K-теория*

Александр Лузгарев

11 мая 2016 г.

Содержание

*Конспект лекций спецкурса весны 2016 года; предварительная версия.

1 Введение

1.1 Теорема Адамса

Определение 1.1.1. Пусть $f\colon S^{2n-1} \to S^n$ — непрерывное отображение, где $n > 1$. Оно позволяет приклеить диск D^{2n} к S^n: рассмотрим несвязное объединение $D^{2n} \coprod S^n$ и отождествим в нем точку $x \in \partial D^{2n} = S^{2n-1}$ с точкой $f(x) \in S^n$. Полученный CW-комплекс мы будем обозначать через C_f. Нетрудно понять, что у него есть ровно три клетки, размерностей 0, n и $2n$. Поэтому

$$H^i(C_f) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, n \text{ или } 2n \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть t_n — образующая группы $H^n(C_f)$, а t_{2n} — образующая $H^{2n}(C_f)$, заданная отображением $D^{2n} \to C_f$. Мультипликативная структура на кольце когомологий $H^*(C_f)$ полностью определяется коэффициентом $H(f) \in \mathbb{Z}$ в формуле $t_n^2 = H(f)t_{2n}$. Это число называется **инвариантом Хопфа** отображения f.

Нетрудно проверить, что если f, g — гомотопные отображения $S^{2n-1} \to S^n$,то $H(f) = H(g)$. Поэтому мы получаем отображение $H\colon \pi_{2n-1}(S^n) \to \mathbb{Z}$.

1. Отображение H является гомоморфизмом групп.

2. Если n нечетно, то $H = 0$; действительно, $\alpha \cup \beta = (-1)^{|\alpha|\cdot|\beta|}\beta \cup \alpha$, и потому при нечетных n выполнено $t_n^2 = -t_n^2 = 0$.

3. Если n четно, то существует отображение $f\colon S^{2n-1} \to S^n$ с инвариантом Хопфа 2: например, достаточно взять $J_2(S^n) = S^n \times S^n/(*, x) \sim (x, *)$.

Теорема 1.1.2 (Adams, 1958). *Отображение $f\colon S^{2n-1} \to S^n$ с инвариантом Хопфа 1 существует тогда и только тогда, когда $n = 2, 4$ или 8.*

Следствие 1.1.3 (Теорема Ботта–Милнора–Кервера). *Алгебра с делением над $\mathbb{R}$ размерности n существует тогда и только тогда, когда $n = 1, 2, 4$ или 8.*

Следствие 1.1.4. *На S^{n-1} существует $n-1$ линейно независимых касательных векторных полей тогда и только тогда, когда $n = 1, 2, 4, 8$.*

Следствие 1.1.5. *S^{n-1} является H-пространством тогда и только тогда, когда $n = 1, 2, 4$ или 8.*

Мы докажем теорему Адамса в следующей форме.

Теорема 1.1.6. *Пусть X — CW-комплекс, полученный приклеиванием $2n$-клетки к n-сфере, где $n > 1$ и $n \neq 2, 4, 8$. Тогда кап-произведение*

$$- \cup -\colon H^n(X; \mathbb{Z}/2) \times H^n(X; \mathbb{Z}/2) \to H^{2n}(X; \mathbb{Z}/2)$$

равно нулю.

Для доказательства мы можем предполагать, что n четно. Нам понадобятся *операции Адамса*: для каждого $k \geqslant 1$ мы определим операцию $\psi^k\colon K(X) \to K(X)$, которая на прямых суммах линейных расслоений выглядит так:

$$\psi^k(L_1 \oplus \cdots \oplus L_r) = L_1^k \oplus \cdots \oplus L_r^k.$$

Для этого заметим, что степенные суммы вида $t_1^k+\dots+t_r^k$ выражаются через элементарные симметрические полиномы $\sigma_1,\dots,\sigma_k$ от $t_1,\dots,t_r$:

$$t_1^k+\dots+t_r^k = s_k(\sigma_1(t_1,\dots,t_r),\dots,\sigma_k(t_1,\dots,t_r)).$$

Многочлены s_k называются *многочленами Ньютона*. Таким образом, $\psi^k(L_1\oplus\dots\oplus L_r) = s_k(\Lambda^1(L_1\oplus\dots\oplus L_r),\dots,\Lambda^k(L_1\oplus\dots\oplus L_r))$, где Λ^i обозначает i-ю внешнюю степень. Теперь положим

$$\psi_k(E) = s_k(\Lambda^1(E),\dots,\Lambda^k(E))$$

для всех $E\in K(X)$.

Можно проверить, что построенные операции обладают следующими свойствами:

1. $\psi^k\colon K(X)\to K(X)$ — гомоморфизм колец;
2. $\psi^k f^* = f^*\psi^k$ (иными словами, ψ^k является естественным преобразованием функторов $K(-)\to K(-)$);
3. $\psi^k(L_1\oplus\dots\oplus L_r) = L_1^k\oplus\dots\oplus L_r^k$ для линейных расслоений $L_1,\dots,L_r$;
4. $\psi^k\psi^l=\psi^{kl}$;
5. $\psi^p(x)\equiv x^p \pmod p$ для простого p;
6. $\psi^k\colon \widetilde{K}(S^{2m})\to\widetilde{K}(S^{2m})$ есть умножение на k^m.

Несложное рассуждение (спектральная последовательность Атьи–Хирцебруха) показывает, что $\widetilde{K}(C_f)$ — свободная абелева группа с двумя образующими, которые мы обозначим через t_n и t_{2n}. Можно выбрать их так, что

- ограничение t_n на $\widetilde{K}(S^n)$ является образующей;
- рассмотрим отображение $C_f\to C_f/S^n\cong S^{2n}$; тогда t_{2n} является пулбэком образующей $\widetilde{K}(S^{2n})$.

Тогда $\psi^2(t_n)=2^{n/2}t_n+\mu t_{2n}$ для некоторого $\mu\in\mathbb{Z}$. Более того, μ по модулю 2 совпадает с инвариантом Хопфа. Аналогично, $\psi^k(t_n)=k^{n/2}t_n+\nu(k)t_{2n}$, $\nu(k)\in\mathbb{Z}$, для всех $k\geqslant 1$. Тогда

$$\begin{aligned}\psi^2\psi^k t_n &= \psi^2(k^{n/2}t_n+\nu(k)t_{2n})\\ &= k^{n/2}\psi^2(t_n)+\nu\psi^2(t_{2n})\\ &= k^{n/2}(2^{n/2}t_n+\mu t_{2n})+\nu(k)2^n t_{2n}.\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\psi^k\psi^2 t_n &= \psi^k(2^{n/2}t_n+\mu t_{2n})\\ &= 2^{n/2}\psi^k(t_n)+\mu\psi^k(t_{2n})\\ &= 2^{n/2}(k^{n/2}t_n+\nu(k)t_{2n})+\mu k^n t_{2n}.\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициэнты при t_{2n}, получаем

$$2^{n/2}(2^{n/2}-1)\nu(k)=k^{n/2}(k^{n/2}-1)\mu$$

Предположим, что μ нечетно. Тогда для любого нечетного k выражение $k^{n/2}-1$ должно делиться на $2^{n/2}$. Пусть $n>2$; рассмотрев $k^{n/2}-1$ по модулю 4, получаем, что $n/2$ четно. Подставляя $k=1+2^{n/4}$, получаем, что $(1+2^{n/4})^{n/2}-1$ делится на $2^{n/2}$, откуда $(n/2)\cdot 2^{n/4}$ делится на $2^{n/2}$, откуда $n/2$ делится на $2^{n/4}$, и поэтому $n=4$ или 8.

2 Первые понятия

2.1 Семейства векторных пространств

Определение 2.1.1. Пусть X — топологическое пространство. **Семейством векторных пространств над** X называется непрерывное отображение $p\colon E \to X$ вместе с непрерывными отображениями $E \times_X E \xrightarrow{+} E$, $\mathbb{R} \times E \xrightarrow{\cdot} E$ пространств над X такими, что для каждой точки $x \in X$ прообраз $p^{-1}(x)$ является конечномерным векторным пространством над $\mathbb{R}$ относительно индуцированных операций.

Пространство X называется **базой** семейства, а само семейство обычно обозначается буквой E (мы не указываем в обозначении явно отображения $p, +, \cdot$). Прообраз $p^{-1}(x)$ точки x называется **слоем** расслоения E над точкой x и обозначается через E_x. Таким образом, в определении семейства требуется, чтобы диаграммы

$$\begin{tikzcd} E \times_X E \arrow[rr, "+"] \arrow[dr] & & E \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{R} \times_X E \arrow[rr, "\cdot"] \arrow[dr] & & E \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

были коммутативны, и чтобы индуцированные отображения

$$E_x \times E_x \xrightarrow{+} E_x \qquad \mathbb{R} \times E_x \xrightarrow{\cdot} E_x$$

превращали E_x в конечномерное векторное пространство для каждой точки $x \in X$. Размерность $\dim_{\mathbb{R}}(E_x)$ слоя над точкой x называется **рангом семейства** E **в точке** x и обозначается через $\operatorname{rank}_x(E)$. **Рангом семейства** E называется $\operatorname{rank}(E) = \sup_{x\in X}\{\operatorname{rank}_x(E)\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Замечание 2.1.2. Понятия **морфизма** семейств над фиксированной базой X определяется естественным образом, и мы получаем категорию семейств векторных пространств над X. Несложно определить и понятие **подсемейства** векторных пространств над X.

Пример 2.1.3. Положим $E = X \times \mathbb{R}^n$ и рассмотрим это пространство вместе с проекцией $p\colon E \to X$ на первую координату. Определим операции $+\colon ((x, v), (x, v')) \mapsto (x, v + v')$ и $\cdot\colon (\lambda, (x, v)) \mapsto (x, \lambda v)$; мы получили **тривиальное** семейство векторных пространств над X.

Пример 2.1.4. Пусть $E = \{(x, v) \mid x \in \mathbb{R}^2, v \in \langle x\rangle\} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, и $p\colon E \to \mathbb{R}^2$ — проекция на первую координату. Снова положим $(x, v) + (x, v') = (x, v + v')$ и $\lambda(x, v) = (x, \lambda v)$. Мы получили семейство векторных пространств над $\mathbb{R}^2$. Заметим, что его ранг над точкой $x \neq 0$ равен 1, а $\operatorname{rank}_0(E) = 0$.

Пример 2.1.5. Пусть $X = \mathbb{R}$. Обозначим через e_1, e_2 стандартный базис пространства $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим подмножество $E \subseteq X \times \mathbb{R}^2$, равное объединению подмножеств $\{(x, \lambda e_1) \mid x \in \mathbb{Q}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ и $\{(x, \lambda e_2) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \lambda \in \mathbb{R}\}$. В примере 2.1.3 мы видели, что $X \times \mathbb{R}^2 \to X$ является семейством векторных пространств; нетрудно понять, что E — его подсемейство.

2.2 Векторные расслоения

Определение 2.2.1. Семейство векторных пространств $p\colon E \to X$ называется **векторным расслоением**, если для каждой точки $x \in X$ найдутся окрестность $U \subseteq X$, натуральное число $n \in \mathbb{N}$ и изоморфизм

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr] & & U \times \mathbb{R}^n \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

семейств векторных пространств над U. Такой изоморфизм называется **локальной тривиализацией**; говорят, что векторное расслоение — это **локально тривиальное** семейство векторных пространств.

Замечание 2.2.2. Несложно показать, что ранг векторного расслоения является функцией, постоянной на компонентах связности базы. Векторные расслоения ранга 1 часто называются **линейными расслоениями**.

Замечание 2.2.3. Семейство векторных пространств из примера 2.1.3 являются векторными расслоениями, а вот семейства из примеров 2.1.4 и 2.1.5 — нет.

Пример 2.2.4. Пусть $p\colon E \to X$ — семейство векторных пространств, и $A \subseteq X$ — подпространство. Тогда $p^{-1}(A) \to A$ также является семейством векторных пространств. Оно часто обозначается через $E|_A$ и называется **ограничением** семейства E на подпространство A. Более того, если E — векторное расслоение, то и $E|_A$ будет векторным расслоением.

Определение 2.2.5. Пусть $p\colon E \to X$ — семейство векторных пространств. **Сечением** этого семейства называется (непрерывное) отображение $s\colon X \to E$ такое, что $p \circ s = \mathrm{id}_X$. Множество всех сечений E обозначается через $\Gamma(E)$. Заметим, что сечения E можно (поточечно) складывать и умножать на скаляры. Эти операции превращают $\Gamma(E)$ в векторное пространство. Набор сечений $s_1, \ldots, s_r \in \Gamma(E)$ называется **линейно независимым**, если для каждой точки $x \in X$ векторы $s_1(x), \ldots, s_r(x) \in E_x$ линейно независимы.

Предложение 2.2.6. *Пусть $E \to X$ — семейство векторных пространств постоянного ранга n. Это семейство тривиально тогда и только тогда, когда в $\Gamma(E)$ найдется n линейно независимых сечений.*

Доказательство. Упражнение. □

2.3 Примеры и конструкции

Пример 2.3.1. Пусть $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — изоморфизм векторных пространств. Обозначим $E' = [0,1] \times \mathbb{R}^n$ и профакторизуем E' по следующему отношению эквивалентности: $(0, v) \sim (1, \varphi(v))$. Полученное фактор-пространство обозначим через E. Склеивая точки 0 и 1 отрезка $[0,1]$, получаем окружность S^1 и непрерывное отображение $E \to S^1$, которое, как нетрудно понять, является семейством векторных пространств. Более того, это векторное расслоение. Действительно, у точек S^1, пришедших из точек $x \in [0,1]$, отличных от концов отрезка, мы можем выбрать достаточно маленькую окрестность, не задевающую концы, и получить локальную тривиализацию над этой окрестностью. Если же $x = 0 = 1 \in S^1$, можно определить сечения $s_1, \ldots, s_n$ над некоторой окрестностью x в S^1 следующим образом: пусть $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис $\mathbb{R}^n$. Для $x \in [0, \varepsilon]$ положим $s_i(x) = e_i \in E'_x$, а для $x \in [1-\varepsilon, 1]$ положим $s_i(x) = \varphi(e_i) \in E'_x$. Понятно, что склеивая эти сечения, получаем сечения семейства E над окрестностью точки $0 = 1 \in S^1$ радиуса ε. По предложению 2.2.6 эти сечения дают локальную тривиализацию E над этой окрестностью

В частном случае $n = 1$ и $\varphi\colon x \mapsto -x$ получаем расслоение, называемое **листом Мебиуса**.

Пример 2.3.2. Пусть $X = \mathbb{R}P^n$ и $L = \{(l, v) \mid l \in \mathbb{R}P^n,\ v \in l\} \subseteq X \times \mathbb{R}^{n+1}$ (напомним, что точки $\mathbb{R}P^n$ мы интерпретируем как прямые в $\mathbb{R}^{n+1}$). Мы утверждаем, что такое подсемейство L в тривиальном семействе $X \in \mathbb{R}^{n+1}$ векторных пространств над X является линейным расслоением на X. Для этого нужно предъявить локальную тривиализации в окрестности каждой точки $l \in \mathbb{R}P^n$. Выберем базис $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ такой, что $\langle e_1 \rangle = l$, и рассмотрим подмножество $U \subseteq \mathbb{R}P^n$, состоящее из прямых, ортогональная проекция которых на $\langle e_1 \rangle$ не вырождается в точку. Тогда на каждой такой прямой найдется единственный вектор, переходящий при этой проекции в e_1. Определим $s\colon U \to L$, отправив прямую $x \in U$ в этот единственный вектор в слое L_x. По построению $s(x)$ отлично от нуля, и потому дает тривиализацию семейства $L|_U$.

Построенное векторное расслоение L называется **тавтологическим линейным расслоением на $\mathbb{R}P^n$**.

Пример 2.3.3. Обобщим предыдущий пример: зафиксируем векторное пространство V над $\mathbb{R}$ и натуральное число k, отличное от нуля. Рассмотрим грассманиан $\mathrm{Gr}_k(V)$ подпространств размерности k в V и положим $\eta = \{(W, v) \mid W \in \mathrm{Gr}_k(V),\ v \in W\} \subseteq \mathrm{Gr}_k(V) \times V$. Мы утверждаем, что проекция на первую координату $\eta \to \mathrm{Gr}_k(V)$ превращается η в векторное расслоение над $\mathrm{Gr}_k(V)$ — **тавтологическое расслоение на** $\mathrm{Gr}_k(V)$. Действительно, пусть $W \in \mathrm{Gr}_k(V)$. Рассмотрим подмножество $U \subseteq \mathrm{Gr}_k(V)$ состоящее из всех подпространств, ортогональная проекция которых на W сюръективна (и, следовательно, биективна). Зафиксировав ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_k$ в W, можно определить сечения $s_1, \ldots, s_k$, отправив каждое такое подпространство в [единственный] прообраз базисного вектора e_i. Несложно понять, что мы получили тривиализацию расслоения η в окрестности точки W.

Определение 2.3.4. Пусть $p\colon E \to X$ — семейство векторных пространств, $f\colon Y \to X$ — непрерывное отображение. Рассмотрим расслоенное произведение (топологических пространств) $Y \times_X E$:

$$\begin{tikzcd} Y \times_X E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Такое произведение обозначается через f^*E и называется **пулбэком** семейства E вдоль f. Заметим, что f^*E превращается в семейство векторных пространств над Y посредством сложения $(y, e) + (y, e') = (y, e + e')$ и $r \cdot (y, e) = (y, re)$. Для каждой точки $y \in Y$ возникает естественное отображение векторных пространств $(f^*E)_y \to E_{f(y)}$; нетрудно проверить, что это изоморфизм. Если E — векторное расслоение, то и пулбэк f^*E будет векторным расслоением.

Пример 2.3.5. Если f — вложение подпространства Y в пространство X, то f^*E совпадает с ограничением $E|_Y$ из примера 2.2.4.

Упражнение 2.3.6. *Пусть $M \to S^1$ — лист Мебиуса (см. пример 2.3.1), а $f\colon S^1 \to S^1$ — отображение $z \mapsto z^2$. Проверьте, что $f^*M \cong \underline{1}$.*

Замечание 2.3.7. Пусть X — топологическое пространство, k — натуральное число. Множество классов изоморфизма векторых расслоений на X ранга k мы будем обозначать через $\mathrm{Vect}_k(X)$. Если $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ — цепочка непрерывных отображений, то существует канонический изоморфизм $(g \circ f)^* \cong f^* \circ g^*$. Поэтому Vect_k является контравариантным функтором из категории топологических пространств $\mathfrak{Top}$ в категорию множеств $\mathfrak{Set}$.

Замечание 2.3.8. Все [разумные] конструкции с векторными пространствами переносятся на случай векторных расслоений. Например, если $p\colon E \to X$ и $p'\colon E' \to X$ — два векторных расслоения, то можно определить расслоение $E \oplus E' \to X$, которое как топологическое пространство совпадает с $E \times_X E'$, и слой которого над каждой точкой $x \in X$ равен прямой сумме векторных пространств $E_x \oplus E'_x$. Аналогично определяются тензорные произведения расслоений, двойственные расслоения, Hom-расслоение $\underline{\mathrm{Hom}}(E, E')$, внешние степени $\Lambda^i(E)$, и так далее. Мы для примера обсудим только построение $E \times E'$.

Положим $E \otimes E' = \{(x, v) \mid x \in X,\ v \in E_x \otimes E'_x\}$. Понятно, как ввести теперь необходимые операции на слоях; осталось определить на этом множестве топологию (и проверить, что операции непрерывны в ней). Отметим, что это локальный вопрос. Для точки $x \in X$ выберем окрестность U точки x, над которой и E, и E' тривиализуются. Выберем изоморфизмы $\varphi\colon U \times \mathbb{R}^k \to E|_U$ и $\varphi'\colon U \times \mathbb{R}^l \to E'|_U$. Они склеиваются в биективное отображение $U \times (\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l) \to (E \otimes E')|_U$, которое на каждом слое является изоморфизмом векторных пространств. Действительно, достаточно отправить пару $(u, v \otimes w)$ в $(u, \varphi(u, v) \otimes \varphi'(u, w))$ и продолжить результат по линейности. Но $U \times (\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l)$ является топологическим пространством; эту топологию теперь можно перенести на $(E \otimes E')|_U$.

Замечание 2.3.9. Пусть $E \to X$, $F \to Y$ — два векторных расслоения, но над [возможно] разными пространствами. Можно построить **внешнюю прямую сумму** $E \hat{\oplus} F \to X \times Y$, слой которой над точкой (x, y) равен $E_x \oplus F_y$. Как топологическое пространство, это просто $E \times F$; операции определяются очевидным образом. Заметим, что это расслоение канонически изоморфно $\pi_1^*(E) \oplus \pi_2^*(F)$, где $\pi_1\colon X \times Y \to X$, $\pi_2\colon X \times Y \to Y$ — канонические проекции.

2.4 Склейка

Замечание 2.4.1. Напомним факт из общей топологии. Пусть X — топологическое пространство, и пусть $A, B \subseteq X$ — подпространства такие, что $A \cup B = X$. Пусть заданы непрерывные отображения $f_A\colon A \to Y$ и $f_B\colon B \to Y$, согласованные на $A \cap B$. Их можно «склеить» и получить непрерывное отображение $f\colon X \to Y$, если выполнено одно из следующих двух условий:

1. A и B открыты;

2. A и B замкнуты.

Предложение 2.4.2. *Пусть $E \to X$ — семейство векторных пространств.*

1. *Если $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие пространства X, и каждое $E|_{U_\alpha}$ является векторным расслоением, то и E — векторное расслоение.*

2. *Пусть $X = A \cup B$ — покрытие пространства X замкнутыми подпространствами. Предположим, что для любой точки $x \in A \cap B$ и для любой открытой окрестности $U \subseteq X$ точки x существует окрестность $V \subseteq U$ точки x такая, что у вложения $V \cap A \cap B \hookrightarrow V \cap B$ есть ретракция. Если $E|_A$ и $E|_B$ — векторные расслоения, то и E — векторное расслоение.*

Доказательство. Первая часть очевидна, поэтому мы докажем вторую. Для точки $x \in X$ нам нужно предъявить локальную тривиализацию семейства E. Возможны три случая: $x \in X \setminus A$, $x \in \setminus B$, $x A \cap B$. Если $x \in X \setminus B$, то $x \in A$. Существует открытое подмножество $U \subseteq X$, содержащее x, такое, что $E|_A$ тривиализуется над $U \cap A$. Рассмотрим открытое подмножество $V = U \cap (X \setminus B) \subseteq X$. Оно содержит точку x и содержится в $U \cap A$; поэтому E тривиализуется над V. Случай $x \in X \setminus A$ рассматривается аналогично.

