}_j\mathcal{H}_0$-алгеброй; более того, если $I \trianglelefteq {}_n\mathcal{H}_0$, то ${}_n\mathcal{H}_0/I$ — тоже ${}_j\mathcal{H}_0$-алгебра. Естественное отображение ${}_j\mathcal{H}_0 \to {}_n\mathcal{H}_0/I$ инъективно тогда и только тогда, когда $I \cap {}_j\mathcal{H}_0 = (0)$. В этом случае ${}_j\mathcal{H}_0$ можно считать подкольцом в ${}_n\mathcal{H}_0/I$.

Предложение 2.4.4.1. *Пусть $I \trianglelefteq {}_n\mathcal{H}_0$. Следующие условия на выбор координат в $\mathbb{C}^n$ и на целое число $m < n$ равносильны:*

1. *существуют $\mathbf{f}_{m+1}, \ldots, \mathbf{f}_n \in {}_j\mathcal{H}_0 \cap I$ такие, что $\mathbf{f}_j$ имеет нуль конечного порядка вдоль z_j;*

2. *${}_n\mathcal{H}_0$ является конечной ${}_m\mathcal{H}_0$-алгеброй, порожденной образами элементов $\boldsymbol{z}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{z}_n$ в ${}_n\mathcal{H}_0/I$.*

Доказательство. ☐

Теорема 2.4.4.2. *Пусть* $P \trianglelefteq {}_n\mathcal{H}_0$ *— ненулевой простой идеал. Тогда можно выбрать координаты в* $\mathbb{C}^n$ *и целое число* m *так, что* ${}_n\mathcal{H}_0/P$ *— конечное расширение* ${}_m\mathcal{H}_0$*, порожденное образами ростков* $z_{m+1}, \ldots, z_n$*. Более того, после такого выбора координат, можно заменить координаты* $z_{m+1}, \ldots, z_n$ *так, что образ* z_{m+1} *будет порождать поле частных* ${}_n\mathcal{M}$ *алгебры* ${}_n\mathcal{H}_0/P$ *над полем частных* ${}_m\mathcal{M}$ *алгебры* ${}_m\mathcal{H}_0$*.*

Доказательство. □

Пусть $P \trianglelefteq {}_n\mathcal{H}_0$. Сейчас мы выберем конечный набор элементов P так, что получится описание $\operatorname{loc} P$ как ростка конечного разветвленного голоморфного накрытия некоторой окрестности в $\mathbb{C}^m$. Выберем сначала линейные координаты и целое число m как в предыдущей теореме. Как и раньше, мы обозначаем через $\widetilde{z}_j$ образ ростка z_j в ${}_n\mathcal{H}_0/P$. Отображение ${}_m\mathcal{H}_0 \to {}_n\mathcal{H}_0/P$ является конечным расширением колец, и соответствующее расширение полей ${}_m\mathcal{M} \to {}_n\widetilde{\mathcal{M}}$ порождено элементом $\widetilde{z}_{m+1}$. Пусть $j > m$. Тогда элемент $\widetilde{z}_j$ цел над ${}_m\mathcal{H}_0$. Пусть $\mathbf{p}_j$ — его минимальный многочлен, то есть, многочлен наименьшей степени со старшим коэффициентом 1 в ${}_m\mathcal{H}_0[z_j] \subseteq {}_n\mathcal{H}_0$, лежащий в P. Представитель p_j этого ростка имеет нуль конечного порядка вдоль z_j (как функция от $z_1, \ldots, z_m, z_j$), и (по подготовительной теореме Вейерштрасса) раскладывается в произведение обратимого элемента и многочлена Вейерштрасса по z_j. Поэтому с самого начала можно считать, что p_j — многочлен Вейерштрасса по z_j.