Наконец, пусть $x \in A \cap B$. Снова найдется открытое подмножество $U \subseteq X$, содержащее точку x, такое, что $E|_A$ тривиализуется над $U \cap A$. Поэтому на $U \cap A$ определен набор линейно независимых сечений $s_1, \ldots, s_n$ семейства $E|_A$, где n равно рангу этого семейства в каждой точке $U \cap A$. По нашему предположению существует окрестность $U' \subseteq U$ точки x такая, что вложение $U' \cap A \cap B \hookrightarrow U' \cap B$ обладает ретракцией $p\colon U' \cap B \to U' \cap A \cap B$. Рассмотрим композицию этой ретракции с сечениями $s_i|_{U' \cap A \cap B}$; получим линейно независимые сечения $s'_1, \ldots, s'_n$ семейства E над $U' \cap B$. Теперь мы можем склеить сечение $s_i|_{U' \cap A}$

с сечением $s_i'|_{U'\cap B}$ и получить сечение t_i расслоения E на U'. Такие сечения линейно независимы, и мы получили тривиализацию E на U'. □

Следствие 2.4.3. *Пусть $X = A \cup B$ — покрытие топологического пространства X. Пусть заданы векторные расслоения $E_A \to A$ и $E_B \to B$ вместе с изоморфизмом векторных расслоений $\varphi\colon E_A|_{A\cap B} \to E_B|_{A\cap B}$. Предположим, что выполняется одно из следующих условий:*

1. *A и B открыты;*

2. *A и B замкнуты, и для любой точки $x \in A\cap B$ и для любой открытой окрестности $U \subseteq X$ точки x существует окрестность $V \subseteq U$ точки x такая, что у вложения $V\cap A\cap B \hookrightarrow V\cap B$ есть ретракция.*

Тогда существует единственное векторное расслоение $E \to X$ такое, что $E|_A \cong E_A$ и $E|_B \cong E_B$, и эти два изоморфизма согласованы с φ.

Доказательство. Склеим семейства векторных пространств E_A и E_B вдоль изоморфизма φ; по предложению 2.4.2 то, что получится, будет векторным расслоением. □

Замечание 2.4.4. Следствие 2.4.3 можно обобщить на произвольные открытые покрытия, но нужно действовать аккуратно. Пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие пространства X, и пусть дан набор векторных расслоений $E_\alpha \to U_\alpha$. Предположим, что для каждой пары индексов (α,β) задан изоморфизм

$$\varphi_{\beta,\alpha}\colon E_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} \xrightarrow{\cong} E_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}.$$

Рассмотрим фактор-пространство $\coprod_\alpha E_\alpha$ по отношению эквивалентности, порожденному $(\alpha, v_\alpha) \sim (\beta, \varphi_{\beta,\alpha}(v_\alpha))$ для всех пар (α,β). Нетрудно понять, что если мы хотим, чтобы $E|_{U_\alpha}$ было изоморфно E_α, нужно потребовать выполнения следующих условий:

1. $\varphi_{\alpha,\alpha} = \mathrm{id}$;

2. (**условие коцикла**:) $\varphi_{\gamma,\beta}\circ\varphi_{\beta,\alpha}$ и $\varphi_{\gamma,\alpha}$ совпадают на $E_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma}$.

В частности, предположим, что все E_α — тривиальные векторные расслоения ранга n. Тогда задание изоморфизмов $\varphi_{\alpha,\beta}$ равносильно заданию набора отображений $g_{\alpha,\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL_n(\mathbb{R})$. Эти отображения называются **функциями перехода**. Условие коцикла для $\varphi_{\alpha,\beta}$ тогда превращается в условие на то, что функции перехода вместе дают 1-коцикл Чеха со значениями в группе $GL_n(\mathbb{R})$ (а первое условие — нормализация). Несложно понять, что элементы группы когомологий Чеха $H^1(\{U_\alpha\}; GL_n(\mathbb{R}))$ биективно соответствуют классам изоморфизм векторных расслоений на X, тривиализуемых на $\{U_\alpha\}$. Если взять прямой предел по всем открытым покрытиям, то мы получим биекцию между элементами группы $H^1(X; GL_n(\mathbb{R}))$ и классами изоморфизма векторных расслоений на X. Мы вернемся к этим биекциям позже.

Замечание 2.4.5. В замечании 2.3.8 мы намекнули, что по векторному расслоению $E \to X$ можно построить двойственное расслоение E^*. Теоретико-множественно $E^* = \{(x,v) \mid x \in X,\ v \in E_x^*$. Выберем открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства X, над элементами которого E тривиализуемо. Выбрав тривиализацию над каждым U_α, мы получим набор отображений склейки $\varphi_{\alpha,\beta}$. Исходное расслоение E, разумеется, изоморфно результату склейки тривиальных расслоений $E_\alpha = U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ с помощью этих отображений. Тогда двойственное расслоение E_α^* склеено из тривиальных расслоений $U_\alpha \times (\mathbb{R}^n)^*$ с помощью двойственных к этим отображениям: $\psi_{\beta,\alpha} = (\varphi_{\alpha,\beta})^*$. Позже мы увидим, что для вещественных векторных расслоений над паракомпактным хаусдорфовым пространством двойственное расслоение изоморфно исходному (не каноническим образом). Это не так для комплексных и кватернионных расслоений.

Определение 2.4.6. Пусть $L \to \mathbb{C}P^n$ — тавтологическое комплексное линейное расслоение над проективным пространством $\mathbb{C}P^n$. Двойственное к нему расслоение (в смысле комплексных расслоений) L^* называется **каноническим линейным расслоением**

Замечание 2.4.7. В алгебраической геометрии видна огромная разница между L и L^*. Дело в том, что на L^* имеются естественно определенные сечения, в отличие от L. Действительно, над точкой $z = [z_0 : \dots z_n] \in \mathbb{C}P^n$ висит комплексная прямая $L_z \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$, натянутая на $(z_0, \dots, z_n)$. Как выбрать на этой прямой [ненулевую] точку — не очень понятно. Но легко выбрать функционал на L_z: например, там есть функционал φ_i, отправляющий точку $(z_0, \dots, z_n)$ в z_i. Этот функционал не зависит от выбора конкретного представителя $(z_0, \dots, z_n)$ точки $z \in \mathbb{C}P^n$.

Разумеется, на L тоже есть много сечений, но их нельзя задать простыми формулами. А именно, на L^* есть алгебраические сечения, а на L их нет. В алгебраической геометрии расслоение L^* обычно обозначается через $\mathcal{O}(1)$, а L — через $\mathcal{O}(-1)$.

2.5 Скалярные произведения

Определение 2.5.1. Пусть $E \to X$ — вещественное векторное расслоение. **Скалярным произведением** на E называется морфизм векторных расслоений $E \otimes E \to \underline{1}$, который на каждом слое E_x индуцирует положительно определенную симметричную билинейную форму. Векторное расслоение с заданным на нем скалярным произведением обычно называется **ортогональным векторным расслоением**.

Замечание 2.5.2. Аналогично вводится понятие эрмитового скалярного произведение на комплексном векторном расслоении (нужно быть внимательным: использовать тензорное произведение не получится).

Предложение 2.5.3. *Пусть X — паракомпактное хаусдорфово пространство. На любом вещественном векторном расслоении на X можно задать скалярное произведение. На любом комплексном векторном расслоении на X можно задать эрмитово скалярное произведение.*

Доказательство. Пусть $E \to X$ — вещественное векторное расслоение. Выберем покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства X и тривиализации $f_\alpha \colon E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\sim} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$. Введем на $\mathbb{R}^n$ стандартное эвклидово скалярное произведение и перенесем его на $E|_{U_\alpha}$ посредством изоморфизма f_α.

Пусть $x \in X$. Мы хотели бы определить скалярное произведение на слое E_x. Проблема в том, что точка x могла попасть в несколько элементов покрытия $\{U_\alpha\}$, и каждое из них задает некоторое скалярное произведение на E_x. Решение состоит в том, чтобы усреднить их посредством разбиением единицы (здесь мы пользуемся условием на пространство).

А именно, пусть $\{\varphi_\alpha\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию U_α. Для каждой точки $x \in X$ и для векторов $v, w \in E_x$ положим теперь

$$\langle v, w \rangle = \sum_\alpha \varphi_\alpha(x) \cdot \langle v, w \rangle_\alpha,$$

где через $\langle -, - \rangle$ обозначено скалярное произведение на E_x, индуцированное с $E|_{U_\alpha}$. Нетрудно понять, что мы получили нужное скалярное произведение на E.

Доказательство для эрмитового скалярного произведения совершенно аналогично. $\square$

Следствие 2.5.4. *Пусть $E \to X$ — вещественное векторное расслоение на паракомпактном хаусдорфовом пространстве. Тогда E изоморфно E^*.*

Доказательство. Снабдим E скалярным произведением $E \otimes E \to \underline{1}$ и рассмотрим сопряженный морфизм $E \to E^*$. Поскольку на каждом слое скалярное произведение невырожденно, мы получили изоморфизмы на слоях. □

Упражнение 2.5.5. *Объясните, почему следствие 2.5.4 не выполняется для комплексных векторных расслоений. Подробнее: любое комплексное векторное пространство можно снабдить невырожденной симметрической билинейной формой. Однако, из этого не следует, что любое комплексное векторное расслоение можно снабдить такой формой.*

Предложение 2.5.6. *Пусть X — топологическое пространство. Любое скалярное произведение на тривиальном векторном расслоении $X \times \mathbb{R}^n \to X$ изоморфно постоянному скалярному произведению, которое на каждом слое совпадает со стандартным.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис $\mathbb{R}^n$. Скалярные произведения на $\mathbb{R}^n$ биективно соответствуют симметричным положительно определенным матрицам (у скалярного произведения есть матрица Грама). Обозначим множество таких матриц через $M^{sym,+}$. Задание скалярного произведения на $X \times \mathbb{R}^n$, таким образом, равносильно заданию отображения $X \to M^{sym,+}$. Понятно, что $GL_n(\mathbb{R})$ действует на множестве скалярных произведений, и, следовательно, на $M^{sym,+}$. А именно, если $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $A \in M^{sym,+}$, то $P.A = PAP^T$. Каждое скалярное произведение обладает ортонормированным базиом, поэтому $M^{sym,+}$ совпадает с орбитой единичной матрицы E_n относительно этого действия. Стабилизатор единичной матрицы — это ортогональная группа O_n. Мы получили изоморфизм $GL_n(\mathbb{R})/O_n \cong M^{sym,+}$.

Заметим, что $GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})/O_n$ отправляет P в $PE_nP^T = PP^T$ и является расслоением со слоем O_n. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта говорит нам, что вложение $O_n \to GL_n(\mathbb{R})$ — гомотопическая эквивалентность. Поэтому $GL_n(\mathbb{R})/O_n$ слабо стягиваемо. Нетрудно понять, что это однородное пространство снабжается структурой CW-комплекса. Получаем, что существует поднятие

$$\begin{tikzcd} & GL_n(\mathbb{R}) \arrow[d] \\ GL_n(\mathbb{R})/O_n \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, dotted, "r"] & GL_n(\mathbb{R})/O_n \end{tikzcd}$$

Вспомним, что задание скалярного произведения на $X \times \mathbb{R}^n$ равносильно заданию отображения $X \to GL_n(\mathbb{R})/O_n$. После композиции с r получаем отображение $X \to GL_n(\mathbb{R})$. Оно задает изоморфизм векторных расслоений $X \times \mathbb{R}^n \to X \times \mathbb{R}^n$. Нетрудно понять, что оно и устанавливает изоморфизм между заданным скалярным произведением и стандартным. □

Замечание 2.5.7 (Редукция структурной группы). Пусть $E \to X$ — вещественное векторное расслоение на X ранга n, и пусть на нем выбрано скалярное произведение. Выберем тривиализующее открытое покрытие $X = \bigcup U_\alpha$ и посмотрим на тривиализации

$$f_\alpha \colon E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n.$$

На расслоении $E|_{U_\alpha} \to U_\alpha$ имеется скалярное произведение, полученное ограничением с $E \to X$. С помощью изоморфизма f_α это скалярное произведение можно перенести на

$U_\alpha \times \mathbb{R}^n$. По предложению 2.5.6 это скалярное произведение изоморфно стандартному. Поэтому можно считать (после композиции f_α с автоморфизмом тривиального расслоения), что f_α сохраняет скалярное произведение, где $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ рассматривается со стандартным скалярным произведением. Это, в свою очередь, означает, что функции перехода

$$g_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL_n(\mathbb{R})$$

на самом деле попадают в подгруппу ортогональных матриц $O_n(\mathbb{R})$. Этот процесс обычно называется *редукцией структурной группы.*

Вообще, если векторное расслоение склеено из тривиальных таким образом, что все функции перехода пропускаются через подгруппу $G \leqslant GL_n(\mathbb{R})$, то говорят, что G — *структурная группа* этого расслоения.

Замечание 2.5.8. Поскольку любое вещественное векторное расслоение можно снабдить скалярным произведением, замечание 2.5.7 показывает, что структурную группу можно всегда редуцировать до ортогональной. Это дает нам следующее альтернативное доказательство следствия 2.5.4. Расслоение $E \to X$, таким образом, склеивается из тривиальных расслоений $E_\alpha = U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to U_\alpha$ посредством функций перехода

$$g_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to O_n(\mathbb{R}).$$

Но, как мы знаем, двойственное расслоение E^* склеивается из тривиальных расслоений $U_\alpha \times (\mathbb{R}^n)^*$ посредством функций перехода

$$h_{\beta\alpha} = g^*_{\alpha\beta}.$$

Это означает, что $h_{\beta\alpha}(x) = g_{\alpha\beta}(x)^T$ (если мы отождествим пространство $\mathbb{R}^n$ с двойственным $(\mathbb{R}^n)^*$ посредством стандартного скалярного произведения). С другой стороны, из ортогональности матриц $g_{\alpha\beta}(x)$ следует, что $g_{\alpha\beta}(x)^T = g_{\alpha\beta}(x)^{-1}$, и потому

$$h_{\beta\alpha}(x) = g_{\alpha\beta}(x)^T = g_{\alpha\beta}(x)^{-1} = g_{\beta\alpha}(x).$$

Таким образом, расслоения E и E^* получаются склейкой из одинаковых тривиальных расслоений посредством одинаковых функций перехода.

Пример 2.5.9. Приведем пример комплексного векторного расслоения, не изоморфного своему двойственному. Пусть D_+, D_- — верхняя и нижняя полусферы на S^2, а $D_+ \cap D_- = S^1 \cong \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. По непрерывному отображению $f \colon S^1 \to GL_n(\mathbb{C})$ мы можем построить комплексное векторное расслоение на S^2, склеив тривиальные расслоения $\underline{n}_{D_+}$ и $\underline{n}_{D_-}$ с помощью f. Иными словами, для каждой точки $z \in S^1$ вектор $v \in (\underline{n}_{D_+})_z$ склеивается с вектором $f(z)(v) \in (\underline{n}_{D_0})_z$ (см. вторую часть следствия 2.4.3). Обозначим полученное расслоение через $E(f)$.

Когда два таких расслоения изоморфны? Задание изоморфизма $E(f) \to E(g)$ равносильно заданию отображений $A \colon D_+ \to GL_n(\mathbb{C})$ и $B \colon D_- \to GL_n(\mathbb{C})$ таких, что $g(z)A(z) = B(z)f(z)$ для всех $z \in S^1$; что в свою очередь равносильно тому, что $A(z) = g(z)^{-1}B(z)f(z)$ Заметим, что отображение $B|_{S^1} \to GL_n(\mathbb{C})$ гомотопно постоянному отображению в единицу, поскольку оно продолжается до отображения из стягиваемого пространства D_-. Поэтому отображение $z \mapsto g(z)^{-1}B(z)f(z)$ гомотопно отображению $z \mapsto g(z)^{-1}f(z)$. С другой стороны, отображение $A|_{S^1}$ тоже гомотопно постоянному отображению в единицу, поскольку оно продолжается до отображения из D_+. Мы получили, что из наличия изоморфизма $E(f) \cong E(g)$ следует, что отображение $z \mapsto g(z)^{-1}f(z)$ гомотопно тождественному.

Заметим теперь, что двойственным к расслоению $E(f)$ является $E(f')$, где $f'(z) = (f(z))^{-T}$. Значит, если $E(f)$ изоморфно своему двойственному, то отображение $z \mapsto f(z)^T f(z)$ гомотопно постоянному.

Рассмотрим конкретное отображение: $f(z) = z$. Мы знаем, что отображение $z \mapsto z^2$ не гомотопно постоянному. Поэтому $E(f)$ не изоморфно своему двойственному.

Упражнение 2.5.10. *Покажите, что* $E(f)$ *из примера 2.5.9 — это тавтологическое линейное расслоение* $L \to \mathbb{C}P^1$.

2.6 Теорема Суона

Определение 2.6.1. Пусть X — топологическое пространство. Обозначим через $C(X)$ кольцо непрерывных функций из X в $\mathbb{R}$ с поточечными операциями сложения и умножения. Напомним, что для векторного расслоения $E \to X$ мы обозначали через $\Gamma(E)$ векторное пространство сечений этого расслоения. Нетрудно видеть, что $\Gamma(E)$ является еще и модулем над $C(X)$: можно умножить функцию $f \in C(X)$ на сечение $s \in \Gamma(E)$ и получить сечение $fs\colon x \mapsto f(x)s(x)$. Сопоставление $E \mapsto \Gamma(E)$ задает функтор из категории векторных расслоений на X в категорию $C(X)$-модулей.

Упражнение 2.6.2. *Функтор* Γ *точен слева: если* $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ *— точная последовательность семейств векторных пространств, то* $0 \to \Gamma(E') \to \Gamma(E) \to \Gamma(E'')$ *— точная последовательность* $C(X)$*-модулей.*

Предложение 2.6.3. *Пусть* X *— компактное хаусдорфово пространство,* E *— векторное расслоение на* X*. Тогда* $\Gamma(E)$ *— конечно порожденный проективный* $C(X)$*-модуль.*

Доказательство. Доказательство опирается на несколько внешних фактов про векторные расслоения:

- Мы можем вложить E в тривиальное расслоение $\underline{N}$.
- Фактор $Q = \underline{N}/E$ также является векторным расслоением.
- Каноническая проекция $\underline{N} \to Q$ расщепляется.

Мы получили точную последовательность $0 \to E \to N \to Q \to 0$ векторных расслоений на X. Применяя функтор Γ, получаем точную последовательность $C(X)$-модулей $0 \to \Gamma(E) \to \Gamma(\underline{N}) \to \Gamma(Q)$. Расщепление проекции $\underline{N} \to Q$ показывает, что $\Gamma(\underline{N}) \to \Gamma(Q)$ — расщепляющийся эпиморфизм. Поэтому $\Gamma(E) \oplus \Gamma(Q) \cong \Gamma(\underline{N}) = C(X)^n$. Таким образом, $\Gamma(E)$ оказался прямым слагаемым свободного модуля конечного ранга, а потому является конечно порожденным проективным модулем. $\square$

Теорема 2.6.4 (Теорема Суона). *Пусть* X *— компактное хаусдорфово пространство. Тогда функтор* Γ *устанавливает эквивалентность между категорией векторных расслоений на* X *и категорией конечно порожденных проективных* $C(X)$*-модулей.*

Доказательство. Мы докажем лишь, что функтор Γ сюръективен на классах изоморфизма, то есть, что каждый конечно порожденный проективный $C(X)$-модуль изоморфен модулю вида $\Gamma(E)$ для некоторого векторного расслоения E.

Пусть P — конечно порожденный проективный модуль над $C(X)$. Выберем сюръекцию $p\colon C(X)^n \to P$ и ее расщепление χ. Положим $e = \chi p$. Из равенства $p\chi = \mathrm{id}$ следует, что $e^2 = e$ и $P \cong \mathrm{Im}(e)$.

Эндоморфизм $e\colon C(X)^n \to C(X)^n$ представляется матрицей $\{e_{ij}\}$ размера $n \times n$, где все $e_{ij} \in C(X)$. Каждую точку $x \in X$ мы можем подставить в такую матрицу и получить матрицу $e(x) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Рассмотрим морфизм векторных расслоений

$$\begin{aligned} \alpha\colon \mathbb{R}^n \times X &\to \mathbb{R}^n \times X, \\ (v, x) &\mapsto e(x)\cdot v. \end{aligned}$$

В силу идемпотентности e получим точную последовательность

$$\underline{n} \xrightarrow{\alpha} \underline{n} \xrightarrow{1-\alpha} \underline{n}$$

векторных расслоений на X. Обозначим $E = \mathrm{Im}(\alpha)$; прямая проверка показывает, что $\Gamma(E) \cong P$. $\square$

2.7 Гомотопическая инвариантность

Для каждого натурального n обозначим через $\mathrm{Vect}_n(X)$ множество классов изоморфизма векторных расслоений на X. Наша цель — показать, что это гомотопический инвариант пространства X.

Пусть $i_0, i_1\colon X \to X \times I$ — вложения, полученные из вложений граничных точек в отрезок $[0,1]$.

Теорема 2.7.1. *Пусть X — паракомпактное пространство, $E \to X \times I$ — векторное расслоение. Тогда $i_0^*(E) \cong i_1^*(E)$.*

Следствие 2.7.2.

1. *Если отображения $f, g\colon X \to Y$ гомотопны, то отображения $f^*, g^*\colon \mathrm{Vect}_n(Y) \to \mathrm{Vect}_n(X)$ совпадают.*

2. *Если $f\colon X \to Y$ — гомотопическая эквивалентность, то $f^*\colon \mathrm{Vect}_n(Y) \to \mathrm{Vect}_n(X)$ — биекция.*

3. *Если X стягиваемо, то каждое векторное расслоение на X изоморфно тривиальному.*

Доказательство. Пусть $H\colon X \times I \to Y$ — гомотопия между f и g. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Vect}_n(X) \\
\mathrm{Vect}_n(Y) \arrow[r, "H^*"] \arrow[urr, bend left, "f^*"] \arrow[drr, bend right, "g^*"'] & \mathrm{Vect}_n(X \times I) \arrow[ur, "i_0^*"'] \arrow[dr, "i_1^*"] & \\
 & & \mathrm{Vect}_n(X)
\end{tikzcd}$$

По теореме 2.7.1 $i_0^* = i_1^*$. Поэтому $f^* = g^*$. Остальные утверждения тривиально следуют из первого. $\square$

Пример 2.7.3. Попробуем описать векторные расслоения на S^1. Разделим S^1 на верхнюю и нижнюю полуокружности D_+ и D_-, пересекающиеся в двух точках. Каждая из них стягиваема, поэтому любое векторное расслоение после ограничения на любую из них становится тривиальным.

Пусть $\alpha, \beta \in GL_n(\mathbb{R})$. Рассмотрим векторные расслоения $\underline{n}_{D_+}$ и $\underline{n}_{D_-}$ и склеим их с помощью α в одной точке и β в другой. Полученное расслоение на S^1 обозначим через $E_n(\alpha, \beta)$. Понятно, что каждое векторное расслоение на S^1 имеет такой вид.

Например, $E_n(\mathrm{id}, \mathrm{id}) = \underline{n}$, $E_1(\mathrm{id}, -1) = M$ — расслоение Мебиуса. Покажем, что

1. $E_n(\alpha, \beta) \cong E_n(\mathrm{id}, \alpha^{-1}, \beta)$;

2. если β и β' лежат в одной компоненте линейной связности $GL_n(\mathbb{R})$, то $E_n(\mathrm{id}, \beta) \cong E_n(\mathrm{id}, \beta')$.

Мы знаем, что у $GL_n(\mathbb{R})$ ровно две компоненты связности, поэтому принадлежность β и β' одной компоненте равносильна тому, что $\det(\beta)$ и $\det(\beta')$ имеют один знак.

Для этого заметим сначала, что построение изоморфизма между расслоениями $E_n(\alpha, \beta)$ и $E_n(\alpha', \beta')$ означает построение отображений $f\colon D_+ \to GL_n(\mathbb{R})$ и $g\colon D_- \to GL_n(\mathbb{R})$, которые на каждом слое являются изоморфизмами, с условиями согласованности: $\alpha' f(-1) = g(-1)\alpha$, $\beta' f(1) = g(1)\beta$.

1. В первом пункте условия согласованности превращаются в $g(-1)\alpha = f(-1)$, $\alpha^{-1}\beta f(1) = g(1)\beta$. Можно взять $f(t) = \mathrm{id}$ и $g(t) = \alpha^{-1}$ для всех t.

2. Теперь нам нужно добиться равенств $g(-1) = f(-1)$ и $\beta' f(1) = g(1)\beta$. Склеим D_+ и D_- по точке -1 и отождествим полученный отрезок с $[0, 1]$; теперь мы хотим построить отображение $h\colon [0, 1] \to GL_n(\mathbb{R})$ такое, что $\beta' h(1) = h(0)\beta$.

   Если β, β' лежат в одной компоненте линейной связности, то между ними есть путь $h\colon [0, 1] \to GL_n(\mathbb{R})$ такой, что $h(0) = \beta'$ и $h(1) = \beta$. Ровно этот путь подходит нам. Обратно, если h таково, что $\beta' h(1) = h(0)\beta$, то $\beta' = h(0)\beta h(1)^{-1}$. Отображение в правой части гомотопно $h(0)\beta h(0)^{-1}$ посредством гомотопии $t \mapsto h(0)\beta h(t)^{-1}$. Но $h(0)\beta h(0)^{-1}$ лежит в той же компоненте связности, что и β, поскольку у них одинаковый определитель. Поэтому β' и β также лежат в одной компоненте.

Мы получили, что классы изоморфизма векторных расслоений ранга 1 на S^1 биективно соответствуют компонентам связности $GL_n(\mathbb{R})$. Для $n > 0$ таких компоненты ровно две: в одной лежит единичная матрица, а в другой — матрица $J = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$. Им соответствуют расслоения $\underline{n}$ и $M \oplus \underline{(n-1)}$.

Доказательство теоремы 2.7.1. Выберем точку $x \in X$. Мы можем найти открытую окрестность $U \subseteq X$ точки x и числа $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{m-1} < a_m = 1$ такие, что ограничение E на $U \times [a_i, a_{i+1}]$ тривиально. После склейки получаем тривиализацию расслоения $E|_{U \times I}$.

Предположим, что X компактно. Тогда мы можем покрыть X открытыми множествами $U_1, \ldots, U_n$ так, что $E|_{U_i \times I}$ тривиально для всех i. Зафиксируем эти тривиализации и выберем разбиение единицы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, подчиненное этому покрытию. Рассмотрим его частичные суммы $\beta_i = \varphi_1 + \cdots + \varphi_i$. Пусть $X_i \subseteq X \times I$ — график отображения X_i. Заметим, что $\beta_0 = 0$, $\beta_n = 1$, и потому $X_0 = X \times \{0\}$, $X_1 = X \times \{1\}$.

Гомеоморфизмы $X \to X_i$, $x \mapsto (x, \beta_i(x))$ позволяют отождествить каждое X_i с X. Композиции этих гомеоморфизмов (и обратных к ним) дает гомеоморфизмы $f_i\colon X_i \to X_{i-1}$.

Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} E|_{X_i} \arrow[r] \arrow[d] & E|_{X_{i-1}} \arrow[d] \\ X_i \arrow[r, "f_i"] & X_{i-1}. \end{tikzcd}$$

Здесь мы используем тот факт, что X_i совпадает с X_{i-1} вне U_i, а $E|_{U_i}$ тривиально. Полученные отображения $E|_{X_i} \to E|_{X_{i-1}}$ устанавливают изоморфизмы на каждом слое. Каждое $E|_{X_i}$ можно рассматривать как расслоение на X; мы получаем изоморфизмы

$$i_1^*(E) = E|_{X_n} \xrightarrow{\sim} E|_{X_{n-1}} \xrightarrow{\sim} \ldots \xrightarrow{\sim} E|_{X_1} \xrightarrow{\sim} E|_{X_0} = i_0^*(E),$$

что и требовалось.

Для паракомпактного пространства рассуждение примерно то же — но покрытие становится бесконечным вместо конечного (детали см. в [?]). □

Замечание 2.7.4. Изоморфизм $i_0^*(E) \cong i_1^*(E)$ из теоремы 2.7.1 не является каноническим.

Замечание 2.7.5. Если пространство X стягиваемо, то все векторные расслоения на X тривиальны. Пусть k — произвольное поле. Кольцо многочленов $k[x_1, \ldots, x_n]$ является алгебраическим аналогом кольца функций на аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$, поэтому проективные модули над этим кольцом является алгебраическими аналогами векторных расслоений. Серр предположил, что все конечно порожденные проективные модули над $k[x_1, \ldots, x_n]$ свободны; в 1976 год Даниэль Квиллен и Андрей Суслин (независимо друг от друга) доказали это.

Замечание 2.7.6. Мы доказали, что если E — векторное расслоение на $X \times I$, то $i_0^*(E) \cong i_1^*(E)$. Естественно поставить вопрос: верно ли обратное? Точная формулировка такого вопроса, впрочем, не очевидна.

- Пусть F, F' — изоморфные векторные расслоения на X. Верно ли, что существует векторное расслоение E на $X \times I$ такое, что $i_0^*(E) \cong F$ и $i_1^*(E) \cong F'$? К сожалению, у такого вопроса есть тривиальный ответ: пусть $\pi\colon X \times I \to X$ — проекция на первый сомножитель. Тогда можно взять $E = \pi^*(F)$ и получить, что $i_0^*(E) = F$, $i_1^*(E) = F \cong F'$.

- Вот еще одна попытка: пусть F, F' — изоморфные векторные расслоения на X. Верно ли, что существует векторное расслоение E на $X \times I$ такое, что $i_0^*(E) = F$ и $i_1^*(E) = F'$? Ответ на этот вопрос уже не очевиден, но примерно понятно, что это не тот вопрос, который уместно задавать в приличном обществе. Проблема в том, что сложно говорить о буквальном *равенстве* двух абстрактных математических объектов. Такой разговор заставляет нас явно следить за всеми подразумеваемыми отождествлениями и умолчаниями. Например, уже в этой формулировке содержится неточность: $i_0^*(E)$ является расслоением на $X \times \{0\}$, а $i_1^*(E)$ — расслоением на $X \times \{1\}$, поэтому они могут быть равны только после явного учета отождествления этих двух пространств.

- Более адекватный способ состоит в том, чтобы ограничиться рассмотрением только тех расслоений, для которых понятие «равенства» проще контролировать. Например, можно рассматривать те векторные расслоения на X, которые живут внутри $X \times \mathbb{R}^\infty$. Более точно, нас интересуют топологические подпространства в $X \times \mathbb{R}^\infty$, которые вместе с ограничением проекции на X являются векторными расслоениями. Теперь мы можем сформулировать такой вопрос: пусть F, F' — векторные расслоения внутри $X \times \mathbb{R}^\infty$, которые изоморфны (в абстрактном смысле). Верно ли, что существует векторное расслоение на $X \times I$, сидящее внутри $(X \times I) \times \mathbb{R}^\infty$, которое при ограничении на $X \times \{0\} \times \mathbb{R}^\infty$ и на $X \times \{1\} \times \mathbb{R}^\infty$ дает F и F', соответственно? Разумеется, здесь также имеется в виду отождествление X с $X \times \{0\}$ и $X \times \{1\}$. Ниже мы увидим, что ответ на этот вопрос положителен.

2.8 Классифицирующие пространства

Неформально говоря, векторное расслоение на X (скажем, фиксированного ранга n) — это семейство векторных пространств, проиндексированное точками $x \in X$, которые непрерывно деформируются при движении точки x. Вообще, можно рассматривать семейство объектов некоторого рода, параметризованных точками $x \in X$, и непрерывно зависящих от x. Естественно надеяться, что такие семейства биективно соответствуют отображениям из X в некоторое «пространство модулей» рассматриваемых объектов: каждой точке $x \in X$ мы сопоставляем тот объект, который проиндексирован этой точкой, и хочется верить, что это отображение непрерывно (относительно какой-то разумной топологии на пространстве модулей). В таком виде, впрочем, эта идея слишком наивна: семейства векторных расслоений ранга n над точкой тогда должны соответствовать точкам нашего пространства модулей, но такое векторное расслоение ровно одно. Поэтому идею нужно слегка модифицировать, рассматривая не отображения, а их гомотопические классы.

Пусть $V \subseteq W$ — подпространство векторного пространства над $\mathbb{R}$. Имеется соответствующее вложение грассманианов $\mathrm{Gr}_n(V) \hookrightarrow \mathrm{Gr}_n(W)$. Рассмотрим цепочку вложений $\mathbb{R}^0 \subseteq \mathbb{R}^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \ldots$; получим цепочку вложений грассманианов вида $\mathrm{Gr}_n(\mathbb{R}^k) \hookrightarrow \mathrm{Gr}_n(\mathbb{R}^{k+1})$. Посмотрим на объединение этих грассманианов (говоря научным языком, копредел этой цепочки вложений):

$$\mathrm{Gr}_n(\mathbb{R}^\infty) = \mathrm{colim}_{k\to\infty}\, \mathrm{Gr}_n(\mathbb{R}^k).$$

Мы получили топологическое пространство $\mathrm{Gr}_n(\mathbb{R}^\infty)$, которое называется **бесконечным грассманианом**. Определим на нем векторное расслоение $\gamma_n \to \mathrm{Gr}_n(\mathbb{R}^\infty)$, положив

$$\gamma_n = \{(V, x) \mid V \subseteq \mathbb{R}^\infty,\ \dim(V) = n,\ x \in V\}$$

(с проекцией на первую компоненту в качестве структурного морфизма). Полученное расслоение называется **тавтологическим векторным расслоением на бесконечном грассманиане**. Оно и понятно: точки нашего грассманиана — это подпространства размерности n в $\mathbb{R}^\infty$, а слой расслоения γ_n над точкой V — это само подпространство V.

По каждому непрерывному отображений $f\colon X \to \mathrm{Gr}_n(\mathbb{R}^\infty)$ можно построить векторное расслоение $f^*\gamma_n$ над X, рассмотрев пулбэк:

$$\begin{array}{ccc} f^*\gamma_n & \longrightarrow & \gamma_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & \mathrm{Gr}_n(\mathbb{R}^\infty) \end{array}$$

Мы получили отображение

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Gr}_n(\mathbb{R}^\infty)) &\to \mathrm{Vect}_n(X), \\ f &\mapsto f^*\gamma_n. \end{aligned}$$

По следствию 2.7.2 гомотопные отображения $f \sim g$ приводят к изоморфным расслоениям $f^*\gamma_n \cong g^*\gamma_n$, то есть, к одному и тому же элементу $\mathrm{Vect}_n(X)$. Значит, построенное отображение пропускается через фактор-множество по отношению гомотопности, и мы получаем отображение

$$\varphi\colon [X, \mathrm{Gr}_n(\mathbb{R}^\infty)] \to \mathrm{Vect}_n(X)$$

(напомним, что через $[X, Y]$ обозначается множество гомотопических классов непрерывных отображений из X в Y).

Теорема 2.8.1. *Отображение $\varphi\colon [X, \mathrm{Gr}_n(\mathbb{R}^\infty)] \to \mathrm{Vect}_n(X)$ всегда инъективно. Если же X компактно и хаусдорфово, то φ биективно.*

Лемма 2.8.2. *Рассмотрим отображения $j^{ev}, j^{odd}\colon \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$:*

$$j^{ev}(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, 0, x_2, \dots),$$
$$j^{odd}(x_1, x_2, \dots) = (x_1, 0, x_2, 0, \dots).$$

Каждое из них гомотопно тождественному посредством гомотопии $H\colon \mathbb{R}^\infty \times I \to \mathbb{R}^\infty$ такой, что отображение $H(-, t)$ линейно и инъективно для всех $t \in I$.

Доказательство. Положим $H(x, t) = tj^{ev}(x) + (1 - t)x$. Очевидно, что $H(-, 0) = j^{ev}$ и $H(-, 1) = \mathrm{id}$. Кроме того, все отображения вида $H(-, t)$ линейны. Покажем, что они инъективны. Возьмем $t \in (0, 1)$ и предположим, что $H(x, t) = 0$. Это означает, что $(1 - t)x_i$ равно нулю при нечетных i, и $tx_i + (1 - t)x_{2i} = 0$ при всех i. Отсюда сразу следует, что $x_i = 0$ для нечетных i. Осталось заметить, что любое положительное i может быть записано в виде произведения нечетного числа на некоторую степень двойки; поэтому $x_i = 0$ для всех i, откуда $x = 0$. $\square$

Доказательство теоремы 2.8.1. Предположим, что $f, g\colon X \to \mathrm{Gr}_n(\mathbb{R}^\infty)$ таковы, что векторные расслоения $f^*(\gamma_n)$ и $g^*(\gamma_n)$ на X изоморфны. Покажем, что f гомотопно g. Зафиксируем изоморфизм $\alpha\colon f^*(\gamma_n) \to g^*(\gamma_n)$. По лемме 2.8.2 можно заменить f на $j^{ev} \circ f$, а g на $j^{odd} \circ g$. Таким образом, можно считать, что у $f(x)$ ненулевые координаты стоят только на четных местах, а у $g(x)$ — на нечетных. Теперь построим $H\colon X \times I \to \mathrm{Gr}_n(\mathbb{R}^\infty)$, положив $H(x, t) = \{tv + (1 - t)\alpha(v) \mid v \in f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^\infty$. За счет того, что мы разнесли координаты $f(x)$ и $g(x)$ в разные позиции, $H(x, t)$ — n-мерное подпространство для всех t. Несложно проверить, что H — непрерывное отображение; мы получили гомотопию между f и g, что доказывает инъективность φ.

Пусть теперь X компактно и хаусдорфово, и $E \to X$ — векторное расслоение ранга n. Мы знаем, что существует вложение $E \to \underline{N}$ в тривиальное расслоение для достаточно большого N. Это тривиальное расслоение $X \times \mathbb{R}^N$ можно считать естественно вложенным в $X \times \mathbb{R}^\infty$. Теперь определим отображение $f\colon X \to \mathrm{Gr}_n(\mathbb{R}^\infty)$, отправив x в $j(E_x) \subseteq \mathbb{R}^N \subseteq \mathbb{R}^\infty$. Несложно проверить, что f непрерывно, и что $f^*(\gamma_n) \cong E$. $\square$

3 Векторные расслоения на сферах

3.1 Классификация

Сейчас мы попытаемся классифицировать векторных расслоения на сферах, то есть, описать множества $\mathrm{Vect}_n(S^k)$ для различных значений k, n. Для этого мы обобщим конструкцию, которая уже встречалась нам в примере 2.5.9 и в примере 2.7.3.

Пусть X — пространство с отмеченной точкой. Напомним, что **надстройкой** ΣX называется пространство, полученное из $X \times I$ стягиванием подпространств $X \times \{0\}$ и $X \times \{1\}$. Оно является объединением двух конусов $X = C_+ \cup C_-$, пересечение которых гомеоморфно X, и каждый из этих двух конусов стягиваем (он получен из $X \times I$ стягиванием подпространства $X \times \{0\}$).

Пусть $n \geqslant 0$. Если задано непрерывное отображение $f \colon X \to GL_n(\mathbb{R})$, то можно склеить тривиальные векторные расслоения $\underline{n}_{C_+}$ и $\underline{n}_{C_-}$ с помощью f. А именно, для каждой точки $x \in X$ точка $(x, v) \in C_+ \times \mathbb{R}^n$ отождествляется с точкой $(x, f(x)v) \in C_- \times \mathbb{R}^n$. Обозначим полученное векторное расслоение на ΣX через $E_n(f)$.

Обратно, если дано векторное расслоение ранга n на ΣX, то мы можем зафиксировать его тривиализации на C_+ и C_-. Получим функцию перехода $f \colon X \to GL_n(\mathbb{R})$. После изменения базиса в одном из этих тривиальных расслоений мы можем считать, что f переводит отмеченную точку пространства X в единичную матрицу (сравните это с примером 2.7.3). То есть, f можно считать отображением пространств с отмеченными точками. Таким образом, любое векторное расслоение ранга n на ΣX изоморфно расслоению вида $E_n(f)$

Предложение 3.1.1. *1. Отображения $f, f' \colon X \to GL_n(\mathbb{R})$ гомотопны (с сохранением отмеченных точек) тогда и только тогда, когда $E_n(f) \cong E_n(f')$.*

2. Индуцированное отображение

$$E_n \colon [X, GL_n(\mathbb{R})]_* \to \mathrm{Vect}_n(\Sigma X)$$

является биекцией.

Доказательство. Заметим, что второе утверждение сразу следует из первого, поскольку выше мы поняли, что E_n сюръективно. Кроме того, следствие 2.7.2 говорит, что из гомотопности отображений следует изоморфность расслоений.

Пусть $f, g \colon X \to GL_n(\mathbb{R})$ таковы, что $E(f) \cong E(g)$. Зафиксируем какой-нибудь изоморфизм, и получим отображения $\alpha_+ \colon C_+ \to GL_n(\mathbb{R})$, $\alpha_- \colon C_- \to GL_n(\mathbb{R})$ такие, что $f \cdot (\alpha_+|_X) = (\alpha_-|_X) \cdot g$. Поскольку отображение $\alpha_+|_X$ продолжается на стягиваемое пространство C_+, то существует гомотопия (сохраняющая отмеченную точку) между $\alpha_+|_X$ и постоянным отображением из X в отмеченную точку $GL_n(\mathbb{R})$, то есть, в единичную матрицу. Поэтому $f \cdot (\alpha_+|_X)$ гомотопно f. Совершенно аналогичным образом показывается, что $(\alpha_-|_X) \cdot g$ гомотопно g. Поэтому f и g гомотопны. □

Применим полученные результаты к случаю сферы $X = S^{k-1}$. Разумеется, $\Sigma X = S^k$. Предложение 3.1.1 дает нам биекцию между $\mathrm{Vect}_n(S^k)$ и $[S^{k-1}, GL_n(\mathbb{R})]_* = \pi_{k-1}(GL_n(\mathbb{R}))$. Заметим, кстати, что $\pi_{k-1}(GL_n(\mathbb{R}))$ является группой при $k \geqslant 2$. Заметим, что вложение $O_n \hookrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ является деформационным ретрактом (в силу ортогонализации Грама–Шмидта), так что $\pi_{k-1}(GL_n(\mathbb{R})) = \pi_{k-1}(O_n(\mathbb{R}))$. Наконец, если $k \geqslant 2$, то сфера S^{k-1} связна, и потому любое отображение $S^{k-1} \to O_n(\mathbb{R})$, сохраняющее отмеченную точку, обязано пропускаться через связную компоненту единицы, то есть, через группу SO_n. Мы получили, что

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}_n(S^1) &\cong \pi_0(GL_n(\mathbb{R})), \\ \mathrm{Vect}_n(S^k) &\cong \pi_{k-1}(SO_n(\mathbb{R})), \quad k \geqslant 2. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathrm{Vect}_n(S^1) \cong \pi_0(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, что согласуется с примером 2.7.3. Там мы поняли, что в качестве представителей двух классов изоморфизма мы можем взять $\underline{n}$ и $M \oplus \underline{n-1}$, где M — расслоение Мебиуса.

3.2 S^2

Предложение 3.2.1.

$$\mathrm{Vect}_n(S^2) \cong \pi_1(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})) \cong \begin{cases} 1, & n = 1; \\ \mathbb{Z}, & n = 2; \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & n \geqslant 3. \end{cases}$$

Доказательство. Случай $n = 1$ тривиален. Напомним, что $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cong S^1$, поэтому $\mathrm{Vect}_n(S^2) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, что завершает доказательство в случае $n = 2$. Пусть теперь $n = 3$. Хорошо известно, что $\mathrm{SO}_3 \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^3$: вращения трехмерного пространства задаются кватернионами нормы 1, причем два кватерниона задают одно и то же вращение тогда и только тогда, когда они противоположны. Кватернионы нормы 1 образуют трехмерную сферу S^3, поэтому $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ изоморфно $S^3/\{\pm 1\} \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^3$. Мы знаем, что $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^3) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Наконец, если $n \geqslant 3$, можно рассмотреть длинную точную последовательность гомотопических групп, ассоциированную с расслоением $\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \twoheadrightarrow S^{n-1}$: напомним, что $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ действует на $\mathbb{R}^n$; рассмотрим произвольный ненулевой вектор $v \in \mathbb{R}^n$ единичной длины. Его орбита — это все векторы той же длины, то есть, единичная сфера S^{n-1}, а его стабилизатор — это вращения ортогонального подпространства, то есть, $\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$.

Длинная точная последовательность теперь показывает, что $\pi_1(\mathrm{SO}_n) \cong \pi_1(\mathrm{SO}_{n-1})$ при $n \geqslant 4$, что завершает доказательство. □

Определение 3.2.2. Обозначим через $\mathcal{O}(m) \in \mathrm{Vect}_2(S^2)$ векторное расслоение $E(f_m)$, где $f_m \colon S^1 \to \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cong S^1$ — отображение степени m. В частности, $\mathcal{O}(0) \cong \underline{2}$.