Мы получили элементы $\mathbf{p}_{m+1}, \ldots, \mathbf{p}_n$. Оставшиеся элементы выберем следующим образом. Для $j = m+2, \ldots, n$ элемент $\widetilde{z}_j \in {}_n\widetilde{\mathcal{H}}_0$ цел над ${}_m\mathcal{H}_0$. Кроме того, $\widetilde{z}_{m+1}$ порождает поле частных кольца ${}_n\widetilde{\mathcal{H}}_0$ над полем частных кольца ${}_m\mathcal{H}_0$, и $\mathbf{p}_{m+1}$ — минимальный многочлен элемента $\widetilde{z}_{m+1}$. Обозначим через $\mathbf{d}$ дискриминант многочлена $\mathbf{p}_{m+1}$. Тогда $\mathbf{d} \cdot \widetilde{z}_j = \mathbf{s}_j(\widetilde{z}_{m+1})$ для единственного многочлена $\mathbf{s}_j$ над ${}_m\mathcal{H}_0$ степени меньше, чем степень $\mathbf{p}_{m+1}$. Поэтому многочлен $\mathbf{q}_j(z_{m+1}, z_j) = \mathbf{d} \cdot z_j - \mathbf{s}_j(z_{m+1})$ лежит в ${}_m\mathcal{H}_0[z_{m+1}, z_j] \cap P$. Элементы $\mathbf{q}_j$ вместе с $\mathbf{p}_j$ — это как раз то, что нам нужно.

Нам понадобится один вспомогательный подидеал в P.

Лемма 2.4.4.3. *Пусть идеал* $I \trianglelefteq {}_n\mathcal{H}_0$ *порожден элементами* $\mathbf{p}_{m+1}, \mathbf{q}_{m+2}, \ldots, \mathbf{q}_n$*. Обозначим через* $\mathbf{d}$ *дискриминант многочлена* $\mathbf{p}_{m+1}$*, и пусть* $\mathbf{D}$ *— множество общих нулей идеала в* ${}_n\mathcal{H}_0$*, порожденного* $\mathbf{d}$*. Тогда найдется целое число* μ *такое, что* $\mathbf{d}^\mu \cdot P \subseteq I \subseteq P$ *и* $\operatorname{loc} P \subseteq \operatorname{loc} I \subseteq \operatorname{loc} P \cup \mathbf{D}$*.*

Доказательство. □

Теорема 2.4.4.4. *Пусть* $P \trianglelefteq \mathcal{H}_0$ *— простой идеал. Предположим, что координаты в* $\mathbb{C}^n$ *выбраны так, что* ${}_n\mathcal{H}_0/P$ *является целым расширением кольца* ${}_m\mathcal{H}_0$ *для некоторого целого* m*. Тогда росток* $\mathbf{V} = \operatorname{loc} P$ *можно представить в виде объединения* $\mathbf{V} = \mathbf{V}' \cup \mathbf{V}''$ *ростков подмногообразий так, что проекция* $\pi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ *реализует* $\mathbf{V}'$ *как росток конечного разветвленного голоморфного накрытия чистого порядка в некоторой окрестности* $0 \in \mathbb{C}^m$*.*

Теорема 2.4.4.5 (Теорема Рюккерта о нулях)**.** *Пусть* $I \trianglelefteq {}_n\mathcal{H}_0$*. Тогда* $\operatorname{id}\operatorname{loc} I = \sqrt{I}$

Доказательство. Достаточно доказать, что $\operatorname{id}\operatorname{loc} P \subseteq P$ для простого идеала $P \trianglelefteq {}_n\mathcal{H}_0$. Пусть $\mathbf{f} \in {}_n\mathcal{H}_0$, $\mathbf{f} \notin P$, и координаты выбраны так, что ${}_n\mathcal{H}_0/P$ — конечное расширение кольца ${}_m\mathcal{H}_0$. Тогда образ $\mathbf{f}$ в ${}_n\mathcal{H}_0/P$ удовлетворяет некоторому минимальному полиномиальному уравнению над ${}_m\mathcal{H}_0$. Это значит, что существуют элементы $\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_{k-1} \in {}_m\mathcal{H}_0$ такие, что $\mathbf{p}(\mathbf{f}) = \mathbf{f}^k + \mathbf{a}_{k-1}\mathbf{f}^{k-1} + \cdots + \mathbf{a}_1\mathbf{f} + \mathbf{a}_0 \in P$, и ни один многочлен степени меньше k не обладает этим свойством. Из простоты P следует, что $\mathbf{a}_0 \neq 0$.