Таким образом, любое векторное расслоение ранга 2 на S^2 изоморфно ровно одному из $\mathcal{O}(m)$.

Упражнение 3.2.3. *Комплексная проективная прямая $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ гомеоморфна сфере S^2 («сфера Римана»). На ней можно определить тавтологическое векторное расслоение точно так же, как в вещественном случае (пример 2.3.2), и рассмотреть его как двумерное вещественное расслоение на S^2. Выясните, какому из расслоений вида $\mathcal{O}(m)$ оно изоморфно.*

Посмотрим, что происходит с расслоением на S^2 при добавлении к нему тривиального. Заметим, что прибавление одномерного тривиального расслоение соответствует приписыванию к матрице из $\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$ диагонального единичного блока 1×1, то есть, стандартному вложению $i\colon\ \mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R}) \to \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Поэтому имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Vect}_{n-1}(S^2) \arrow[r, "-\oplus\underline{1}"] \arrow[d, "\sim"] & \mathrm{Vect}_n(S^2) \arrow[d, "\sim"] \\ \pi_1(\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R})) \arrow[r, "i_*"] & \pi_1(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})) \end{tikzcd}$$

Эти же отображения i_* фигурируют в длинной точной последовательности гомотопических групп, связанных с последовательностью

$$\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R}) \xrightarrow{i} \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \to S^{n-1}.$$

Для $n = 3$ кусочек этой последовательности выглядит так:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(SO_2(\mathbb{R})) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, equal] & \pi_1(SO_3(\mathbb{R})) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_1(S^2) \arrow[d, equal] \\ \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Мы видим, что отображение $i_*\colon \pi_1(SO_2(\mathbb{R})) \to \pi_1(SO_3(\mathbb{R}))$ сюръективно. С другой стороны, оно должно быть гомоморфизмом групп. Поэтому оно совпадает с канонической проекцией $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Это означает, что $\mathcal{O}(m) \oplus \underline{1}$ изоморфно $\underline{3}$ при четных m, и является нетривиальным элементом $\mathrm{Vect}_3(S^2)$ при нечетных m.

При $n \geqslant 4$ аналогичная длинная точная последовательность показывает, что прибавление одномерного тривиального слагаемого устанавливает биекцию между $\mathrm{Vect}_{n-1}(S^2)$ и $\mathrm{Vect}_n(S^2)$. Таким образом,

$$\mathrm{Vect}_n(S^2) = \begin{cases} \{\underline{1}\}, & n = 1; \\ \{\mathcal{O}(m) \mid m \in \mathbb{Z}\}, & n = 2; \\ \{\underline{n}, \mathcal{O}(1) \oplus \underline{n-2}\}, & n \geqslant 3. \end{cases}$$

Мы наблюдаем частный случай общего феномена: при фиксированном k отображения

$$- \oplus \underline{1}\colon\ \mathrm{Vect}_{n-1}(S^k) \to \mathrm{Vect}_n(S^k)$$

биективны для достаточно больших n. Иными словами, множества $\mathrm{Vect}_n(S^k)$ (они же гомотопические группы $\pi_{k-1}(SO_n(\mathbb{R}))$) *стабилизируются* при росте n.

Для завершения описания того, что происходит с векторными расслоениями на S^2 при сложении, остается выяснить, как складывать два расслоения вида $\mathcal{O}(m)$.

Теорема 3.2.4.

$$\mathcal{O}(m) \oplus \mathcal{O}(j) \cong \begin{cases} \underline{4}, & j + k \textit{ четно}; \\ \mathcal{O}(1) \oplus \underline{2}, & j + k \textit{ нечетно}. \end{cases}$$

Доказательство. Обозначим через $f_m, f_j : S^1 \to SO_2$ отображения степени m и j соответственно, из которых получаются расслоения $\mathcal{O}(m)$ и $\mathcal{O}(j)$. По определению прямой суммы, функция склейки для $\mathcal{O}(m) \oplus \mathcal{O}(j)$ — это $f_m \oplus f_j : S^1 \to SO_4(\mathbb{R})$, где через $\oplus$ обозначено отображение, которое поточечно устроено так: оно переводит пару матриц $A, B \in SO_2(\mathbb{R})$ в блочно-диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Эта матрица раскладывается в произведение

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Значит, $f_m \oplus f_j = (f_m \oplus f_0) \cdot (f_0 \oplus f_j)$. С другой стороны, групповая операция в $\pi_1(SO_4(\mathbb{R}))$ происходит из конкатенации петель, что соответствует произведению матриц. Осталось заметить, что отображения $f_0 \oplus f_j$ и $f_j \oplus f_0$ гомотопны. Поэтому класс $f_m \oplus f_j$ в $\pi_1(SO_4(\mathbb{R}))$ равен сумме классов $f_m \oplus f_0$ и $f_j \oplus f_0$. Но группа $\pi_1(SO_4(\mathbb{R}))$ состоит всего лишь из двух элементов. Функция $f_m \oplus f_0$ лежит в нетривиальном классе $\pi_1(SO_4(\mathbb{R}))$ тогда и только тогда, когда m нечетно. Поэтому указанная сумма тривиальна тогда и только тогда, когда $m + j$ четно. $\square$

3.3 S^3

Предложение 3.3.1. $\mathrm{Vect}_n(S^3) \cong \pi_2(\mathrm{SO}_n) \cong 0$. *Другими словами, всякое векторное расслоение на S^3 изоморфно тривиальному.*

Доказательство. При $n = 1$ получаем $\pi_2 \mathrm{SO}_1(\mathbb{R}) = 0$, а при $n = 2$ — $\pi_2 \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \pi_2(S^1) = 0$.

Пусть теперь $n = 3$. Мы знаем, что $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}P^3$. Последовательность расслоения

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \hookrightarrow S^3 \twoheadrightarrow \mathbb{R}P^3$$

дает нам длинную точную последовательность

$$\dots \to \pi_2(S^3) \to \pi_2(\mathbb{R}P^3) \to \pi_1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \dots,$$

в которой $\pi_2(S^3) = 0 = \pi_1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Поэтому и $\pi_2(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ тривиально. Наконец, при $n \geqslant 4$ можно посмотреть на уже знакомую нам последовательность расслоения

$$\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \twoheadrightarrow S^{n-1},$$

которая дает длинную точную последовательность

$$\dots \to \pi_2(\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R})) \to \pi_2(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})) \to \pi_2(S^{n-1}) = 0 \to \dots,$$

и по индукции получаем, что $\pi_2(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}))$ тривиально при всех n. □

3.4 S^4

Теперь мы хотим вычислить $\pi_3 \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. При $n = 1$ и $n = 2$ снова получаем тривиальные группы. При $n = 3$ можно, как и для вычисления π_2, использовать изоморфизм $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}P^3$ и последовательность расслоения

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to S^3 \to \mathbb{R}P^3:$$

получаем длинную точную последовательность

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dots & \longrightarrow & \pi_3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \pi_3(S^3) & \longrightarrow & \pi_3(\mathbb{R}P^3) & \longrightarrow & \pi_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \| & & \| & & \| & & \| & & \\
\dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & ? & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

Таким образом, $\pi_3 \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$.

Посмотрим на длинную точную последовательность для расслоения $\mathrm{SO}_3 \hookrightarrow \mathrm{SO}_4 \twoheadrightarrow S^3$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\dots & \longrightarrow & \pi_4(S^3) & \longrightarrow & \pi_3(\mathrm{SO}_3) & \longrightarrow & \pi_3(\mathrm{SO}_4) & \longrightarrow & \pi_3(S^3) & \longrightarrow & \pi_2(\mathrm{SO}_3) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \\
\dots & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & ? & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

Получаем, что $\pi_3 \mathrm{SO}_4 \cong \mathbb{Z}^2$.

Теперь возьмем длинную точную последовательность для расслоения $\mathrm{SO}_4 \hookrightarrow \mathrm{SO}_5 \twoheadrightarrow S^4$:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dots & \longrightarrow & \pi_4(S^4) & \longrightarrow & \pi_3(\mathrm{SO}_4) & \longrightarrow & \pi_3(\mathrm{SO}_5) & \longrightarrow & \pi_3(S^4) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \| & & \| & & \| & & \| & & \\
\dots & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & ? & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

Неприятность: для вычисления $\pi_3\,\mathrm{SO}_5$ нам нужно вычислить отображение $\pi_4 S^4 \to \pi_3\,\mathrm{SO}_4$. Впрочем, на этом месте происходит стабилизация, поскольку при $n \geqslant 6$ расслоение $\mathrm{SO}_{n-1} \hookrightarrow \mathrm{SO}_n \twoheadrightarrow S^{n-1}$ дает нам длинную точную последовательность

$$\begin{array}{ccccccccccc} \ldots & \longrightarrow & \pi_4(S^{n-1}) & \longrightarrow & \pi_3(\mathrm{SO}_{n-1}) & \longrightarrow & \pi_3(\mathrm{SO}_n) & \longrightarrow & \pi_3(S^{n-1}) & \longrightarrow & \ldots \\ & & \| & & \| & & \| & & \| & & \\ \ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & ? & \longrightarrow & ? & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ldots \end{array}$$

и видно, что все группы $\pi_3(\mathrm{SO}_n)$, $n \geqslant 5$ изоморфны $\pi_3(\mathrm{SO}_5)$.

На самом деле, окажется, что интересующее нас отображение $\pi_4 S^4 \to \pi_3\,\mathrm{SO}_4$ инъективно. Поэтому итоговый результат выглядит так.

Предложение 3.4.1.

$$\mathrm{Vect}_n(S^4) \cong \pi_3(\mathrm{SO}_n) \cong \begin{cases} 0, & n \leqslant 2; \\ \mathbb{Z}, & n = 3; \\ \mathbb{Z}^2, & n = 4; \\ \mathbb{Z}, & n \geqslant 5. \end{cases}$$

3.5 Периодичность Ботта

Мы видим закономерность: последовательность расслоения $\mathrm{SO}_{n-1} \hookrightarrow \mathrm{SO}_n \twoheadrightarrow S^{n-1}$ дает нам длинную точную последовательность

$$\cdots \to \pi_k(S^{n-1}) \to \pi_{k-1}(\mathrm{SO}_{n-1}) \to \pi_{k-1}(\mathrm{SO}_n) \to \pi_{k-1}(S^{n-1}) \to \ldots,$$

и при $n \geqslant k+2$ мы видим, что $\pi_{k-1}(\mathrm{SO}_{n-1}) \cong \pi_{k-1}(\mathrm{SO}_n)$. Таким образом,

$$\pi_{k-1}(\mathrm{SO}_{k+1}) \cong \pi_{k-1}(\mathrm{SO}_{k+2}) \cong \pi_{k-1}(\mathrm{SO}_{k+3}) \cong \ldots$$

Рассмотрим цепочку естественных вложений $\mathrm{O}_1(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \hookrightarrow \ldots$. Копредел этой последовательности обозначается через $\mathrm{O} = \mathrm{O}(\mathbb{R})$ и называется **стабильной ортогональной группой**. Гомотопические группы O — это предельные значения гомотопических групп пространства O_n при достаточно больших n. Выше мы вычислили $\pi_0(\mathrm{O}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathrm{O}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\pi_2(\mathrm{O}) = 0$, и поверили в то, что $\pi_3(\mathrm{O}) = \mathbb{Z}$. Рауль Ботт показал, что, кроме того, $\pi_4(\mathrm{O}) \cong \pi_5(\mathrm{O}) \cong \pi_6(\mathrm{O}) \cong 0$, $\pi_7(\mathrm{O}) \cong \mathbb{Z}$, и что $\pi_{i+8}(\mathrm{O}) \cong \pi_i(\mathrm{O})$ для всех натуральных i. Этот нетривиальный факт называется **периодичностью Ботта**.

Предыдущие вычисления можно повторить для комплексных векторных расслоений на сферах небольших размерностей. Сразу понятно, что

$$\mathrm{Vect}_n^{\mathbb{C}}(S^k) \cong \pi_{k-1}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) \cong \pi_{k-1}(\mathrm{U}_n),$$

где $\mathrm{U}_n \leqslant \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ — унитарная группа, которая, как известно, является деформационным ретрактом $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Аналогично вещественному случаю, у нас есть локально тривиальные расслоения вида

$$\mathrm{U}_{n-1} \hookrightarrow \mathrm{U}_n \twoheadrightarrow S^{2n-1}.$$

Кроме того, понятно, что $\mathrm{U}_1 \cong S^1$. Это знание поможет нам понять, что $\mathrm{Vect}_n^{\mathbb{C}}(S^1) = \mathrm{Vect}_n^{\mathbb{C}}(S^3) = 0$ для всех n; $\mathrm{Vect}_n(S^2) = \mathbb{Z}$ для всех n; $\mathrm{Vect}_1(S^4) = 0$ и $\mathrm{Vect}_n(S^4) = \mathbb{Z}$ для $n \geqslant 2$. Кроме того, $\mathrm{Vect}_1(S^5) = 0$, $\mathrm{Vect}_2(S^5) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, и отсюда $\mathrm{Vect}_n(S^5)$ равно либо 0, либо $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Окажется, что стабильное значение $\mathrm{Vect}_n(S^5)$ равняется 0, хотя это вычисление уже не так просто.

Нетрудно понять, что $\pi_i U_n$ стабилизируется при росте n; вообще, $\pi_i U_n \cong \pi_i U_{n+1}$ для $n > i/2$. Это стабильное значение равно $\pi_i U$, где U — **бесконечная унитарная группа**, то есть, копредел последовательности

$$U_1 \hookrightarrow U_2 \hookrightarrow U_3 \hookrightarrow \dots$$

Вычисление показывает, что гомотопические группы U периодичны с периодом 2:

$$\pi_i U = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i \text{ нечетно;} \\ 0, & i \text{ четно.} \end{cases}$$

4 Топологическая K-теория

4.1 Определение

Определение 4.1.1. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство. Группа Гротендика вещественных векторных расслоений на X обозначается через $\mathrm{KO}(X)$. По теореме Суона 2.6.4 она изоморфна группе Гротендика конечно-порожденных модулей на $C(X)$. Аналогичное определение для комплексных и кватернионных расслоений приводит к группам $\mathrm{KU}(X) = \mathrm{K}(X)$ и $\mathrm{KSp}(X)$, соответственно.

Заметим, что $\mathrm{KO}(-)$ — контравариантный функтор: если $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение между компактными хаусдорфовыми пространствами, то определено отображение $f^*\colon \mathrm{KO}(Y) \to \mathrm{KO}(X)$, $[E] \mapsto [f^*(E)]$. В частности, отображение $p\colon X \to \mathrm{pt}$, отправляющее все пространство X в точку, дает нам отображение $p^*\colon \mathrm{KO}(\mathrm{pt}) \to \mathrm{KO}(X)$. Любой выбор точки $\mathrm{pt} \to X$ является односторонним обратным к p, и потому p^* является расщепляющимся вложением. Очевидно, что $\mathrm{KO}(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{Z}$; поэтому $\mathbb{Z}$ выделяется прямым слагаемым в $\mathrm{KO}(X)$.

Определение 4.1.2. Положим $\mathrm{KO}^{st}(X) = \mathrm{KO}(X)/p^*\mathrm{KO}(\mathrm{pt})$. Группа $\mathrm{KO}^{st}(X)$ называется **группой Гротендика стабильных векторных расслоений на** X. Пусть $x \in X$ — произвольная точка. Обозначим через $i\colon \{x\} \to X$ вложение этой точки и положим $\widetilde{\mathrm{KO}}(X, x) = \ker(i^*\colon \mathrm{KO}(X) \to \mathrm{KO}(x) \cong \mathbb{Z})$. Группа $\widetilde{\mathrm{KO}}(X, x)$ называется *приведенной* KO-*группой* пространства с отмеченной точкой (X, x).

По определению у нас есть точная последовательность

$$0 \to \mathrm{KO}(\mathrm{pt}) \xrightarrow{p^*} \mathrm{KO}(X) \to \mathrm{KO}^{st} \to 0.$$

Если $i\colon \{x\} \to X$ — вложение произвольной точки, то гомоморфизм i^* является левым обратным для отображения p^*. Получаем изоморфизм

$$\begin{aligned} \mathrm{KO}^{st}(X) &\to \mathrm{Ker}(i^*),\\ [E] &\mapsto [E] - p^*i^*[E]. \end{aligned}$$

Более явно,

$$\begin{aligned} \mathrm{KO}^{st}(X) &\xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{KO}}(X, x),\\ [E] &\mapsto [E] - [\underline{\mathrm{rank}_x(E)}] \end{aligned}$$

Пусть $d\colon \mathrm{Vect}(X) \to [X, \mathbb{N}]$ — функция, отправляющая расслоение $p\colon E \to X$ в гомотопический класс отображения $d_E\colon X \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \dim p^{-1}(x)$. Множество $[X, \mathbb{N}]$ обладает структурой моноида (индуцированной с $\mathbb{N}$), и d является гомоморфизмом моноидов. Рассмотрим каноническое вложение $[X, \mathbb{N}] \to [X, \mathbb{Z}]$. Композиция $\mathrm{Vect}(X) \to [X, \mathbb{N}] \to [X, \mathbb{Z}]$ является гомоморфизмом [моноидов] в группу $[X, \mathbb{Z}]$, поэтому она продолжается до гомоморфизма групп $\overline{d}\colon \mathrm{KO}(X) \to [X, \mathbb{Z}]$. Обозначим ядро этого гомоморфизма через $\widehat{\mathrm{KO}}(X)$.

Лемма 4.1.3. *Точная последовательность*

$$0 \to \widehat{\mathrm{KO}}(X) \to \mathrm{KO}(X) \xrightarrow{\overline{d}} [X, \mathbb{Z}] \to 0.$$

расщепляется. Как следствие, $\mathrm{KO}(X) \cong \widehat{\mathrm{KO}}(X) \oplus [X, \mathbb{Z}]$.

Доказательство. Пусть $f\colon X \to \mathbb{N}$. Из компактности X следует, что образ отображения f состоит из конечного числа точек; пусть, например, $f(X) = \{n_1, \dots, n_r\}$. Тогда X разбивается в несвязное объединение открытых множеств $X = \coprod f^{-1}(n_i)$. Определим расслоение на X, взяв тривиальное расслоение $\underline{n_i}$ над каждым $f^{-1}(n_i)$. Определим гомоморфизм моноидов $\varphi\colon [X, \mathbb{N}] \to \mathrm{Vect}(X)$, отправив функцию f в такое расслоение. Нетрудно понять, что $[X, \mathbb{Z}]$ является группой Гротендика моноида $[X, \mathbb{N}]$, поэтому построенный гомоморфизм продолжается до гомоморфизма групп $[X, \mathbb{N}] \to KO(X)$, расщепляющего $\overline{d}$. □

Следствие 4.1.4. *Если X связно, то $\widetilde{KO}(X) \cong \widehat{KO}(X)$.*

Рассмотрим отображения $\mathrm{Vect}_k(X) \to \mathrm{Vect}_{k+1}(X)$, $[E] \mapsto [E \oplus \underline{1}]$.

Лемма 4.1.5. *Копредел полученной последовательности*

$$\mathrm{Vect}_0(X) \to \mathrm{Vect}_1(X) \to \mathrm{Vect}_2(X) \to \dots$$

изоморфен $\widehat{KO}(X)$

Доказательство. Определим отображения $\varphi_k\colon\ \mathrm{Vect}_k(X) \to \widehat{KO}(X)$, $[E] \mapsto [E] - [\underline{k}]$. Нетрудно проверить, что они коммутируют с морфизмами $\mathrm{Vect}_k(X) \to \mathrm{Vect}_{k+1}(X)$, описанными выше. По определению копредела тогда существует отображение $\varphi\colon \operatorname{colim} \mathrm{Vect}_k(X) \to \widehat{KO}(X)$. Покажем, что φ является биективным гомоморфизмом моноидов. Очевидно, что это гомоморфизм.

Проверим сюръективность φ. Пусть $[E] - [E'] \in \widehat{KO}(X)$. Найдется расслоение $\overline{E'}$ такое, что $E' \oplus \overline{E'} \cong \underline{n}$ для некоторого n. Тогда $[E] - [E'] = [E \oplus \overline{E'}] - \underline{n}$. По предположению $[E] - [E'] \in \mathrm{Ker}(\overline{d})$, и потому $d[E \oplus \overline{E'}] = d[\underline{n}]$, то есть, расслоение $E \oplus \overline{E'}$ имеет постоянный ранг n. Но тогда $\varphi_n([E \oplus \overline{E'}]) = [E] - [E']$.

Наконец, проверим инъективность φ. Если $[E] - [\underline{k}] = [E'] - [\underline{l}] \in \widehat{KO}(X)$, то $E \oplus \underline{l+n} \cong E' \oplus \underline{k+n}$ для некоторого n. Поэтому $[E]$ и $[E']$ представляют один и тот же элемент в копределе. □

Обозначим $BO_k = \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^\infty)$, $BO = \operatorname{colim} BO_k$.

Теорема 4.1.6. $\widehat{KO}(X) \cong [X, BO]$.

Доказательство. По лемме 4.1.5 $\widehat{KO}(X) \cong \operatorname{colim} \mathrm{Vect}_k(X)$. С другой стороны, по определению $BO = \operatorname{colim} BO_k$. Поскольку X компактно, $[X, BO] \cong \operatorname{colim}[X, BO_k]$. Осталось заметить, что $[X, BO_k] \cong \mathrm{Vect}_k(X)$, и эти изоморфизмы согласованы с отображениями, относительно которых берется копредел. □

Следствие 4.1.7. $KO(X) \cong [X, \mathbb{Z} \times BO] = [X_+, \mathbb{Z} \times BO]_*$*,* $\widetilde{KO}(X, x) = [(X, x), \mathbb{Z} \times BO]_*$.

Доказательство. По лемме 4.1.3 $KO(X) \cong \widehat{KO}(X) \oplus [X, \mathbb{Z}]$. По теореме 4.1.6 $\widehat{KO}(X) \cong [X, BO]$. Поэтому $KO(X) = [X, BO] \oplus [X, \mathbb{Z}] = [X, BO \times \mathbb{Z}]$. Остальные равенства несложно следуют из доказанного. □

Замечание 4.1.8. Все рассуждения выше можно перенести на случай комплексных и кватернионных векторных расслоений и получить, что $KU(X) \cong [X, \mathbb{Z} \times BU]$, $KSp(X) \cong [X, \mathbb{Z} \times BSp]$.

Теорема 4.1.9 (Периодичность Ботта в сильной форме). *Существуют слабые эквивалентности*

$$\Omega^2(\mathbb{Z} \times BU) \cong \mathbb{Z} \times BU,$$
$$\Omega^4(\mathbb{Z} \times BO) \cong \mathbb{Z} \times BSp,$$
$$\Omega^4(\mathbb{Z} \times BSp) \cong \mathbb{Z} \times BO.$$

Как следствие,

$$\Omega^8(\mathbb{Z}\times BO)\cong \mathbb{Z}\times BO,$$
$$\Omega^8(\mathbb{Z}\times BSp)\cong \mathbb{Z}\times BSp.$$

Ниже мы увидим, что из этой теоремы сразу следует периодичность Ботта в смысле раздела 3.5. Доказательство теоремы 4.1.9 чрезвычайно небанально.

4.2 Точная последовательнось для K-теории

Пусть X, Z — пространства с отмеченными точками. Тогда $[X, Z]_*$ — просто множество с отмеченной точкой. Однако, $[\Sigma X, Z]_*$ является группой, поскольку ΣX — когруппа. Действительно, стягивая экватор ΣX в точку, получаем отображение

$$\nabla\colon \Sigma X\to \Sigma X\vee \Sigma X.$$

Эта же структура получается следующим образом:

$$[\Sigma X, Z]_* = [S^1, \mathrm{Map}(X,Z)]_* = \pi_1(\mathrm{Map}(X,Z)),$$

где через $\mathrm{Map}(X, Z)$ обозначено множество непрерывных отображений из X в Z с компактно-открытой топологией.

Если $k\geqslant 2$, то $[\Sigma^k X, Z]_* = \pi_k(\mathrm{Map}(X,Z))$ — абелева группа.

Заметим также, что $[X,\Omega Z]_* = [\Sigma X, Z]_*$, поэтому $[X,\Omega^k Z]_*$ является группой, абелевой при $k\geqslant 2$.

Предложение 4.2.1. *Пусть X, Y — пространства с отмеченными точками, и $f\colon X\to Y$ — отображение пространств, сохраняющее отмеченные точки. Рассмотрим естественное отображение $p\colon Y\to Cf$, где Cf — конус отображения f. Тогда для любого пространства Z с отмеченной точкой последовательность отображений множеств с отмеченной точкой*

$$[X,Z]_* \leftarrow [Y,Z]_* \leftarrow [Cf,Z]_*$$

точна.

Доказательство. Пусть отображение $h\colon Y\to Z$ таково, что $h\circ f$ гомотопно постоянному отображению. Выберем гомотопию $H\colon X\times I\to Z$ (сохраняющую отмеченную точку) так, что $H(X\times\{1\}) = *$. Эта гомотопия индуцирует отображение $CX\to Z$. Построим отображение $g\colon Cf\to Z$, продолжив это отображение посредством h на Y. Нетрудно проверить, что $g\circ p = h$. □

Итак, начав с морфизма $f\colon X\to Y$, мы можем построить конус Cf вместе с вложением $j_0\colon Y\hookrightarrow Cf$. Продолжим процесс, построив конус этого вложения j_0 вместе с вложением $j_1\colon Cf\hookrightarrow Cj_0$. Продолжая в том же духе, получим последовательность пространств

$$X\to Y\to Cf\to Cj_0\to Cj_1\to\dots$$

Несложно понять (нарисуйте картинку!), что $Cj_0\cong\Sigma X$ и $Cj_1\cong \Sigma Y$, а отображение $Cj_0\to Cj_1$ — это просто Σf. Получаем **последовательность Пуппе**

$$X\to Y\to Cf\to \Sigma X\to \Sigma Y\to \Sigma(Cf)\to \Sigma^2 X\to\dots.$$

Применив функтор $[-, Z]_*$ (для фиксированного пространства Z), получим последовательность множеств с отмеченной точкой

$$[X, Z]_* \leftarrow [Y, Z]_* \leftarrow [Cf, Z]_* \to [\Sigma X, Z]_* \leftarrow [\Sigma Y, Z]_* \leftarrow [\Sigma(Cf), Z]_* \to \dots,$$

которая точна по предложению 4.2.1. Она часто называется **точной последовательностью Пуппе**. Это точная последовательность множеств, которая потом (на шаге $[\Sigma Y, Z]_*$) становится точной последовательностью групп, а еще позже (на шаге $[\Sigma^2 Y, Z]_*$) — точной последовательностью абелевых групп.

Нетрудно понять, что если $Z \cong \Omega Z_1$, то мы с самого начала имеем дело с последовательностью групп (за счет изоморфизмов типа $[\Sigma X, Z_1]_* \cong [X, \Omega Z_1]_*$).

Определение 4.2.2. Бесконечнократное пространство петель — это пространство $Z = Z_0$ вместе с пространствами $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ и слабыми гомотопическими эквивалентностями $Z_n \cong \Omega Z_{n+1}$ для всех $n \geqslant 0$.

Зафиксируем бесконечнократное пространство петель Z. Наша точная последовательность является точной последовательностью абелевых групп, бесконечной в обе стороны:

$$\dots \leftarrow [Cf, Z_{i+1}]_* \leftarrow [X, Z_i]_* \leftarrow [Y, Z_i]_* \leftarrow [Cf, Z_i]_* \leftarrow [X, Z_{i-1}] \leftarrow \dots$$

(мы считаем, что $Z_{-n} = \Omega^n Z$ при $n > 0$).

Для пространства X обозначим

$$E^i_Z(X) = [X_+, Z_i]_* = \begin{cases} [X_+, Z_i]_*, & i \geqslant 0; \\ [\Sigma^{-i}(X_+), Z_0]_*, & i < 0. \end{cases}$$

Если $j\colon A \hookrightarrow X$ — вложение подпространства A в X, положим

$$E^i_Z(X, A) = [Cj, Z_i]_* = \begin{cases} [Cj, Z_i]_*, & i \geqslant 0; \\ [\Sigma^i(Cj), Z_0]_*, & i < 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что E^*_Z — *обобщенная теория когомологий* в том смысле, что она удовлетворяет аксиомам Эйленберга–Стинрода, что бы это ни значило. Таким образом, по каждому бесконечнократному пространству петель Z мы построили обобщенную теорию когомологий E^*_Z (обратно, каждая обобщенная теория когомологий происходит из некоторого бесконечнократного пространства петель — но это нам не понадобится).

Возвращаясь к K-теории, заметим, что по теореме Ботта

$$\mathbb{Z} \times BO \cong \Omega^8(\mathbb{Z} \times BO) \cong \Omega^{16}(\mathbb{Z} \times BO) \cong \dots,$$

и потому наши рассуждения выше применимы к бесконечнократному пространству петель $\mathbb{Z} \times BO$. Мы получаем теорию когомологий KO^*, и периодичность Ботта утверждает, что $KO^{i+8}(X, A) = KO^i(X, A)$ для всех i. Аналогично, в комплексном случае мы получаем теорию когомологий K^*, периодичную с периодом 2.

4.3 Попытка вычисления

Попробуем вычислить $KO(\mathbb{R}P^2)$. Прежде всего, $KO(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z} \oplus KO^{st}(\mathbb{R}P^2)$. Если выбрать какую-нибудь точку $* \in \mathbb{R}P^2$, то $KO^{st}(\mathbb{R}P^2) \cong \widetilde{KO}(\mathbb{R}P^2)$, где

$$\widetilde{KO}(\mathbb{R}P^2) = \mathrm{Ker}(KO(\mathbb{R}P^2) \to KO(*)).$$

Заметим, что $\mathbb{R}P^2$ может быть получено приклеиванием к S^1 двумерного диска D^2 с помощью двукратной намотки окружности $t\colon S^1 = \partial D^2 \to S^1$. Это означает, что $\mathbb{R}P^2$ гомеоморфно конусу морфизма t. Поэтому имеется последовательность Пуппе

$$S^1 \to S^1 \to \mathbb{R}P^2 \to S^2 \to S^2 \to \dots .$$

Применяя функтор $[-, \mathbb{Z} \times BO]_*$ (и учитывая пример 2.7.3 и предложение 3.2.1), получаем точную последовательность абелевых групп

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\dots & \longleftarrow & \widetilde{KO}(S^1) & \longleftarrow & \widetilde{KO}(S^1) & \longleftarrow & \widetilde{KO}(\mathbb{R}P^2) & \longleftarrow & \widetilde{KO}(S^2) & \longleftarrow & \widetilde{KO}(S^2) & \longleftarrow & \dots \\
 & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \\
\dots & \longleftarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longleftarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longleftarrow & ? & \longleftarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longleftarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longleftarrow & \dots
\end{array}$$

Два отображения $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, возникающие в нижней строке, индуцированы отображениями t и $\Sigma(t)$, поэтому являются умножениями на 2. Значит, имеется точная последовательность абелевых групп

$$0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \widetilde{KO}(S^2) \to \widetilde{KO}(\mathbb{R}P^2) \xrightarrow{i^*} \widetilde{KO}(S^1) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0.$$

Из этого следует, что $\widetilde{KO}(\mathbb{R}P^2)$ — это либо $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, либо $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Как это определить? Мы знаем один элемент $\widetilde{KO}(\mathbb{R}P^2)$: при изоморфизме $\widetilde{KO}(\mathbb{R}P^2) \cong KO^{st}(\mathbb{R}P^2)$ ему соответствует класс тавтологического расслоения $[\gamma]$ на $\mathbb{R}P^2$. Заметим, что отображение $i^*\colon \widetilde{KO}(\mathbb{R}P^2) \to \widetilde{KO}(S^1)$ индуцировано вложением $i\colon S^1 = \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^2$, поэтому это просто ограничение расслоения с $\mathbb{R}P^2$ на $\mathbb{R}P^1$. Нетрудно понять, что при ограничении тавтологического расслоения на $\mathbb{R}P^1$ мы получим расслоение Мебиуса. Значит, $i^*[\gamma] = [M]$ (после отождествления $\widetilde{KO}$ с KO^{st}). В то же время, мы знаем, что $[M]$ — [единственный] нетривиальный элемент $KO^{st}(S^1)$.

Если $\widetilde{KO}(\mathbb{R}P^2) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, то любой нетривиальный элемент $\widetilde{KO}(\mathbb{R}P^2)$ имеет порядок 2, и потому $2[\gamma] = 0$. Если же $\widetilde{KO}(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, то $[\gamma] = \overline{1}$ или $\overline{3}$; в любом случае $2[\gamma] \neq 0$. Поэтому для вычисления $\widetilde{KO}(\mathbb{R}P^2)$ осталось выяснить, является ли расслоение $\gamma \oplus \gamma$ стабильно тривиальным.

Оказывается, что ответ на этот вопрос отрицателен, и потому на самом деле $\widetilde{KO}(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Мы, однако, не можем этого доказать сейчас. Следующее неформальное рассуждение показывает, почему это должно быть так.

Перейдем к группам $\widetilde{KO}$ вместо KO^{st}; при этом изоморфизме элемент $[\gamma] \in KO^{st}(\mathbb{R}P^2)$ перейдет в $[\gamma] - \underline{1} \in \widetilde{KO}(\mathbb{R}P^2)$. Мы утверждаем, что $2(\underline{1} - [\gamma]) \neq 0$. Элемент $\underline{1} - [\gamma]$ нужно воспринимать как комплекс векторных расслоений вида

$$0 \to \gamma \to \underline{1} \to 0,$$

и оказывается, что его нужно воспринимать как фундаментальный класс подмногообразия $\mathbb{R}P^1 \hookrightarrow \mathbb{R}P^2$ в K-теории. Поэтому $(\underline{1} - [\gamma])^2$ нужно воспринимать как пересечение двух копий $\mathbb{R}P^1$ в $\mathbb{R}P^2$. Теория пересечений учит нас, что это пересечение равно точке (две прямые на прективной плоскости пересекаются), и потому $(\underline{1} - [\gamma])^2 \neq 0$. Но

$$(\underline{1} - [\gamma])^2 = \underline{1} - 2[\gamma] + [\gamma]^2 = \underline{1} - 2[\gamma] + \underline{1} = 2(\underline{1} - \gamma)$$

(мы использовали изоморфизм $\gamma \otimes \gamma \cong \underline{1}$, который выполняется для любого вещественного векторного расслоения).

4.4 Векторные поля на сферах

Для ненулевого вектора $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ несложно написать формулу, дающую ненулевой ортогональный вектор к u: а именно, $(-y, x)$. Однако, для $\mathbb{R}^3$ не существует формулы, которая по ненулевому вектору возвращает ортогональный ему вектор (зависящий непрерывным образом от аргумента). Действительно, такая формуа означала бы наличие векторного поля на S^2, которое нигде не обращается в 0, а это невозможно по элементарным топологическим соображениям.

Перейдем к четырехмерному пространству $\mathbb{R}^4$. По вектору $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ несложно написать ортогональный вектор $(-x_2, x_1, -x_4, x_3)$. Это не единственный способ: можно рассмотреть

$$v_1 = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ -x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_4 \\ x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} -x_4 \\ -x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Оказывается, векторы v_1, v_2, v_3 не только ортогональны u, но и ортогональны между собой. Поэтому в каждой точке сферы S^3 мы получили ортонормированный базис касательного пространства.

Задача 4.4.1. *Сколько существует линейно независимых векторных полей на S^n?*

Процесс ортогонализации Грама–Шмидта говорит, что здесь можно заменить слово «линейно независимых» на «ортонормальных». Если n четно, то ответ — 0, поскольку на четномерной сфере не существует векторного поля, не обращающегося нигде в 0.

Посмотрим на семимерную сферу: пусть $v \in S^7$. Можно взять конструкцию для S^3 и провести ее одновременно на первых четырех и на последних четырех координатах:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ -x_4 \\ x_3 \\ -x_6 \\ x_5 \\ -x_8 \\ x_7 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_4 \\ x_1 \\ -x_2 \\ -x_7 \\ x_8 \\ x_5 \\ -x_6 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} -x_4 \\ -x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ -x_8 \\ -x_7 \\ x_6 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Эта идея обобщается до следующего предложения.

Предложение 4.4.2. *Если на S^{n-1} есть r линейно независимых векторных полей, то и на S^{kn-1} есть r линейно независимых векторных полей.*

Таким образом, мы уже знаем, что на S^{2k-1} есть хотя бы одно векторное поле, а на S^{4k-1} — хотя бы три.

Оказывается, на S^7 есть на самом деле семь линейно независимых векторных полей. Заметим, что S^3 является группой Ли: алгебра кватернионов $\mathbb{H}$ над $\mathbb{R}$ четырехмерна, и ее элементы нормы 1 образуют группу по умножению. Левое умножение на кватернион x нормы 1 является автоморфизмом S^3, и переводит 1 в x. Поэтому его дифференциал устанавливает изоморфизм между касательным пространством к S^3 в точке 1 и касательным пространством к S^3 в точке x. Выбрав произвольный ортонормированный базис в T_1S^3, мы можем перенести его, таким образом, в любую точку $x \in S^3$. Это и дает три выписанных выше векторных поля на S^3.

Семимерная сфера S^7 уже не является группой Ли, но на ней имеется структура (неассоциативного) умножения, поскольку над $\mathbb{R}$ есть восьмимерная алгебра с делением $\mathbb{O}$ (октонионы). Этого достаточно, чтобы повторить рассуждение с умножением и получить семь линейно независимых векторных полей на S^7. По предложению 4.4.2 на сфере виде S^{8k-1} есть 7 векторных полей.

Эти рассуждения наводят на мысль о том, что нечто интересное происходит в степенях двойки, и поэтому стоит посмотреть на сферы S^{15} и S^{31}. Можно было бы ожидать, что количество линейно независимых векторных полей на них равно 15 и 31, соответственно. Оказывается, что правильный ответ — 8 и 9.

Определение 4.4.3. Пусть $n = m \cdot 2^{a+4b}$, где a, b, m — натуральные числа, m нечетно, и $a < 4$. **Число Гурвица–Радона** для n равно $\rho(n) = 2^a + 8b - 1$.

Теорема 4.4.4 (Гурвиц–Радон). *Существует по крайней мере $\rho(n)$ линейно независимых векторных полей на S^{n-1}.*

Теорема Гурвица–Радона была доказана в двадцатых годах двадцатого века достаточно элементарными методами. В 1962 году Адамс доказал, что полученная оценка точна, с использованием K-теории.

Теорема 4.4.5 (Адамс). *Не существует $\rho(n)+1$ линейно независимых векторных полей на S^{n-1}.*

Гурвиц и Радон, разумеется, занимались не векторными полями на сфере напрямую, а формулами, задающими «законы композиции» для квадратичных форм. Напомним, что модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей, что выражается тождеством

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1y_1 - x_2y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2.$$

Определение 4.4.6. Формулой суммы квадратов типа $[r, s, n]$ (или просто $[r, s, n]$-**формулой**) называется тождество вида

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_s^2) = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$$

в кольце многочленов $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r]$, где z_i — билинейные выражения от x и y.

Для каких r, s, n существуют $[r, s, n]$-формулы? Ответ на этот вопрос остается открытым. Можно переформулировать задачу так: мы ищем функцию $\varphi\colon \mathbb{R}^r \otimes \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$ такую, что $|\varphi(x, y)|^2 = |x|^2 \cdot |y|^2$ для всех $x \in \mathbb{R}^r$, $y \in \mathbb{R}^s$ (здесь имеются в виду стандартные скалярные произведения на рассматриваемых пространствах). Координаты $\varphi(x, y)$ тогда дадут билинейные функции $z_1, \ldots, z_n$.

Подставляя в качестве x базисные векторы $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{R}^r$, получаем линейные отображения $\mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$, которые в стандартных базисах записываются матрицами $A_1, \ldots, A_r$ размера $n \times s$. При этом $z = \varphi(x, y) = \varphi(\sum_j x_j e_j, y) = \sum_j x_j A_j y$. Условие на φ тогда превращается в тождество $z^T z = (x^T x) \cdot (y^T y)$. Поэтому

$$\sum_{i,j} (y^T A_j^T x_j)(x_i A_i y) = (x^T x)(y^T y).$$

Отсюда следует, что

$$y^T \left(\sum_{i,j} x_i x_j A_j^T A_i \right) y = y^T \left((x^T x) E_s \right) y$$

для всех y. Значит, $\sum_{i,j} x_i x_j A_j^T A_i = x^T x E_s = (\sum_i x_i^2) E_s$. Приравнивая коэффициенты при всех мономах $x_i x_j$, получаем, что

- $A_i^T A_i = E_s$ (то есть, $A_i \in O(n, \mathbb{R})$) для всех i;
- $A_j^T A_i + A_i^T A_j = 0$ для всех $i \neq j$.

В дальнейшем нас будет интересовать случай $s = n$. В этом случае матрицы A_i квадратны, и мы можем положить $B_i = A_1^{-1} A_i$. Тогда $B_1 = E_n$, $A_i = A_1 B_i$, и из равенства $A_i^T A_1 + A_1^T A_i = 0$ теперь следует, что $B_i^T = -B_i$ при всех $i > 1$. Наши равенства теперь преобразуются в следующие соотношения на $B_2, \ldots, B_r$.

- $B_i^T = -B_i$;
- $B_i^2 = -E_n$;
- $B_i B_j = -B_j B_i$ для всех $i \neq j$.

Заметим, что из первых двух условий следует, что $B_i \in O(\mathbb{R}, n)$, а из первого и третьего следует, что $B_j^T B_i + B_i^T B_j = 0$. Подставляя теперь $E_n = B_1, B_2, \ldots, B_r$ вместо $A_1, \ldots, A_n$, получаем, что мы доказали следующее предложение.

Предложение 4.4.7. *Если* $[r, n, n]$*-формула существует, то существует и* $[r, n, n]$*-формула с матрицами* $A_1, \ldots, A_r$ *такими, что* $A_1 = E_n$ *и* $A_i^T = -A_i$.

Таким образом, для нахождения $[r, n, n]$-формулы достаточно найти матрицы $A_2, \ldots, A_r$ размера $n \times n$ такие, что $A_i^2 = -E_n$ и $A_j A_j = -A_j A_i$.

Предложение 4.4.8. *Если* $[r, n, n]$*-формула существует, то на сфере* S^{n-1} *существует* $r - 1$ *линейно независимых векторных полей.*

Доказательство. Если $y \in S^{n-1}$, то $|\varphi(e_i, y)|^2 = |e_i|^2 \cdot |y|^2$, откуда $\varphi(e_i, y) \in S^{n-1}$. Поскольку мы можем считать, что $A_1 = E_n$, то $\varphi(e_1, y) = y$. Мы утверждаем, что $\varphi(e_i, y) \perp \varphi(e_j, y)$ при $i \neq j$; таким образом, функции $\varphi(e_2, -), \ldots, \varphi(e_r, -)$ являются ортонормальными векторными полями на S^{n-1}.

Для доказательства ортогональности заметим, что $|\varphi(e_i + e_j, y)|^2 = |e_i + e_j|^2 \cdot |y|^2 = 2|y|^2$. С другой стороны,

$$
\begin{aligned}
|\varphi(e_i + e_j, y)|^2 &= |\varphi(e_i, y) + \varphi(e_j, y)|^2 \\
&= |\varphi(e_i, y)|^2 + |\varphi(e_j, y)|^2 + 2\varphi(e_i, y)\varphi(e_j, y) \\
&= 2(|y|^2 + \varphi(e_i, y)\varphi(e_j, y)),
\end{aligned}
$$

откуда $\varphi(e_i, y) \cdot \varphi(e_j, y) = 0$. $\square$

4.5 Алгебры Клиффорда

Выше мы поняли, что из существования матриц $A_2, \ldots, A_r$ размера $n \times n$ со свойствами $A_i^2 = -E_n$, $A_i A_j = -A_j A_i$ следует, что на S^{n-1} имеется $r-1$ линейно независимых векторых полей. Разумно рассмотреть свободную алгебру с указанными соотношениями.

Определение 4.5.1. **Алгебра Клиффорда** Cl_k — это фактор-алгебра тензорной алгебры (свободной алгебры от k некоммутирующих переменных) $\mathbb{R}\langle e_1, \ldots, e_k \rangle$ по соотношениям $e_i^2 = -1$ и $e_i e_j + e_j e_i = 0$ при $i \neq j$.

Нетрудно понять, что $Cl_0(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, $Cl_1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{C}$, $Cl_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{H}$. Чуть позже мы увидим, что $Cl_3(\mathbb{R}) \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Поясним, зачем нам нужны алгебры Клиффорда.

Теорема 4.5.2. $[r, n, n]$-*формула существует тогда и только тогда, когда на* $\mathbb{R}^n$ *существует структура* Cl_{r-1}-*модуля.*

Доказательство. Если существует $[r, n, n]$-формула, то по предложению 4.4.7 существует и формула, в которой $A_1 = E_n$. Они дают структуру Cl_{r-1}-модуля на $\mathbb{R}^n$, в котором e_i действует как умножение на A_{i+1}.