Выберем полидиск $D \subseteq \mathbb{C}^m$, в котором каждый росток $\mathbf{a}_i$ имеет некоторого представителя a_i. Из теоремы 2.4.4.4 следует, что можно выбрать D так, что у $\operatorname{loc} P$ есть представитель $V \subseteq \pi^{-1}(D)$, представимый в виде объединения двух подмногообразий $V = V' \cup V''$, причем $\pi\colon V' \to D$ — конечное разветвленное голоморфное накрытие. Пусть f — представитель ростка $\mathbf{f}$ в некоторой окрестности $U \subseteq \pi^{-1}(D)$ точки $0 \in \mathbb{C}^n$. Тогда U содержит точки $z \in V'$, сколь угодно близкие к 0, для которых $f^k + a_{k-1}f^{k-1} + \cdots + a_1 f + a_0 = 0$, и $a_0(\pi(z)) \neq 0$. Заметим, что $f(z) \neq 0$ — иначе $a_0(\pi(z)) = 0$. Поэтому $\mathbf{f}$ не обращается в 0 на ростке V, который равен $\operatorname{loc} P$. Это означает, что $\mathbf{f} \in \operatorname{id} \operatorname{loc} P$, что и требовалось. □

2.5 GAGA

2.5.1. Окольцованные пространства и многообразия. Обозначения: ${}_n\mathcal{C}^\infty$ — пучок гладких (имеющих непрерывные производные всех порядков) функций на $\mathbb{R}^n$, ${}_n\mathcal{H}$ — пучок голоморфных функций на $\mathbb{C}^n$, ${}_m\mathcal{O}$ — пучок регулярных функций на $\mathbb{C}^n$ (с топологией Зариского). Каждое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ снабжено пучком ${}_U\mathcal{C}^\infty$ гладких функций. Каждое голоморфное подмногообразие V открытого множества в $\mathbb{C}^n$ снабжено пучком ${}_V\mathcal{H}$ голоморфных функций. Аналогично, если V — алгебраическое подмногообразие открытого множества в $\mathbb{C}^n$, мы будем обозначать через ${}_V\mathcal{O}$ пучок регулярных функций на V. Все это — примеры окольцованных пространств.

Определение 2.5.1.1. Пусть $(X, \mathcal{R})$ — окольцованное пространство (то есть, топологическое пространство X с пучком $\mathcal{R}$ коммутативных колец на нем). Предположим также, что топологическое пространство X хаусдорфово и обладает счетной базой (second countable).

1. Если у каждой точки пространства X есть окрестность U такая, что окольцованное пространство $(U, \mathcal{R}|_U)$ изоморфно $(V, {}_V\mathcal{C}^\infty)$, где V — окрестность в $\mathbb{R}^n$ для некоторого n, то $(X, \mathcal{R})$ называется $\mathbb{C}^\infty$**-многообразием, или гладким многообразием**. В этом случае структурный пучок $\mathcal{R}$ обозначается через ${}_X\mathcal{C}^\infty$ (или просто $\mathcal{C}^\infty$) и называется **пучокм гладких функций на** X

2. Если у каждой точки пространства X есть окрестность U такая, что окольцованное пространство $(U, \mathcal{R}|_U)$ изоморфно $(V, {}_V\mathcal{H})$, где V — окрестность в $\mathbb{R}^n$ для некоторого n, то $(X, \mathcal{R})$ называется **комплексным аналитическим многообразием**. В этом случае структурный пучок $\mathcal{R}$ обозначается через ${}_X\mathcal{H}$ (или просто $\mathcal{H}$) и называется **пучком голоморфных функций на** X.

3. Если у каждой точки пространства X есть окрестность U такая, что окольцованное пространство $(U, \mathcal{R}|_U)$ изоморфно $(V, {}_V\mathcal{H})$, где V — голоморфное подмногообразие открытого множества в $\mathbb{C}^n$ для некоторого n, то $(X, \mathcal{R})$ называется **голоморфным многообразием**. В этом случае структурный пучок $\mathcal{R}$ обозначается через ${}_X\mathcal{H}$ (или просто $\mathcal{H}$) и называется **пучком голоморфных функций на** X.

Категория $\mathcal{C}^\infty$-векторных расслоений на $\mathcal{C}^\infty$-многообразии эквивалентна категории локально свободных модулей конечного ранга над пучком колец $\mathbb{C}^\infty$.