Обратно, предположим, что Cl_{r-1} действует на $\mathbb{R}^n$. Напомним, что $\mathbb{R}^n$ снабжено стандартным скалярным произведением, которое, однако, не согласовано со структурой модуля над алгеброй Клиффорда. Поэтому зададим на $\mathbb{R}^n$ новое скалярное произведение формулой

$$\langle v, w\rangle = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_j \leqslant r-1} (e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_j} v) \cdot (e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_j} w).$$

Заметим, что элементы вида $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_j}$ для всевозможных наборов $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_j \leqslant r-1$ образуют базис алгебры Клиффорда Cl_{r-1} (которая, таким образом, имеет размерность 2^{r-1}). Мы получили симметричную билинейную форму, которая положительно определена (в силу положительной определенности стандартного скалярного произведения). За счет такого «усреднения» полученное скалярное произведение инвариантно относительно действия Cl_{r-1}: нетрудно понять, что $\langle e_i v, e_i w\rangle = \langle v, w\rangle$.

Теперь выберем ортонормированный базис относительно этого скалярного произведения. Действие элементами $e_1, \dots, e_{r-1}$ дает в этом базисе матрицы $A_2, \dots, A_r$, которые ортогональны в силу инвариантности скалярного произведения, и удовлетворяют соотношениям $A_i^2 = -1$, $A_i A_j + A_j A_i = 0$, поскольку эти соотношения выполняются в алгебре Клиффорда. □

Следствие 4.5.3. *Если на* $\mathbb{R}^n$ *существует структура* Cl_{r-1}-*модуля, то на* S^{n-1} *существует* $r-1$ *линейно независимых векторных полей.*

Невероятно, но факт: существует полное описание всех алгебр Клиффорда (через уже известные нам алгебры) и всех модулей над ними. Для этого нам понадобится небольшое расширение понятия алгебры Клиффорда.

Определение 4.5.4. Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$, и $q\colon V \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма на V. Определим **алгебру Клиффорда формы** q как фактор-алгебру тензорной алгебры пространства V по соотношениям вида $v \otimes v = q(v)$.

$$\mathrm{Cl}(V, q) = T_{\mathbb{R}}(V)/\langle v \otimes v = q(v) \cdot 1 \mid v \in V\rangle$$

Замечание 4.5.5. Отметим, что алгебра Cl_k, определенная в 4.5.1, является алгеброй Клиффорда формы $q(x_1, \dots, x_k) = -(x_1^2 + \dots + x_k^2)$ на пространстве $\mathbb{R}^k$. В дальнейшем мы будем обозначать эту алгебру через $\mathrm{Cl}_k^+ = \mathrm{Cl}_k$. Если же взять $q(x_1, \dots, x_k) = x_1^2 + \dots + x_k^2$, получим алгебру, которая будет обозначаться через Cl_k^-.

Предложение 4.5.6. $\mathrm{Cl}_k^{\pm} \cong \mathrm{Cl}_2^{\pm} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{k-2}^{\mp}$.

Доказательство. Отправим $e_1 \mapsto e_1 \otimes 1$, $e_2 \mapsto e_2 \otimes 1$ и $e_i \mapsto e_1 e_2 \otimes e_{i-2}$ при $i \geqslant 3$. Проверьте, что получится изоморфизм. □

Алгебру квадратных матриц размера $n \times n$ над алгеброй A мы будем обозначать через $A(n)$. В таблице 1 собраны отождествления для первых девяти пар алгебр Клиффорда. Поясним, как они получены.

- Легко видеть, что $\mathrm{Cl}_0^+ \cong \mathbb{R}$, $\mathrm{Cl}_1^+ \cong \mathbb{C}$, $\mathrm{Cl}_2^+ \cong \mathcal{H}$, $\mathrm{Cl}_0^- \cong \mathbb{R}$ и $\mathrm{Cl}_1^- \cong \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Посмотрим на алгебру Cl_2^-: она порождается элементами e_1, e_2 с соотношениями $e_1^2 = 1 = e_2^2$ и $e_1e_2 = -e_2e_1$. Сопоставим элементам e_1 и e_2 отражения относительно прямых в $\mathbb{R}^2$ с углом 45° между ними (точнее, матрицы этих отражений в некотором базисе). Получится гомоморфизм алгебр $\mathrm{Cl}_2^- \to \mathbb{R}(2)$; нетрудно проверить, что он инъективен, и биективность следует из совпадения размерностей.
- По предложению 4.5.6

$$\mathrm{Cl}_3^+ \cong \mathrm{Cl}_2^+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_1^- \cong \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \cong \mathbb{H}\otimes\mathbb{H}.$$
$$\mathrm{Cl}_3^- \cong \mathrm{Cl}_2^- \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_1^+ \cong \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}(2).$$
$$\mathrm{Cl}_4^+ \cong \mathrm{Cl}_2^+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_2^- \cong \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{H}(2).$$
$$\mathrm{Cl}_4^- \cong \mathrm{Cl}_2^- \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_2^+ \cong \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{H}(2).$$

k	Cl_k^+	Cl_k^-
0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
1	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$
2	$\mathbb{H}$	$\mathbb{R}(2)$
3	$\mathbb{H}\times\mathbb{H}$	$\mathbb{C}(2)$
4	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2)$
5	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(2)\times\mathbb{H}(2)$
6	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{H}(4)$
7	$\mathbb{R}(8)\times\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(8)$
8	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16)$

Таблица 1: Алгебры Клиффорда

- Снова воспользуемся предложением 4.5.6:

$$\mathrm{Cl}_5^+ \cong \mathrm{Cl}_2^+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_3^- \cong \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}(2).$$
$$\mathrm{Cl}_5^- \cong \mathrm{Cl}_2^- \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_3^+ \cong \mathbb{R}(2) \otimes (\mathbb{H}\times\mathbb{H}) \cong \mathbb{H}(2)\times\mathbb{H}(2).$$

Для отождествления Cl_5^+ осталось понять, что $\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \cong \mathbb{C}(2)$; тогда

$$\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}(2) \cong (\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})(2) \cong \mathbb{C}(2)(2) \cong \mathbb{C}(4).$$

Мы двинемся дальше, оставив доказательство нужного равенства до леммы ???.

- Получаем

$$\mathrm{Cl}_6^+ \cong \mathrm{Cl}_2^+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_4^- \cong \mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H}(2)$$

В лемме ??? мы покажем, что $\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H} \cong \mathbb{R}(4)$; тогда

$$\mathrm{Cl}_6^+ \cong \mathbb{R}(4)(2) \cong \mathbb{R}(8).$$

Кроме того,

$$\mathrm{Cl}_6^- \cong \mathrm{Cl}_2^- \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_4^+ \cong \mathbb{R}(2)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H}(2) \cong \mathbb{H}(4).$$

- Продолжаем:

$$\mathrm{Cl}_7^+ \cong \mathrm{Cl}_2^+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_5^- \cong \mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H}(2)\times\mathbb{H}(2)$$

Используя результат $\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H} \cong \mathbb{R}(4)$, получаем

$$\mathrm{Cl}_7^+ \cong \mathbb{R}(4)(2)\times\mathbb{R}(4)(2) \cong \mathbb{R}(8)\times\mathbb{R}(8).$$

Далее,

$$\mathrm{Cl}_7^- \cong \mathrm{Cl}_2^- \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_5^+ \cong \mathbb{R}(2)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}(4) \cong \mathbb{C}(8)$$

- Наконец,

$$\mathrm{Cl}_8^+ \cong \mathrm{Cl}_2^+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_6^- \cong \mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H}(4) \cong \mathbb{R}(16)$$
$$\mathrm{Cl}_8^- \cong \mathrm{Cl}_2^- \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_6^+ \cong \mathbb{R}(2)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}(8) \cong \mathbb{R}(16).$$

Мы утверждаем, что полученных знаний вполне достаточно для описания всех алгебр Клиффорда. Действительно, если $i \geqslant 8$, то

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cl}_i^+ &= \mathrm{Cl}_2^+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{i-2}^- \\
&= \mathrm{Cl}_2^+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_2^- \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{i-4}^+ \\
&= \mathrm{Cl}_4^+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{i-4}^+ \\
&= \mathrm{Cl}_4^+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_2^+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{i-6}^- \\
&= \mathrm{Cl}_4^+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_2^+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_2^- \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{i-8}^+ \\
&= \mathrm{Cl}_4^+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_4^+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{i-8}^+ \\
&= \mathrm{Cl}_8^+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{i-8}^+ \\
&= (\mathrm{Cl}_{i-8}^+)(16).
\end{aligned}$$

Аналогичное вычисление показывает, что

$$\mathrm{Cl}_i^- = (\mathrm{Cl}_{i-8}^-)(16).$$

Лемма 4.5.7. $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}(2)$*,* $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{R}(4)$*.*

Доказательство. Определим отображения

$$\begin{aligned}
\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &\to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}), \\
q \otimes z &\mapsto (\nu \mapsto q\nu z)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} &\to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}), \\
q \otimes u &\mapsto (\nu \mapsto q\nu\overline{u}).
\end{aligned}$$

Несложно проверить, что это изоморфизмы. □

Таким образом, мы классифицировали все [нужные нам] алгебры Клиффорда. Теперь нам нужно описать все их конечно порожденные модули. Нам понадобятся следующие факты:

- Если A — алгебра с делением, то все модули над A свободны.
- Категория конечно порожденных $A(n)$-модулей эквивалентна категории конечно порожденных A-модулей (соответствие Мориты). При этом A-модуль M соответствует $A(n)$-модулю M^n.
- Если A, B — алгебры, то любой $A \times B$-модуль имеет вид $M \times N$ для некоторого A-модуля M и B-модуля N.

k	Cl_k^+	dim
0	$\mathbb{R}$	1
1	$\mathbb{C}$	2
2	$\mathbb{H}$	4
3	$\mathbb{H} \times \mathbb{H}$	4
4	$\mathbb{H}(2)$	8
5	$\mathbb{C}(4)$	8
6	$\mathbb{R}(8)$	8
7	$\mathbb{R}(8) \times \mathbb{R}(8)$	8
8	$\mathbb{R}(16)$	16

Таблица 2: Минимальные размерности модулей

Более того, на самом деле нам известны все конечно порожденные Cl_r-модули (с точностью до изоморфизма): нам понадобится тот факт, что размерность любого конечно порожденного Cl_r модуля делится на размерность минимального.

Из таблицы 2 мы сразу можем заключить следующее:

- Cl_1 действует на $\mathbb{R}^2$, поэтому на S^1 есть одно векторное поле.
- Cl_2 действует на $\mathbb{R}^4$, поэтому на S^3 есть два векторных поля.
- Cl_3 действует на $\mathbb{R}^4$, поэтому на S^3 есть три векторных поля.
- Cl_4 действует на $\mathbb{R}^8$, поэтому на S^7 есть четыре векторных поля.
- Cl_5 действует на $\mathbb{R}^8$, поэтому на S^7 есть пять векторных полей.
- Cl_6 действует на $\mathbb{R}^8$, поэтому на S^7 есть шесть векторных полей.
- Cl_7 действует на $\mathbb{R}^8$, поэтому на S^7 есть семь векторных полей.
- Cl_8 действует на $\mathbb{R}^16$, поэтому на S^{15} есть восемь векторных полей.

Это рассуждение показывает, что мы должны проследить за скачками в размерностях Cl_r-модулей. Скачки происходят при r сравнимых с 0, 1, 2, 4 по модулю 8. Обозначим

$$\sigma(r) = |\{s \mid 0 < s \leqslant r \text{ и } s \equiv 0,1,2,4 \pmod 8\}|.$$

Тогда наименьшая (ненулевая) размерность Cl_r-модуля равна $2^{\sigma(r)}$. Поэтому мы можем построить r линейно независимых векторных полей на $S^{2^{\sigma(r)}-1}$.

Доказательство теоремы Гурвица–Радона 4.4.4. Для фиксированного $n \geqslant 1$ мы должны найти наибольшее r, при котором Cl_r действует на $\mathbb{R}^n$. Запишем $n = 2^u \cdot m$, где m нечетно. Из описания всех конечно порожденных Cl_r-модулей следует, что Cl_r на самом деле действует уже на $\mathbb{R}^{2^u}$. Заметим, что при прибавлении 4 к u наибольшее возможное r увеличивается на 8. Поэтому, если мы поделим u на 4 с остатком ($u = a+4b$), то наибольшее r должно быть равно $8b+?$, где знак вопроса можно подобрать вычислением значений для $a = 0,1,2,3$. Поэтому формула $r = 8b + 2^a - 1$ подходит. □

4.6 Первые препятствия

Проведем одну из редукций на пути к доказательству теоремы Адамса 4.4.5.

Предложение 4.6.1. *Если на сфере S^{n-1} есть $r-1$ линейно независимых векторных полей, то проекция*

$$\mathbb{R}P^{un-1}/\mathbb{R}P^{un-r-1} \to \mathbb{R}P^{un-1}/\mathbb{R}P^{un-2} \cong S^{un-1}$$

обладает сечением в гомотопической категории для любого $u > (2k-2)/n$.

Почему это предложение помогает нам? Несуществование сечения в гомотопической категории часто можно показать, применив подходящую теорию когомологий E^*.

Упражнение 4.6.2. *Вычислив сингулярные когомологии, покажите, что у отображения $\mathbb{R}P^{n-1}/\mathbb{R}P^{n-2} \to S^{n-1}$ при нечетном n нет сечения. Заключите с помощью предложения 4.6.1, то на четномерной сфере нет невырожденных векторных полей.*

Определение 4.6.3. Многообразие

$$V_{n,k} = V_k(\mathbb{R}^n) = \{(u_1, \dots, u_k) \mid u_i \in \mathbb{R}^n, u_i \text{ ортонормальны}\}$$

называется **многообразием Штифеля** $V_k(\mathbb{R}^n)$. Можно считать $V_k(\mathbb{R}^n)$ вложенным в

$$\underbrace{S^{n-1} \times \cdots \times S^{n-1}}_{k},$$

и таким образом задать топологию на $V_k(\mathbb{R}^n)$. Другой способ задать топологию (который мы обсудим ниже) — это явно ввести клеточную структуру на $V_k(\mathbb{R}_n)$.

Лемма 4.6.4. *Рассмотрим отображение*

$$V_k(\mathbb{R}^n) \to S^{n-1},$$
$$(u_1, \ldots, u_k) \mapsto u_1.$$

На сфере S^{n-1} существует $k-1$ линейно независимых векторных полей тогда и только тогда, когда у отображения p_1 есть сечение.

Доказательство. Пусть s — сечение отображения p_1; оно сопоставляет каждой точке $v \in S^{n-1}$ набор из k векторов $(v, u_2, \ldots, u_k)$ на S^{n-1}, которые попарно ортогональны. Тогда векторы $u_2, \ldots, u_k$ задают (при варьировании точки v) нужные векторные поля. Обратно, если заданы векторные поля, то в каждой точке $v \in S^{n-1}$ они дают $k-1$ попарно ортогональных векторов, которые все ортогональны v — это и дает нам сечение отображения p_1. □

Замечание 4.6.5. Многообразие Штифеля $V_k(\mathbb{R}^n)$ можно рассматривать как подмногообразие в пространстве матриц размера $n \times k$, состоящее из матриц с ортонормированными столбцами. Многообразие $V_n(\mathbb{R}^n)$, таким образом, состоит из ортонормированных базисов и потому совпадает с $O(n)$. Вообще, ортогональная группа $O(n)$ действует на многообразия Штифеля $V_k(\mathbb{R}^n)$ умножением на матрицы слева (или, что то же самое, ортогональной заменой базиса в $\mathbb{R}^n$). Это действие транзитивно, и несложно вычислить стабилизатор одной точки — например, точки $(e_{n-k+1}, \ldots, e_n)$, где через e_i обозначен стандартный базис пространства $\mathbb{R}^n$. Этот стабилизатор совпадает с $O(n-k)$. Поэтому $V_k(\mathbb{R}^n) \cong O(n)/O(n-k)$ — и это гомеоморфизм. Напомним, что группа $O(n)$ состоит из двух компонент связности: $SO(n)$ и $O(n) - SO(n)$. Несложно понять, что $V_k(\mathbb{R}^n) \cong SO(n)/SO(n-k)$. Сейчас мы введем клеточную структуру на $SO(n)$ и, как следствие, получим клеточную структуру на $V_k(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим отображение $s\colon S^{n-1} \to O(n)$, сопоставляющее вектору $v \in \mathbb{R}^n$ длины 1 отражение относительно гиперплоскости, ортогональной v. Несложно написать явную формулу: $s(v)$ переводит вектор $u \in \mathbb{R}^n$ в вектор $u - 2\langle u, v\rangle v$. Понятно, что отображение s непрерывно. Нас больше интересует группа $SO(n)$, а не $O(n)$. В то же время, определитель отображения $s(v)$ равен -1, а не 1, поэтому образ s содержится в $O(n) - SO(n)$. Но если мы еще и отразим относительно какого-нибудь фиксированного вектора — скажем, $e_1 \in \mathbb{R}^n$, — то попадем уже в $SO(n)$. Поэтому определим отображение $S^{n-1} \to SO(n)$, отправляющее $v \in S^{n-1}$ в $s(v)s(e_1)$. Заметим, что $s(v) = s(-v)$, поэтому указанное отображение пропускается через каноническую проекцию $S^{n-1} \to S^{n-1}/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{R}P^{n-1}$. Получаем отображение $\rho\colon \mathbb{R}P^{n-1} \to SO(n)$.

Напомним, что мы считаем, что проективные пространства вложены друг в друга:

$$\mathbb{R}P^0 \subseteq \mathbb{R}P^1 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{R}P^{n-1}.$$

Поэтому имеются отображения $\rho\colon \mathbb{R}P^i \to SO(n)$ для всех $i < n$. Теперь для любой последовательности натуральных чисел $I = (i_1, \ldots, i_m)$, каждое из которых меньше n, можно рассмотреть отображение

$$\rho\colon \mathbb{R}P^{i_1} \times \dots \times \mathbb{R}P^{i_m} \to SO(n),$$
$$(\langle v_1\rangle, \dots, \langle v_m\rangle) \mapsto \rho(v_1)\dots\rho(v_m),$$

где в правой части подразумевается, конечно, произведение в группе $SO(n)$.

Вложения проективных пространств, указанные выше, согласованы и с клеточной структурой. А именно, пространство $\mathbb{R}P^i$ получается из пространства $\mathbb{R}P^{i-1}$ приклеиванием одной i-мерной клетки D^i. Обозначим соответствующее характеристическое отображение через $\varphi^i\colon D^i \to \mathbb{R}P^i$. Его ограничение на границу диска D^i представляет собой стандартное двулистное накрытие $\partial D^i \cong S^{i-1} \to \mathbb{R}P^{i-1} \subseteq \mathbb{R}P^i$. Разумеется, произведение φ^I отображений $\varphi^{i_1}, \dots, \varphi^{i_m}$ (для последовательности I как выше) дает характеристическое отображение $D^I \to \mathbb{R}P^I$ [единственной] клетки максимальной размерности, где

$$D^I \cong D^{i_1} \times \dots \times D^{i_m},$$
$$\mathbb{R}P^I \cong \mathbb{R}P^{i_1} \times \dots \times \mathbb{R}P^{i_m}.$$

Теперь нас будут интересовать последовательности $I = (i_1, \dots, i_m)$, в которых $n > i_1 > \dots > i_m > 0$, а также «тривиальная» последовательность (0). Мы утверждаем, что композиции $\rho\circ\varphi^I\colon D^I \to SO(n)$ для всех таких последовательностей являются характеристическими отображениями для клеточного разбиения $SO(n)$. Это утверждение проверяется довольно элементарно, но занудно: нужно проверить, что $\rho\varphi^I$ устанавливает гомеоморфизм между внутренностью D^I и ее образом, что эти образы не пересекаются и покрывают $SO(n)$, и что образ границы каждого D^I содержится в объединении клеток меньшей размерности. В частности, тривиальная последовательность (0) соответствует [единственной] 0-клетке в $SO(n)$.

Теперь несложно снабдить $V_k(\mathbb{R}^n) \cong SO(n)/SO(n-k)$ клеточной структурой как множество классов смежности. Таким образом, клетки многообразия $V_k(\mathbb{R}^n)$ индексированы последовательностями вида $I = (i_1, \dots, i_m)$, в которых $n-1 > i_1 > \dots > i_m > n-k$ (и еще одной последовательностью $(n-k)$, соответствующей нульмерной клетке $SO(n-k)$, то есть, классу смежности $1\cdot SO(n-k)$).

Нас интересует n-скелет многообразия Штифеля. Из описания выше сразу следует, что если $n-1 < (n-k+1)+(n-k)$, то $(n-1)$-скелет $V_k(\mathbb{R}^n)$ состоит из клеток $e^{n-k}, \dots, e^{n-1}$ (по одной в каждой размерности), и еще одной нульмерной клетки. Это похоже на клеточную структуру для $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Предложение 4.6.6. *Если $n > 2k-2$, то $(n-1)$-скелет $V_k(\mathbb{R}^n)$ гомеоморфен $\mathbb{R}P^{n-1}/\mathbb{R}P^{n-k-1}$.*

Доказательство. Остается проверить, что указанные клетки приклеиваются друг к другу именно таким образом, как в проективном пространстве. Для этого нужно вспомнить, откуда взялась клеточная структура на $V_k(\mathbb{R}^n)$. Подробности см. в книге Robert E. Mosher, Martin C. Tangora, *Cohomology Operations and Applications in Homotopy Theory.* □

Доказательство предложения 4.6.1. Если на S^{n-1} существует $r-1$ линейно независимых векторных полей, то по предложению 4.4.2 и на S^{un-1} существует столько же векторных полей. Поэтому у отображения $p_1\colon V_r(\mathbb{R}^{un}) \to S^{un-1}$ имеется сечение $s\colon S^{un-1} \to V_r(\mathbb{R}^{un})$. По теореме о клеточной аппроксимации отображение s гомотопно клеточному отображению s'. Размерность S^{un-1} равна $un-1$, поэтому отображение s' пропускается через $(un-1)$-скелет многообразия $V_r(\mathbb{R}^{un})$, который по предложению 4.6.6 гомеоморфен $\mathbb{R}P^{un-1}/\mathbb{R}P^{un-r-1}$. Получаем цепочку

$$S^{un-1} \xrightarrow{s'} \mathbb{R}P^{un-1}/\mathbb{R}P^{un-r-1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}P^{un-1}/\mathbb{R}P^{un-2} \cong S^{un-1},$$

композиция отображений в которых равна $p_1 \circ s'$, что гомотопно $p_1 \circ s = \mathrm{id}$. Значит, s' является искомым сечением. $\square$

5 Классы Тома

5.1 Классы Тома в сингулярных когомологиях

Классы Тома служат когомологическим объяснением ориентированности. Напомним, что

$$H^*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \cong H^*(D^n, S^{n-1}) \cong \widetilde{H}^*(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } * = n; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Выбор образующей в $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \cong Z$ соответствует выбору ориентации на $\mathbb{R}^n$.