Определение 2.5.1.2. Аффинное многообразие — это окольцованное пространство, изоморфное (как окольцованное пространство) алгебраическому подмногообразию в $\mathbb{C}^n$. **Алгебраическое предмногообразие** — это окольцованное пространство, которое можно покрыть конечным числом открытых множеств, являющихся аффинными многообразиями. **Алгебраическое многообразие** — это алгебраическое предмногообразие X со следующим свойством: для любого алгебраического предмногообразия W и для любой пары морфизмов $f, g\colon W \to X$ множество $\{w \in W \mid f(w) = g(w)\}$ замкнуто в W.

Многие определения несложно переносятся с алгебраических подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ на абстрактные алгебраические многообразия: **подмногообразие** — это замкнутое подмножество, **неприводимое многообразие** не может быть представлено в виде объединения двух собственных подмногообразий. Каждое многообразие есть объединение конечного числа неприводимых подмногообразий с непустыми внутренностями, которые называются его **неприводимыми компонентами**. Несложно определить сингулярные и регулярные точки; многообразие X называется гладким, если каждая его точка регулярна.

Структурный пучок алгебраического многообразия: ${}_X\mathcal{O}$, структурный пучок голоморфного многообразия: ${}_X\mathcal{H}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — пучок колец на пространстве X, $A = \mathcal{A}(X)$, M — A-модуль. Рассмотрим пучок $\mathcal{A} \otimes AM$, ассоциированный с предпучком $U \mapsto \mathcal{A}(U) \otimes_A M$. Мы получили функтор $M \mapsto \mathcal{A} \otimes_A M$ из категории A-модулей в категорию [пучков] $\mathcal{A}$-модулей.

Пусть теперь V — аффинное многообразие, M — модуль над алгеброй $\mathcal{O}(V)$. Положим $\widetilde{M} = {}_V\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}(V)} M$ — это пучок на V. Как говорит определение выше, это пучок, ассоциированный с предпучком $U \mapsto M(U) = {}_V\mathcal{O}(U) \otimes_{\mathcal{O}(V)} M$.

2.5.2. Когерентные алгебраические пучки.

Определение 2.5.2.1. Пучок $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{F}$ называется **алгебраическим пучком**. Он называется **квазикогерентным алгебраическим пучком**, если у каждой точки X есть аффинная окрестность V такая, что $\mathcal{F}|_V$ изоморфен пучку вида $\widetilde{M}$ для некоторого $\mathcal{O}(V)$-модуля M. Квази-когерентный пучок называется **когерентным**, если у любой точки X есть такая окрестность V с конечно порожденном $\mathcal{O}(V)$-модулем M.

Теорема 2.5.2.2. *Пусть V — аффинное многообразие. Тогда функтор $M \mapsto \widetilde{M}$ устанавливает эквивалентность между категориями $\mathcal{O}(V)$-модулей и категорией квази-когерентных пучков ${}_V\mathcal{O}$-модулей на V. Квази-обратным к нему является функтор глобальных сечений $\Gamma(V, -)\colon \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(V)$. При ограничении на подкатегорию конечно порожденных модулей функтор $M \mapsto \widetilde{M}$ устанавливает эквивалентность между этой подкатегорией и категорией когерентных пучков $\mathcal{O}(V)$-модулей.*

Определение 2.5.2.3. Пусть X — алгебраическое многообразие. Пучок подмодулей структурного пучка ${}_X\mathcal{O}$ называется **пучком идеалов**. Если он когерентен (как пучок модулй), то он называется **когерентным пучком идеалов**. Любое подмногообразие $Y \subseteq X$ порождает пучок идеалов на X: это пучок сечений структурного пучка ${}_X\mathcal{O}$, которые обращаются в нуль на Y. Такой пучок называется **пучком идеалов подмногообразия** Y и часто обозначается через $\mathcal{I}_Y$.

Теорема 2.5.2.4. *Пусть X — алгебраическое многообразие, $Y \subseteq X$ — подмногообразие. Тогда пучок идеалов $\mathcal{I}_Y$ является когерентным алгебраическим пучком.*

2.5.3. Когомологическая хаарктеризация аффинных многообразий.