Пусть теперь $p\colon E \to B$ — векторное расслоение ранга n. Мы будем обозначать через $0 \subseteq E$ нулевое сечение, то есть, образ отображения $B \to E$, $x \mapsto 0 \in E_x = p^{-1}(x)$. Тогда $H^n(E_x, E_x - 0) \cong \mathbb{Z}$, и выбор изоморфизма соответствует выбору ориентации в слое E_x. Наша цель — выбрать согласованные ориентации в каждом слое E_x. Это не всегда возможно, и для этого необходимо рассмотреть когомологии пары $(E, E - 0)$.

Пусть $V \subseteq B$ — открытое множество, над которым E тривиализуется. Тогда существует изоморфизм $E_V = p^{-1}(V) \cong V \times \mathbb{R}^n$ расслоений над V, при котором $E_V - 0$ переходит в $V \times \mathbb{R}^n$. Нам помогает формула Кюннета:

$$\begin{aligned} H^i(E_V, E_V - 0) &\cong H^i(V \times \mathbb{R}^n, V \times (\mathbb{R}^n - 0)) \\ &\cong H^{i-n}(V) \otimes H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \\ &\cong \begin{cases} H^{i-n}(V), & \text{если } i \geqslant n; \\ 0, & \text{если } i < n. \end{cases} \end{aligned}$$

В частности, $H^n(E_V, E_V - 0) \cong H^0(V)$. Рассмотрим элемент $\mathcal{U}_V \in H^n(E_V, E_V - 0)$, соответствующий $1 \in H^0(V)$ при этом изоморфизме. Вложение $(E_x, E_x - 0) \to (E_V, E_V - 0)$ индуцирует гомоморфизм колец когомологий для каждой точки $x \in V$, и образом элемента $\mathcal{U}_V$ в $H^*(E_x, E_x - 0)$ является образующая. Таким образом, элемент $\mathcal{U}_V$ индуцирует ориентацию в слое над каждой точкой $x \in V$.

Пусть теперь $V, W \subseteq B$ — два открытых множества, и пусть выбраны классы $\mathcal{U}_V \in H^n(E_V, E_V - 0)$ и $\mathcal{U}_W \in H^n(E_W, E_W - 0)$, которые переходят в образующие при ограничении на каждой слой E_x, то есть, задают ориентации на слоях. Потребуем, чтобы эти ориентации были согласованы, то есть, чтобы образы $\mathcal{U}_V$ и $\mathcal{U}_W$ в $H^n(E_{V\cap W}, E_{V \cap W} - 0)$ совпадали. Рассмотрим кусок длинной точной последовательность Майера–Веториса:

$$\begin{array}{ccc} H^{n-1}(E_{V\cap W}, E_{V\cap W} - 0) & = & 0 \\ \downarrow & & \\ H^n(E_{V\cup W}, E_{V\cup W} - 0) & & \\ \downarrow & & \\ H^n(E_V, E_V - 0) \oplus H^n(E_W, E_W - 0) & & \mathcal{U}_V \oplus \mathcal{U}_W \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(E_{V\cap W}, E_{V\cap W} - 0) & & 0 \end{array}$$

В силу условия согласованности, элемент $\mathcal{U}_V \oplus \mathcal{U}_W$ переходит в 0, и потому является образом элемента из $H^n(E_{V\cup W}, E_{V\cup W} - 0$. Вычисление выше показывает, что $H^{n-1}(E_{V\cap W}, E_{V\cap W} - 0) = 0$, и потому такой элемент единственный.

Кроме того, эта же точная последовательность Майера–Вьеториса показывает, что $H^*(E_{V\cup W}, E_{V\cup W} - 0)$ при $* < n$, поэтому мы можем распространить это рассуждение по индукции на объединение трех и более открытых подмножеств с выбранными классами, если они согласованы на пересечениях.

Определение 5.1.1. Пусть $E \to B$ — векторное расслоение ранга n. **Классом Тома** расслоения E называется элемент $\mathcal{U}_E \in H^n(E, E-0)$ такой, что для любого $X \in B$ элемент $i_x^*(\mathcal{U}_E)$ является образующей группы $H^n(E_x, E_x - 0)$ (здесь $i_x \colon E_x \hookrightarrow E$ — вложение слоя над точкой x).

Пример 5.1.2. Пусть $M \to S^1$ — расслоение Мебиуса. Покроем окружность двумя стягиваемыми открытыми множествами V и W. Можно выбрать класс Тома для $M|_V$ и класс Тома для $M|_W$, но они не согласованы на пересечениях, и потому не склеятся в класс Тома для M. Более того, заметим, что $H^*(M, M-0)$ — это когомологии пары, состоящей из ленты Мебиуса и ее границы. Стягивая эту границу, получаем проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$. Но мы знаем, что $H^1(\mathbb{R}P^2) = 0$, и потому класса Тома для M не существует.

Определение 5.1.3. Расслоение $E \to B$, для которого существует класс Тома, называется **ориентируемым**. При этом любой выбор класса Тома из $H^n(E, E-0; \mathbb{Z})$ называется **ориентацией** на E.

В определении класса Тома 5.1.1 мы могли взять когомологии с коэффициентами в произвольном кольце R. Два наиболее полезных случая — $R = \mathbb{Z}$ и $R = \mathbb{Z}/2$.

Теорема 5.1.4.
1. *Каждое комплексное векторное расслоение* $E \to B$ *ранга* n *обладает классом Тома в* $H^{2n}(E, E-0; \mathbb{Z})$.
2. *Каждое вещественное векторное расслоение* $E \to B$ *ранга* n *обладает классом Тома в* $H^n(E, E-0; \mathbb{Z}/2)$.

Теорема 5.1.5 (Теорема Тома об изоморфизме). *Пусть расслоение* $p \colon E \to B$ *снабжено классом Тома* $\mathcal{U}_E \in H^*(E, E-0)$. *Тогда отображение*

$$H^*(B) \to H^* + n(E, E-0),$$
$$z \mapsto p^*(z) \cup \mathcal{U}_E$$

задает изоморфизм градуированных абелевых групп.

Доказательство. Выше мы видели, что $H^*(B \times \mathbb{R}^n, B \times (\mathbb{R}^n - 0)) \cong H^{*-n}(B)$; нетрудно убедиться, что изоморфизм задается указанным отображением. Для произвольного отображения теперь можно воспользоваться точной последовательностью Майера–Вьеториса. Это предоставляется читателю в качестве упражнения. □

5.2 Пространства Тома

Группы когомологий вида $H^*(E, E_0)$ совпадают с [приведенными] группами когомологий конуса отображения $E - 0 \hookrightarrow E$. Этот конус иногда называется **пространством Тома**, но чаще это название применяется к другим геометрическим моделям того же пространства (то есть, к другому пространству, гомотопически эквивалентному этому).

Определение 5.2.1. Пусть $E \to B$ — расслоение со скалярным произведением на нем. Определим **дисковое расслоение** E:

$$D(E) = \{v \in E \mid \langle v, v \rangle \leqslant 1\},$$

и **сферическое расслоение** E:

$$S(E) = \{v \in E \mid \langle v, v \rangle = 1\}.$$

Если E — векторное расслоение [постоянного] ранга n, то $D(E) \to B$ и $S(E) \to B$ — локально тривиальные расслоение со слоями D^n и S^{n-1}, соответственно. Имеется коммутативная диаграмма расслоений над B:

$$\begin{tikzcd} S(E) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "\cong"] & D(E) \arrow[d, hook, "\cong"] \\ E - 0 \arrow[r, hook] & E \end{tikzcd}$$

Эта диаграмма показывает, что конусы отображений $E - 0 \hookrightarrow E$ и $S(E) \hookrightarrow D(E)$ слабо эквивалентны. Преимущество отображения $S(E) \hookrightarrow D(E)$ состоит в том, что оно является корасслоением (при некотором небольшом ограничении на B), и потому его конус слабо эквивалентен фактор-пространству $D(E)/S(E)$.

Определение 5.2.2. Пусть на векторном расслоении $E \to B$ задано скалярное произведение. Тогда **пространством Тома** расслоения E называется фактор-пространство $\mathrm{Th}(E) = D(E)/S(E)$.

Упражнение 5.2.3. *Если B компактно, то пространство Тома $\mathrm{Th}(E)$ гомеоморфно одноточечной компактификации пространства E.*

Пример 5.2.4. Покажем, что $\mathrm{Th}(nL \to \mathbb{R}P^k) \cong \mathbb{R}P^{n+k}/\mathbb{R}P^{n-1}$ (здесь L — тавтологическое расслоение ранга 1). Для начала определим расслоение $\mathbb{R}P^k$: $\mathbb{R}P^{n+k} - \mathbb{R}P^{n-1} \to \mathbb{R}P^k$. Здесь мы для разнообразия рассматриваем вложение $\mathbb{R}P^{n-1}$ в $\mathbb{R}P^{n+k}$, индуцированное вложением точек $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{S}^{n+k} \subseteq \mathbb{R}^{n+k+1}$ на последние n координат. Рассмотрим точку $l = [x_0 : \cdots : x_k : y_1 : \cdots : y_n] \in \mathbb{R}P^{n+k} - \mathbb{R}P^{n-1}$; хотя бы один из коэффициентов x_i отличен от нуля. Определим $\pi(l) = [x_0 : \cdots : x_k]$.

Покажем теперь, что построенное расслоение на $\mathbb{R}^k$ изоморфно nL^*. Рассмотрим $\pi(l)$ как прямую в $\mathbb{R}^{k+1}$. Определим функцию $\pi(l) \to \mathbb{R}$, отправив точку $(x_0, \ldots, x_k) \in \pi(l)$ в y_1 (и продолжив по линейности). Заметим, что это определение не зависит от выбора представителя точки $l = [x_0 : \cdots : x_k : y_1 : \cdots : y_n]$: замена его на $[\lambda x_0 : \cdots : \lambda x_k : \lambda y_1 : \cdots : \lambda y_n$ задает ту же самую функцию $(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_k) \mapsto \lambda y_1$. Заменив в определении y_1 на y_i, получим n функций на $\pi(l)$. Эти функции и задают искомый изоморфизм.

Пространство Тома в нашем случае — это одноточечная компактификация (упражнение 5.2.3), поэтому $\mathrm{Th}(nL^* \to \mathbb{R}P^k)$ гомеоморфно одноточечной компактификации пространства $\mathbb{R}P^{n+k} - \mathbb{R}P^{n-1}$, то есть, $\mathbb{R}P^{n+k}/\mathbb{R}P^{n-1}$. По следствию 2.5.4 расслоения nL и nL^* изоморфны, и, стало быть, $\mathrm{Th}(nL \to \mathbb{R}P^k) \cong \mathbb{R}P^{n+k}/\mathbb{R}P^{n-1}$.

Замечание 5.2.5. Аналогичное рассуждение показывает, что $\mathrm{Th}(nL^* \to \mathbb{C}P^k) \cong \mathbb{C}P^{n+k}/\mathbb{C}P^{n-1}$.

Замечание 5.2.6. Существует альтернативное определение пространства Тома, не зависящее от скалярного произведения на расслоении. Для расслоения $E \to B$ рассмотрим расслоение $\mathbb{P}(E) \to B$ проективных пространств над B. Тогда можно определить $\mathrm{Th}(E) = \mathbb{P}(E \oplus \underline{1})/\mathbb{P}(E)$. Покажем, что это определение эквивалентно определению 5.2.2.

Заметим, что для векторного пространства V определено каноническое вложение $V \hookrightarrow \mathbb{P}(V \oplus \mathbb{R})$, $v \mapsto \langle v \oplus 1 \rangle$. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{P}(V \oplus \mathbb{R}) \arrow[d] \\ \widehat{V} \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{P}(V \oplus \mathbb{R})/\mathbb{P}(V) \end{tikzcd}$$

Перенося эту конструкцию на случай расслоений, видим, что пушаут диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}(E) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{P}(E \oplus \underline{1}) \\ B & \end{tikzcd}$$

выглядит как одноточечная компактификация каждого слоя E. Поэтому $\mathbb{P}(E \oplus \underline{1})/\mathbb{P}(E)$ стягивает добавленные точки во всех слоях в одну. Это, очевидно, в точности то, что происходит в определении 5.2.2.

Упражнение 5.2.7. *Свяжите пары* $(E, E-0)$ *и* $(\mathbb{P}(E\oplus\underline{1}), \mathbb{P}(E))$ *напрямую, построив естественные отображения из каждой из них в пару* $(\mathbb{P}(E \oplus \underline{1}), \mathbb{P}(E \oplus \underline{1}) - B)$*, где* $B \hookrightarrow \mathbb{P}(E \oplus \underline{1})$ *— сечение, выбирающее в каждом слое* $\mathbb{P}(E_x \oplus \mathbb{R})$ *выделенную прямую* $\mathbb{R}$.

Предложение 5.2.8. *Если* $E \to B$ *— вещественное расслоение, то* $\mathrm{Th}(E \oplus \underline{n}) \cong \Sigma^n \mathrm{Th}(E)$ *Если* $E \to B$ *— комплексное расслоение, то* $\mathrm{Th}(E \oplus \underline{n}) \cong \Sigma^{2n} \mathrm{Th}(E)$.

Доказательство. Докажем вещественное утверждение в предположении, что на $E \to B$ выбрано скалярное произведение. Заметим, что

$$\begin{aligned} D(E \oplus \underline{n}) &\cong D(E) \times D^n, \\ S(E \oplus \underline{n}) &\cong (S(E) \times D^n) \coprod_{S(E)\times S^{n-1}} (D(E) \times S^{n-1}). \end{aligned}$$

Но тогда

$$D(E \oplus \underline{n})/S(E \oplus \underline{n}) \cong (D(E)/S(E)) \wedge (D^n/S^{n-1}) \cong \mathrm{Th}(E) \wedge S^n.$$

□

Замечание 5.2.9. Предложение 5.2.8 позволяет нам определить пространства Тома виртуальных расслоений: а именно, если B компактно, то любое расслоение $E \to B$ можно вложить в тривиальное. Пусть $E \oplus Q \cong \underline{N}$; положим $\mathrm{Th}(-E) = \Sigma^{-N} \mathrm{Th}(Q)$. Отрицательная надстройка, разумеется, должна происходить в подходящей категории спектров. Несложно проверить, что это определение не зависит от выбора вложения E в тривиальное расслоение. Если теперь $\alpha \in KO(X)$, можно записать $\alpha = E{-}F$, вложить F в тривиальное расслоение и написать $F \oplus Q \cong \underline{N}$, после чего положить $\mathrm{Th}(\alpha) = \Sigma^{-N} \mathrm{Th}(E \oplus Q)$.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}P^{a+b}/\mathbb{R}P^a$. На нем есть клеточная структура: нулевая клетка, а также по одной клетке во всех размерностях от $a+1$ до $a+b$. Клеточная структура пространства $\mathbb{R}P^{a+b+r}/\mathbb{R}P^{a+r}$ очень похожа, только клетки живут в размерностях от $a+1+r$ до $a+b+r$. Возникает естественный вопрос: имеет ли место изоморфизм

$$\Sigma^r(\mathbb{R}P^{a+b}/\mathbb{R}P^a) \cong \mathbb{R}P^{a+b+r}/\mathbb{R}P^{a+r}?$$

Пространства Тома помогут нам найти некоторые достаточные условия для существования такого изоморфизма.

Лемма 5.2.10. *Пусть* $\lambda = [L] - 1 \in \widetilde{KO}(\mathbb{R}P^n)$*. Тогда* $\lambda^2 = -2\lambda$*, и* $\lambda^{n+1} = 0$*. Как следствие,* $2^n\lambda = 0$.

Доказательство. Расслоение L^2 тривиально, откуда сразу следует, что $\lambda^2 = -2\lambda$. Для доказательства второго равенства покроем $\mathbb{R}P^n$ стягиваемыми множествами $U_0, \dots, U_n$ (главные открытые множества, соответствующие однородным координатам на $\mathbb{R}P^n$). Элемент $\lambda \in KO(\mathbb{R}P^n, *)$ поднимается до элемента $\lambda_i \in KO(\mathbb{R}P^n, U_i)$. Поэтому λ_{n+1} равно образу $\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_n$ при естественном отображении $KO(\mathbb{R}P^n, U_0 \cup \dots \cup U_n) \to KO(\mathbb{R}P^n)$. Но $U_0 \cup \dots \cup U_n = \mathbb{R}P^n$, поэтому указанное отображение нулевое. □

Предложение 5.2.11. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$ *такое, что* $r([L]-1) = 0$ *в* $\widetilde{KO}(\mathbb{R}P^{b-1})$. *Тогда имеется стабильная гомотопическая эквивалентность*

$$\Sigma^r(\mathbb{R}P^{a+b}/\mathbb{R}P^a) \cong \mathbb{R}P^{a+b+r}/\mathbb{R}P^{a+r}.$$

Доказательство. Пример 5.2.4 показывает, что $\mathbb{R}P^{a+b}/\mathbb{R}P^a \cong \mathrm{Th}((a+1)L \to \mathbb{R}P^{b-1})$ и $\mathbb{R}P^{a+b+r}/\mathbb{R}P^{a+r} \cong \mathrm{Th}((a+1+r)L \to \mathbb{R}P^{b-1})$. В то же время, условие $r([L]-1) = 0$ означает, что $rL \oplus \underline{s} \cong \underline{r} \oplus \underline{s}$ для некоторого $s \geqslant 0$. Поэтому

$$\begin{aligned}\mathrm{Th}((a+1)L \to \mathbb{R}P^{b-1}) &\cong \Sigma^{-r-s}\,\mathrm{Th}((a+1)L \oplus \underline{r+s} \to \mathbb{R}P^{b-1})\\ &\cong \Sigma^{-r-s}\,\mathrm{Th}((a+1+r)L \oplus \underline{s} \to \mathbb{R}P^{b-1})\\ &\cong \Sigma^{-r}\,\mathrm{Th}((a+1+r)L \to \mathbb{R}P^{b-1}).\end{aligned}$$

□

Из леммы 5.2.10 и предложения 5.2.11 теперь следует, что

$$\Sigma^{2^{b-1}}(\mathbb{R}P^{a+b}/\mathbb{R}P^a) \cong \mathbb{R}P^{a+b+2^{b-1}}/\mathbb{R}P^{a+2^{b-1}}.$$

Однако, это не лучший результат такого сорта: Адамс нашел точный порядок элемента $[L]-1 \in \widetilde{KO}(\mathbb{R}P^{b-1})$.

5.3 Классы Тома и теория пересечений

В этом разделе мы будем работать с комплексными расслоениями, и тогда у каждого расслоения есть канонический класс Тома. При желании можно работать с вещественными расслоениями, но рассматривать классы Тома в когомологиях с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$, или как-то иначе учитывать наличие (или отсутствие) ориентации на расслоениях.

Если $E \to B$ — комплексное расслоение ранга n, то есть канонический класс Тома $\mathcal{U}_E \in H^{2n}(E, E-0)$.

Предложение 5.3.1. 1. *Пусть* $E \to B$ — *комплексное векторное расслоение ранга* n, $f\colon A \to B$. *Рассмотрим декартов квадрат*

$$\begin{array}{ccc} f^* & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

Отображение $\bar{f}^*\colon H^{2n}(E, E-0) \to H^{2n}(f^*E, f^*E-0)$ *отправляет* $\mathcal{U}_E$ *в* $\mathcal{U}_{f^*E}$.

2. *Пусть* $E \to B$ — *векторное расслоение ранга* n, $E' \to B$ — *векторное расслоение ранга* k, *с классами Тома* $\mathcal{U}_E \in H^{2n}(E, E-0)$, $\mathcal{U}_{E'} \in H^{2k}(E', E'-0)$, *соответственно. Тогда* $\mathcal{U}_E \times \mathcal{U}_{E'} = \mathcal{U}_{E\oplus E'}$ *в* $H^{2n+2k}(E \times E', (E \times E')-0)$.

Доказательство. По определению, класс Тома векторного расслоения $E \to B$ — это единственный класс в $H^{2n}(E, E-0)$, который в каждом слое E_x ограничивается на каноническую образующую группы $H^{2n}(E_x, E_x - 0)$. Это сводит вопрос к случаю. когда $B = \mathrm{pt}$; Первое утверждение теперь очевидно, а второе получается применением следующей леммы. □

Лемма 5.3.2. *Пусть* V, W — *вещественные векторные пространства размерностей* n *и* k, *соответственно. Предположим, что на* V *и на* W *выбраны ориентации, а на* $V\oplus W$ *выбрана ориентация, являющаяся их произведением. Пусть* $U_V \in H^n(V, V-0)$, $U_W \in H^k(W, W-0)$, $U_{V\oplus W} \in H^{n+k}(V \oplus W, (V \oplus W)-0)$ — *соответствующие классы. Тогда* $U_{V\oplus W} = U_V \times U_W$.

Доказательство. Пусть $v_1, \dots, v_n$ — ориентированный базис в пространстве V, и пусть $\sigma_V\colon \Delta^n \to V$ — аффинный симплекс с вершинами $0, v_1, \dots, v_n$ (в указанном порядке). Обозначим через σ_V^t симплекс, полученный из σ_V параллельным переносом так, чтобы 0 попал во внутренность σ_V^t. Тогда $[\sigma_V^t]$ — образующая группы гомологий $H_n(V, V-0)$, и любой относительный коцикл в $C^*_{\mathrm{sing}}(V, V-0)$, который равен 1 на σ_V^t, дает образующую группы $H^n(V, V-0)$.