Предложение 2.5.3.1. *Пусть V — аффинное многообразие, I — инъективный модуль над кольцом $\mathcal{O}(V)$. Тогда пучок $\widetilde{I}$ вялый на V.*

Теорема 2.5.3.2. *Пусть V — алгебраическое многообразие. Следующие утверждения равносильны:*

1. *V аффинно;*
2. *$H^p(V, \mathcal{F}) = 0$ для всех $p > 0$ и для всех квази-когерентных пучков $\mathcal{F}$ на V;*
3. *$H^1(V, \mathcal{F}) = 0$ для всех когерентных пучков $\mathcal{F}$ на V.*

2.5.4. Прямые и обратные образы. Пусть $\varphi\colon Y \to X$ — морфизм алгебраических многообразий, $\mathcal{F}$ — пучок ${}_X\mathcal{O}$-модулей на X. Тогда обратный образ $\varphi^{-1}\mathcal{F}$ является пучком $\varphi^{-1}{}_X\mathcal{O}$-модулей на Y, но не пучком ${}_Y\mathcal{O}$-модулей. Однако, φ является морфизмом окольцованных пространств, поэтому задан морфизм пучков колец $\varphi^{-1}{}_X\mathcal{O} \to {}_Y\mathcal{O}$. Поэтому ${}_Y\mathcal{O}$ является пучком модулей над $\varphi^{-1}{}_X\mathcal{O}$, и можно рассмотреть тензорное произведение ${}_Y\mathcal{O}\otimes_{\varphi^{-1}{}_X\mathcal{O}} \varphi^{-1}\mathcal{F}$. По определению это пучок, ассоциированный с предпучком $U \mapsto {}_Y\mathcal{O}(U)\otimes_{\varphi^{-1}{}_X\mathcal{O}(U)} \varphi^{-1}\mathcal{F}(U)$. Это, очевидно, пучок ${}_Y\mathcal{O}$-модулей. Он обозначается через $\varphi^*\mathcal{F}$ и называется **обратным образом** пучка $\mathcal{F}$. Заметим, что функтор φ^* точен тогда и только тогда, когда морфизм φ плоский. Нетрудно показать, что функтор φ^* сохраняет [квази-]когерентность.

Пусть теперь $\mathcal{G}$ — пучок ${}_Y\mathcal{O}$-модулей на Y, и $\varphi\colon Y \to X$ — морфизм алгебраических многообразий. Тогда $\mathcal{G}$ — пучок $\varphi^{-1}{}_X\mathcal{O}$-модулей (за счет морфизма $\varphi^{-1}{}_X\mathcal{O} \to {}_Y\mathcal{O}$). Поэтому $\varphi_*\mathcal{G}$ имеет естественную структуру пучка ${}_X\mathcal{O}$-модулей на X, и φ^* является функтором из категории пучков ${}_Y\mathcal{O}$-модулей на Y в категорию пучков ${}_X\mathcal{O}$-модулей на X. Оказывается, этот функтор сохраняет квази-когерентность, но не когерентность. Однако, он сохраняет когерентность в случае *конечного* морфизма.

Определение 2.5.4.1. Морфизм $\varphi\colon Y \to X$ алгебраических многообразий называется **конечным**, если X можно покрыть аффинными открытыми подмножествами V так, что $\varphi^{-1}(V)$ аффинно, и кольцо $\mathcal{O}(\varphi^{-1}(V))$ конечно над $\mathcal{O}(V)$.

2.5.5. Когерентные аналитические пучки.

Определение 2.5.5.1. Пусть X — голоморфное многообразие. Пучок ${}_X\mathcal{H}$-модулей называется **аналитическим пучком**. Аналитический пучок $\mathcal{F}$ называется **когерентным аналитическим пучком**, если у каждой точки X есть окрестность V такая, что $\mathcal{F}|_V$ является коядром морфизма ${}_V\mathcal{H}^m \to {}_V\mathcal{H}^n$ свободных аналитических пучков конечного ранга.

Определение 2.5.5.2. Аналитический пучок $\mathcal{F}$ называется **локально конечно порожденным**, если у каждой точки $x \in X$ есть окрестность U и конечный набор сечений $s_1, \ldots, s_k$ пучка $\mathcal{F}$ таких, что для любой точки $y \in U$ ростки этих сечений в y порождают $\mathcal{F}_y$.

Теорема 2.5.5.3. *Пусть $U \subseteq \mathbb{C}^n$ — открытое множество. Тогда любой гомоморфизм ${}_U\mathcal{H}$-модулей вида ${}_U\mathcal{H}^m \to {}_U\mathcal{H}^k$ имеет локально конечно порожденное ядро.*

Пусть X — голоморфное многообразие. **Пучок идеалов** в ${}_X\mathcal{H}$ — это подпучок $\mathcal{I}$ в ${}_X\mathcal{H}$ такой, что $\mathcal{I}(U)$ является идеалом в $\mathcal{H}(U)$ для каждого открытого множества $U \subseteq X$. Для голоморфного подмногообразия $Y \subseteq X$ определим **пучок идеалов** $\mathcal{I}_Y$ **подмногообразия** Y следующим образом:

$$\mathcal{I}_Y(U) = \{f \in \mathcal{H}(U) \mid f(y) = 0 \text{ для всех } y \in U \cap Y\}.$$

Теорема 2.5.5.4 (Картана). *Пусть Y — голоморфное многообразие, $Y \subseteq X$ — голоморфное подмногообразие. Тогда его пучок идеалов $\mathcal{I}_Y$ когерентен.*

Прямые и обратные образы пучков определяются совершенно аналогично алгебраическому случаю.

2.5.6. Проективное пространство. Напомним, что комплексное проективное пространство $\mathbb{P}^n$ — это фактор-множество множества $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ по отношению эквивалентности $(\lambda z_0, \ldots, \lambda z_n) \sim (z_0, \ldots, z_n)$ для $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Сейчас мы определим на $\mathbb{P}^n$ структуру алгебраического многообразия. Пусть $p \in \mathbb{C}[z_0, \ldots, z_n]$ — однородный многочлен некоторой степени k. Вообще говоря, p не определяет функцию на $\mathbb{P}^n$ (кроме случая $k = 0$), поскольку выполнено равенство

$$p(\lambda z_0, \dots, \lambda z_n) = \lambda^k p(z_0, \dots, z_n).$$

Однако, из этого равенства следует, что множество нулей многочлена p инвариантно относительно умножения на $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Поэтому множество нулей p корректно задано как подмножество в ¶^{n}.

Определение 2.5.6.1. Множество общих нулей в $\mathbb{P}^n$ некоторого семейства однородных многочленов называется **алгебраическим подмножеством**. Топология, в которой открытые множества — это дополнения алгебраических подмножеств, называется **топологией Зариского**.

Пусть k — целое число. Сейчас мы построим пучок $\mathcal{O}(k)$ на $\mathbb{P}^n$. Обозначим через $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{P}^n$ каноническую проекцию. Если $U \subseteq \mathbb{P}^n$ открыто (в топологии Зариского), то прообраз $\pi^{-1}(U)$ открыт в топологии Зариского на $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$. Пусть $\mathcal{O}(k)(U)$ — множество регулярных функций на $\pi^{-1}(U)$, однородных степени k (такая функция задается как частное двух многочленов g/h, где g однороден степени $l + k$, а h однороден степени l).

Пусть $U \subseteq \mathbb{P}^n$ — открытое множество. Нетрудно понять, что для сечений $f \in \mathcal{O}(j)(U)$ и $g \in \mathcal{O}(k)(U)$ определено их произведение $fg \in \mathcal{O}(j+k)(U)$. В частности, $\mathcal{O}(0)$ — пучок колец, а каждый пучок вида $\mathcal{O}(k)$ является пучком $\mathcal{O}(0)$-модулей. Таким образом, $\mathbb{P}^n$ можно считать окольцованным пространством с пучком колец $\mathcal{O} = \mathcal{O}(0)$. Это окольцованное пространство является алгебраическим многообразием.

Определение 2.5.6.2. Алгебраическое многообразие, изоморфное подмногообразию в $\mathbb{P}^n$ для некоторого n, называется **проективным многообразием**. Многообразие, изоморфное открытому подмножеству проективного многообразия, называется **квазипроективным многообразием**.

2.5.7. От алгебраического к аналитическому. Теперь мы готовы связать алгебраический случай с аналитическим. Пусть V — аффинное алгебраическое многообразие. По определению это означает, что оно изоморфно алгебраическому подмногообразию в $\mathbb{C}^n$. Но это алгебраическое подмногообразие естественным образом имеется структура голоморфного подмногообразия: многочлен является голоморфной функцией, поэтому множество общих нулей многочленов является множеством общих нулей голоморфных функций. Поэтому и на произвольном алгебраическом многообразии (не обязательно аффинном) имеется структура голоморфного многообразия: покроем алгебраическое многообразие аффинными и склеим полученные на них голоморфные структуры. Более точно, несложно проверить следующее предложение.

Предложение 2.5.7.1. *Пусть X — алгебраическое многообразие. Существует единственное голоморфное многообразие X^h такое, что*

- *X^h совпадает с X как множество;*
- *любое открытое подмножество X открыто в X^h;*
- *любое аффинное открытое подмножество в X снабжается в X^h естественной голоморфной структурой.*

Кроме того, любой алгебраический пучок $\mathcal{M}$ на X можно перенести на X^h и получить аналитический пучок $\mathcal{M}^h$. А именно, определим сначала для любого пучка $\mathcal{M}$ на X пучок

$\mathcal{M}'$ на X^h следующим образом. Заметим, что отображение $X^h \to X$, тождественное на точках, непрерывно в заданных на X и X^h топологиях. Пусть $\mathcal{M}'$ — обратный образ $\mathcal{M}$ относительно этого непрерывного отображения. Таким образом,

$$\mathcal{M}'(U) = \varinjlim_{\substack{W \supseteq U, \\ W \text{ открыто в } X}} \mathcal{M}(W).$$

Теперь положим $\mathcal{M}^h = {}_{X^h}\mathcal{H} \otimes_{{}_X\mathcal{O}'} \mathcal{M}'$. Несложно понять, что соответствие $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}^h$ задает строгий и точный функтор из категории пучков ${}_X\mathcal{O}$-модулей на X в категорию пучков ${}_{X^h}\mathcal{H}$-модулей на X^h. Этот функтор переводит ${}_X\mathcal{O}^m$ в ${}_{X^h}\mathcal{H}^m$, когерентные алгебраические пучки в когерентные аналитические пучки, пучок идеалов алгебраического подмногообразия V в пучок идеалов соответствующего голоморфного подмногообразия V^h.

2.5.8. Теоремы Серра. Теперь мы можем сформулировать три главные теоремы из статьи Серра GAGA.

Теорема 2.5.8.1 (Первая теорема Серра). *Пусть X — проективное алгебраическое многообразие, $\mathcal{M}$ — когерентный алгебраический пучок на X. Естественное отображение $H^p(X, \mathcal{M}) \to H^p(X^h, \mathcal{M}^h)$ является изоморфизмом для всех p.*

Теорема 2.5.8.2 (Вторая теорема Серра). *Пусть $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ — два когерентных алгебраических пучка на проективном алгебраическом многообразии X. Любой морфизм аналитических пучков $\mathcal{M}^h \to \mathcal{N}^h$ индуцирован некоторым морфизмом $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ алгебраических пучков.*

Теорема 2.5.8.3 (Третья теорема Серра). *Пусть X — проективное алгебраическое многообразие, $\mathcal{M}$ — когерентный аналитический пучок на X^h. Тогда существует когерентный алгебраический пучок $\mathcal{N}$ на X такой, что $\mathcal{N}^h \cong \mathcal{M}$. Более того, такой пучок $\mathcal{N}$ единственен с точностью до изоморфизма.*

Таким образом, для проективного многообразия X функтор $\mathcal{M} \to \mathcal{M}^h$ устанавливает эквивалентность между категорией когерентных алгебраических пучков на X и категорией когерентных аналитических пучков на X^h, сохраняющую когомологии.

2.5.9. Приложения. Приведем несколько приложений теорем Серра.

Следствие 2.5.9.1 (Теорема Чжоу). *Пусть X — проективное многообразие. Любое голоморфное подмногообразие X является алгебраическим.*

Следствие 2.5.9.2. *Пусть X — алгебраическое многообразие. Любое компактное голоморфное подмногообразие X является алгебраическим.*

Следствие 2.5.9.3. *Любое компактное голоморфное многообразие имеет не более одной структуры алгебраического многообразия (с точностью до изоморфизма).*

Следствие 2.5.9.4. *Пусть X — проективное алгебраическое многообразие. Категория алгебраических векторных расслоений на X эквивалентна категории голоморфных векторных расслоений на X^h (эквивалентность устанавливается естественным функтором). Алгебраическое векторное расслоение тривиально тогда и только тогда, когда соответствующее ему голоморфное векторное расслоение тривиально.*