Выберем теперь ориентированный базис $w_1, \dots, w_k$ в пространстве W и заметим, что $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_k$ — [правильно] ориентированный базис пространства $V \oplus W$. Рассмотрим аффинный симплекс

$$\sigma_{V\oplus W}\colon \Delta^{n+k} \to V \oplus W$$

с вершинами $0, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_k$ в указанном порядке. Снова перенесем его так, чтобы 0 оказался внутри симплекса $\sigma^t_{V\oplus W}$. Пусть $\pi_1\colon V\oplus W \to V$, $\pi_2\colon V\oplus W \to W$ — канонические проекции. Тогда

$$\begin{aligned}(U_V \times U_W)(\sigma^t_{V\oplus W}) &= (\pi_1^* U_V)(\sigma^t_{V\oplus W}[01\dots n]) \cdot (\pi_2^* U_W)(\sigma^t_{V\oplus W}[n\dots(n+k)]) \\ &= U_V(\pi_1 \circ \sigma^t_{V\oplus W}[01\dots n]) \cdot U_W(\pi_2 \circ \sigma^t_{V\oplus W}[n\dots(n+k)]).\end{aligned}$$

Очевидно, что симплекс $\pi_1 \circ \sigma^t_{V\oplus W}[01\dots n]$ лежит в том же классе гомологий, что и σ_V^t, и поэтому значение U_V на этом симплексе равно 1. Аналогично, симплекс $\pi_2 \circ \sigma^t_{V\oplus W}[n\dots(n+k)]$ лежит в том же классе гомологий, что и σ_W^t, и поэтому значение U_W на нем равно 1. Из равенства $1 \cdot 1 = 1$ теперь следует, что $U_V \times U_W$ удовлетворяет условию, определяющему класс $U_{V\oplus W}$. □

Теперь мы можем определить фундаментальные классы подмногообразий. Пусть M — комплексное многообразие,r Z — регулярно вложенное подмногообразие комплексной коразмерности c, $j\colon Z \to M$ — вложение. Слова «регулярно вложенное» здесь означают, что существуют окрестность $U \subseteq Z$ в M и гомеоморфизм $\varphi\colon U \to N$ между U и нормальным расслоением $N = N_{M/Z}$ такие, то φ отправляет Z в нулевое сечение N.

Тогда $H^*(U, U-Z) \cong H^*(N, N-0)$. Комплексное расслоение $N \to Z$ имеет ранг c и снабжено каноническим классом Тома $\mathcal{U}_n \in H^{2c}(N, N-0)$, и поэтому по теореме Тома об изоморфизме 5.1.5 есть канонический изоморфизм $H^{*-2c}(Z) \cong H^*(N, N-0)$. По аксиоме вырезания, кроме того, $H^*(M, M-Z) \cong H^*(U, U-Z)$. Мы получили изоморфизмы

$$H^{*-2c}(Z) \to H^i(N, N-0) \cong H^i(U, U-Z) \leftarrow H^i(M, M-Z).$$

Напишем теперь длинную точную последовательность для пары $(M, M-Z)$:

$$\begin{tikzcd}
\dots & H^*(M, M-Z) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^*(M) \arrow[r] & H^*(M-Z) \arrow[r] & \dots \\
& H^{*-2c}(Z) \arrow[ur, "j_!"] & & &
\end{tikzcd}$$

Указанное отображение $j_!$ (полученное композицией) называется **пушфорвардом**, или **отображением Гизина**. Мы получили **точную последовательность Гизина**:

$$\dots \to H^{i-1}(M-Z) \to H^{i-2c}(Z) \to H^i(M) \to H^i(M-Z) \to \dots.$$

Определение 5.3.3. Пусть $j\colon Z \to M$ — регулярно вложенное подмногообразие размерности c в комплексном многообразии M, $j_!$ — отображение Гизина, построенное выше, $1 \in H^0(Z)$. Определим **фундаментальный класс** подмногообразия Z следующим образом:

$$[Z]_M = j_!(1) \in H^{2c}(M).$$

Определим **относительный фундаментальный класс** $[Z]_{rel} \in H^{2c}(M, M-Z)$ как образ $1 \in H^0(Z)$ при изоморфизме $H^0(Z) \in H^{2c}(M, M-Z)$. По определению тогда $j^*([Z]_{rel}) = [Z]$, где j^* — отображение на когомологиях, индуцированное вложением $(M, \varnothing) \hookrightarrow (M, M-Z)$.

Пример 5.3.4. Нетрудно проверить, что относительный фундаментальный класс $[0]_{rel} \in H^{2d}(\mathbb{C}^d, \mathbb{C}^d - 0)$ начала координат в $\mathbb{C}^d$ — это каноническая образующая, происходящая из ориентации на $\mathbb{C}^d$.

Пример 5.3.5. Пусть M — комплексное многообразие размерности d. Если точки $a, b \in M$ можно соединить путем в M, то $[a] = [b]$. Действительно, вопрос сводится к случаю, когда a и b лежат в открытом подмножестве $U \subseteq M$, гомеоморфном $\mathbb{C}^d$. Пусть I — отрезок, соединяющий a и b в U. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H^*(M, M-a) \arrow[r] \arrow[d] & H*(M, M-I) \arrow[d] & H^*(M, M-b) \arrow[l] \arrow[d] \\
H*(U, U-a) \arrow[r] & H^*(U, U-I) & H^*(U, U-b), \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

все стрелки которой являются изоморфизмами. Несложно показать, что $[a]_{rel,U}$ и $[b]_{rel,U}$ переходят в один и тот же элемент $H^*(U, U-I)$.

Пример 5.3.6. Пусть M — компактное связное многообразие. Если $a \in M$, то $[a] \in H^{2d}(M)$ является образующей.

Теорема 5.3.7. *Пусть M — компактное связное многообразие. Предположим, что Z, W — регулярно вложенные подмногообразия в M, которые пересекаются трансверсально в d точках. Тогда*

1. $[Z]_M \cup [W]_M = d \cdot [*]_M$;
2. $j^*[Z]_M = d \cdot [*]_W$, *где* $j\colon W \hookrightarrow M$ *— вложение.*

Доказательство. Пусть $\dim Z = k$, $\dim W = l$ (и потому $\dim M = k + l$), $Z \cap W = \{p_1, \dots, p_d\}$, и для каждого i выберем эвклидову окрестность U_i точки p_i так, что $U_i \cap U_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Рассмотрим коммутативную диаграмму.

$$\begin{tikzcd}
H^k(M, M-Z) \oplus H^l(M, M-W) \arrow[r] \arrow[d, "\cup_{rel}"] & H^k(M) \otimes H^l(M) \arrow[d, "\cup"] \\
H^{k+l}(M, M-(Z \cap W)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^{k+l}(M) \\
H^{k+l}(M, M-\{p_1, \dots, p_d\}) & \\
\bigoplus_r H^{k+l}(M, M-\{p_r\}) \arrow[u, "\cong"] \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

Мы знаем, что относительные классы $[Z]_{rel}$ и $[W]_{rel}$ отправляются в $[Z]$ и $[W]$, соответственно. Поэтому достаточно показать, что проекция $[Z]_{rel} \cup [W]_{rel}$ в $H^{k+l}(M, M-\{p_r\})$ равна $[p_r]_{rel}$. Из этого сразу будет следовать, что $[Z] \cup [W] = [p_1] + \dots + [p_d] \in H^{k+l}(M)$, и по примеру 5.3.5 это равно $d \cdot [*]$.

Аксиома вырезания показывает, что мы можем везде заменить M на U_r, Z на $Z \cap U_r$, W на $W \cap U_r$, и остается показать, что после этого $[Z]_{rel} \cup [W]_{rel} = [p_r]_{rel}$. Но после такой замены можно считать, что $M = \mathbb{C}^{k+l} \cong \mathbb{C}^l \times \mathbb{C}^k$. После возможного уменьшения окрестности можно считать, что $Z = \mathbb{C}^k$, $W = \mathbb{C}^l$ (трансверсально пересекающиеся в нуле). Но тогда (по определению!) $[\mathbb{C}^k]_{rel}$ совпадает с классом Тома расслоения $\underline{l} \to \mathbb{C}^k$, а $[\mathbb{C}^l]_{rel}$ совпадает с классом Тома расслоения $\underline{k} \to \mathbb{C}^l$. Эти расслоения тривиальны, поэтому получаются пулбэком с точки. Естественность класса Тома (предложение 5.3.1) показывает, что $[\mathbb{C}^k]_{rel} \cup [\mathbb{C}^l]_{rel} = \pi_1^*(\mathcal{U}_1) \cup \pi_2^*(\mathcal{U}_2)$, где $\mathcal{U}_1 \in H^{2l}(\mathbb{C}^l, \mathbb{C}^l - 0)$, $\mathcal{U}_2 \in H^{2k}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^k - 0)$ — канонические классы, а $\pi_1 \colon \mathbb{C}^l \times \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^l$, $\pi_2 \colon \mathbb{C}^l \times \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ — проекции. Но $\pi_1^*(\mathcal{U}_1) \cup \pi_2^*(\mathcal{U}_2)$ — это просто внешнее произведение $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, и по лемме 5.3.2 оно совпадает с канонической образующей в $H^{2k+2l}(\mathbb{C}^{k+l}, \mathbb{C}^{k+l} - 0)$, которая в свою очередь совпадает с $[0]_{rel}$ (пример 5.3.4). Доказательство первой части закончено.

Доказательство второго утверждение следует той же схеме, и оставляется читателю в качестве упражнения. $\square$

Замечание 5.3.8. Приведенное доказательство теоремы 5.3.7 почти всюду использовало лишь основные свойства классов Тома и аксиомы, которые выполняются в любой теории когомологий. Единственное сомнительное место — доказательство леммы 5.3.2, но и его можно спасти. Действительно, мы знаем, что

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - \mathbb{C}^k) &= H^*(\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}, \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^{n-k} - 0)) \\ &= H^*(\mathbb{C}^{n-k}, \mathbb{C}^{n-k} - 0) \\ &= H^*(D^{2n-2k}, \partial D^{2n-2k}) \\ &\cong \widetilde{H}^*(S^{2n-2k}). \end{aligned}$$

Аналогично, $H^*(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - \mathbb{C}^{n-k} \cong \widetilde{H}^*(S^{2k})$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - \mathbb{C}^k) \otimes H^*(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - \mathbb{C}^{n-k}) & \xrightarrow{\mu} & H^*(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - 0) \\ \| & & \| \\ \widetilde{H}^*(S^{2n-2k}) \otimes \widetilde{H}^*(S^{2k}) & \xrightarrow{\mu} & \widetilde{H}^*(S^{2n}). \end{array}$$

Она показывает, что для доказательства леммы 5.3.2 достаточно лишь знания того, что

$$\mu(\sigma^{2n-2k}(1) \otimes \sigma^{2k}(1)) = \sigma^{2n}(1).$$

Иными словами, наше умножение должно хорошо себя вести по отношению к надстройке.

Пример 5.3.9. Пусть $Z \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ — комплексное подмногообразие коразмерности c. Тогда $[Z] \in H^{2c}(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}$. В качестве образующей этой группы выступает $[\mathbb{C}P^{n-c}$, и потому $[Z] = d \cdot [\mathbb{C}P^{n-c}]$ для некоторого d. Это число d называется **степенью** подмногообразия Z.

Пусть теперь $\mathbb{C}P^c$ — векторное подпространство в $\mathbb{C}P^n$ размерности c. В общем положении оно пересекает Z трансверсально в конечном числе точек, например, e. По теореме 5.3.7 тогда $[Z] \cup [\mathbb{C}P^c] = e \cdot [*]$. С другой стороны, $[\mathbb{C}P^{n-c}] \cup [\mathbb{C}P^c] = [*]$, и потому $d[\mathbb{C}P^{n-c}] \cup [\mathbb{C}P^c] = d[*]$. Отсюда следует что $d = e$: степень подмногообразия — это количество точек пересечения с общим векторным подпространством дополнительной размерности.

При некотором желании можно доказать и следующую теорему.

Теорема 5.3.10. *Пусть M — связное комплексное многообразие, Z, W — регулярно вложенные подмногообразия в M, пересекающиеся трансверсально. Тогда*

1. $[Z]_M \cup [W]_M = [Z \cap W]$*;*
2. $j^*([Z]_M) = [Z \cap W]$*, где* $j \colon W \hookrightarrow M$ *— вложение.*

5.4 Классы Тома в K-теории

Замечание 5.3.8 показывает, что после построения классов Тома мы не очень-то использовали конкретный вид теории когомологий (сингулярных).

Определение 5.4.1. **Мультипликативная обобщенная теория когомологий** — это обобщенная теория когомологий $\mathcal{E}$ вместе с отображениями произведения

$$\mathcal{E}^p(X, A) \otimes \mathcal{E}^q(Y, B) \to \mathcal{E}^{p+q}(X \times Y, X \times B \cup A \times Y),$$

удовлетворяющими условиям

- естественности;
- наличия единицы в $\mathcal{E}^0(\mathrm{pt}, \varnothing) = \mathcal{E}^0(\mathrm{pt})$;
- ассоциативности;
- согласованности со связывающими гомоморфизмами δ.

Пусть далее $\mathcal{E}$ — некоторая мультипликативная обобщенная теория когомологий.

Определение 5.4.2. Пусть $E \to B$ — комплексное векторное расслоение ранга n. **Класс Тома** для E — это элемент $\mathcal{U}_E \in \mathcal{E}^{2n}(E, E - 0)$ такой, что $i^*(\mathcal{U}_E)$ переходит в $1 \in \mathcal{E}^0(\mathrm{pt})$ при изоморфизме

$$\mathcal{E}^{2n}(E_x, E_x - 0) \cong \mathcal{E}^{2n}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - 0) \cong \mathcal{E}^{2n}(D^{2n}, \partial D^{2n}) \cong \widetilde{\mathcal{E}}^{2n}(S^{2n}) \cong \widetilde{\mathcal{E}}^0(S^0) = \mathcal{E}^0(\mathrm{pt}),$$

где $i\colon E_x \hookrightarrow E$ — вложение слоя.

Определение 5.4.3. **Комплексная ориентация** для теории $\mathcal{E}$ — это выбор для каждого комплексного расслоения $E \to B$ ранга n класса Тома $\mathcal{U}_E \in \mathcal{E}^{2n}(E, E-0)$ так, что выполняются условия

- естественность: $\mathcal{U}_{f^*E} = f^*(\mathcal{U}_E)$ для любого $f\colon A \to B$;
- мультипликативность: $\mathcal{U}_{E \oplus E'} = \mathcal{U}_E \cdot \mathcal{U}_{E'}$.

Замечание 5.4.4. Доказанные нами результаты (изоморфизм Тома, точные последовательности Гизина, фундаментальные классы комплексных подмногообразий, связь с теорией пересечений) практически без изменений переносятся на любую теорию с комплексной ориентацией. Отметим, что такие теории образуют достаточно узкий класс среди всех обобщенных теорий когомологий.

Теорема 5.4.5. *Комплексная K-теория допускает комплексную ориентацию.*

Замечание 5.4.6. Почему это важно? Наличие в некоторой теории когомологий фундаментальных классов многообразий (с хорошими свойствами) говорит нам, что это теория несет в себе геометрическую информацию. Пусть, скажем $Z \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ — комплексное подмногообразие коразмерности c. Выше мы видели, что у него есть фундаментальный класс $[Z] \in H^{2c}(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}$ — то есть, одно целое число. Теорема 5.4.5 говорит, что у Z есть фундаментальный класс в $K^{2c}(\mathbb{C}P^n)$; позже мы увидим, что эта группа изоморфна $\mathbb{Z}^{n+1}$. Поэтому есть надежда, что этот фундаментальный класс несет больше информации, чем одно целое число (конечно, пока непонятно, так ли это — может быть, все его $n+1$ компонент являются функциями от одного целого числа).

Для доказательства теоремы 5.4.5 нам нужно построить для каждого комплексного векторного расслоения $E \to B$ ранга n класс Тома в $K^{2n}(E, E - 0) \cong K^0(E, E - 0)$ (в силу периодичности Ботта). Для этого нам нужна техника работы с относительной K-теорией.

Определение 5.4.7. Комплекс $E_\bullet$ векторных расслоений на X называется **точным на** A, если для любой точки $x \in A$ комплекс векторных расслоений $(E_x)_\bullet$ точен. Пусть $\mathcal{F}(X, A)$ — свободная абелева группа на множестве классов изоморфизма ограниченных комплексов векторных расслоений на X, точных на A. Определим $\mathcal{K}(X, A)$ как фактор-группу $\mathcal{F}(X, A)$ по следующим соотношениям:

1. $[E_\bullet \oplus F_\bullet] = [E_\bullet] + [F_\bullet]$;

2. если $E_\bullet$ точен на X, то $[E_\bullet] = 0$;

3. если $\mathcal{E}_\bullet$ — ограниченный комплекс векторных расслоений на $X \times I$, который точен на $A \times I$, то $[\mathcal{E}|_{X\times 0}] = [\mathcal{E}|_{X\times 1}]$./

Заметим, что $\mathcal{K}$ продолжается до точного контравариантного функтора (на категории пар топологических пространств) посредством пулбэка векторных расслоений.

Замечание 5.4.8. Поясним смысл третьего типа соотношений в определении группы $\mathcal{K}(X, A)$. Пусть $d\colon E \to F$ — морфизм векторных расслоений на X. Обозначим через $\mathrm{Mor}_{VB}(E, F) \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}}(E, F)$ подпространство, состоящее из морфизмов векторных расслоений. **Деформацией морфизма** d называется непрерывное отображение из отрезка $[0, 1]$ в $\mathrm{Mor}_{VB}(E, F)$, переводящее 0 в d. Пусть $\pi\colon X \times [0, 1] \to X$ — каноническая проекция. Каждой деформации $H\colon [0, 1] \to \mathrm{Mor}_{VB}(E, F)$ морфизма d можно сопоставить морфизм векторных расслоений $\pi^*E \to \pi^*F$ над $X \times [0, 1]$:

$$(\pi^*E)_{(x,t)} \cong E_x \xrightarrow{H(t)_x} F_x \cong (\pi^*E)_{(x,t)}$$

Из условия $H(0) = d$ следует, что ограничение полученного морфизма на $X \times \{0\}$ совпадает с d. Нетрудно понять, что верно и обратное: по каждому морфизму $\pi^*E \to \pi^*F$ векторных расслоений над $X\times[0, 1]$, ограничение которого на $X\times\{0\}$ совпадает с d, можно восстановить деформацию морфизма d.

Таким образом, морфизм $I \to \mathrm{Mor}_{VB}(E, F)$, отправляющий 0 в d, — это то же самое, что морфизм расслоений $\pi^*E \to \pi^*F$, равный d на $X \times \{0\}$.

Аналогично, деформацию дифференциала на комплексе $E_\bullet$ векторных расслоений можно рассматривать с двух точек зрения: как набор деформаций всех дифференциалов с условием, что в любой времени t деформированные отображения образуют цепной комплекс, или как цепной комплекс, состоящий из векторных расслоений π^*E_i. Эти две точки зрения эквивалентны.

Если теперь $(E_\bullet, d)$ — какой-нибудь цепной комплекс векторных расслоений, и d' — деформация дифференциала d (точнее: существует деформация H такая, что $H(0) = d$ и $H(1) = d'$), то вторая точка зрения позволяет применить третье соотношение из определения 5.4.7 и получить, что $[(E_\bullet, d)] = [(E_\bullet, d')]$ в $\mathcal{K}(X, A)$ (если, конечно, требовать, что в каждый момент t дифференциал оказывается точным на A). Но если X паракомпактно и хаусдорфово, то любое расслоение на $X \times I$ приходит с X (следствие 2.7.2). Поэтому всякое соотношение третьего вида из определения 5.4.7 имеет такой вид. Иными словами, если X — паракомпактное хаусдорфово пространство, то третье соотношение можно заменить на

- Если $(E_\bullet, d)$ — ограниченный цепной комплекс, d' — деформация d, то $[(E_\bullet, d)] = [(E_\bullet, d')]$.

Лемма 5.4.9. *Пусть* $E_\bullet$ *— ограниченный комплекс векторных расслоений на* X*, точный на* A*. Тогда* $[E_\bullet] = -[\Sigma E_\bullet]$ *в* $\mathcal{K}(X, A)$*. Здесь* $\Sigma E_\bullet$ *— комплекс, сдвинутый вправо на* 1*:* $(\Sigma E)_{i+1} = E_i$.

Доказательство. Заметим, что если $V_\bullet, W_\bullet$ — точные комплексы векторных пространств, и $f\colon V_\bullet \to W_\bullet$ — морфизм комплексов, то конус Cf также точен (в силу наличия длинной точной последовательности для гомологий). Из этого следует, что если $E_\bullet \to F_\bullet$ — морфизм комплексов векторных расслоений на X, точных на A, то конус этого морфизма также точен на A.

Пусть C — конус тождественного отображения $\mathrm{id}\colon E_\bullet \to E_\bullet$; по определению $C_n = E_n \oplus E_{n-1}$, и $d(a, b) = (da + \mathrm{id}(b), -db)$. Рассмотрим деформацию комплекса C, в которой $d(a, b) = (da + (1-t)\,\mathrm{id}(b), -db)$. В ней C_t — это конус отображения $(1-t)\,\mathrm{id}$. Для каждого t комплекс C_t точен на A. При $t = 0$, разумеется, $C_0 = C$, а при $t = 1$ получаем $C_t = E_\bullet \oplus \Sigma E_\bullet$. Поэтому

$$[C] = [C_0] = [C_1] = [E_\bullet] + [\Sigma E_\bullet] \in \mathcal{K}(X, A).$$

С другой стороны, C точен на X (это конус тождественного отображения), и потому $[C] = 0$. □

Замечание 5.4.10. Точно так же доказывается, что если Cf — конус морфизма $f\colon E_\bullet \to F_\bullet$ между комплексами векторных расслоений на X, точными на A, то $[Cf] = [F_\bullet] - [E_\bullet] \in \mathcal{K}(X, A)$.

Определение 5.4.11. Комплекс $D_i(E)$ вида

$$\dots \to 0 \to E \xrightarrow{\mathrm{id}} E \to 0 \to \dots$$

называется **элементарным комплексом**. Здесь E — векторное расслоение на X, и комплекс отличен от нулевого только в двух соседних позициях i и $i + 1$.

Предложение 5.4.12. *Пусть* X *— паракомпактное хаусдорфово пространство,* $E_\bullet$ *— ограниченный комплекс векторных расслоений на* X*. Если* $E_\bullet$ *точен, то* $E_\bullet$ *раскладывается в прямую сумму элементарных комплексов.*

Доказательство. Упражнение (см. доказательство аналогичного факта в гомологической алгебре). □

Замечание 5.4.13. В силу предложения 5.4.12 соотношение (2) из определения 5.4.7 можно заменить на такое: $[D_i(E)] = 0$ для любого векторного расслоения E на X и для любого целого i.

Предложение 5.4.14. *Пусть* X *— паракомпактное хаусдорфово пространство. Пусть дана точная последовательность*

$$0 \to E'_\bullet \to E_\bullet \to E''_\bullet \to 0$$

комплексов векторных расслоений, в которой каждый комплекс точен на A*. Тогда* $[E_\bullet] = [E'_\bullet] + [E''_\bullet] \in \mathcal{K}(X, A)$.

Доказательство. Обозначим через $C_\bullet$ конус вложения $E'_\bullet \hookrightarrow E_\bullet$. Возникает канонический морфизм $C_\bullet \to E''_\bullet$; пусть $K_\bullet$ — его ядро. По замечанию 5.4.10 тогда $[C_\bullet] = [E_\bullet] - [E'_\bullet]$. С другой стороны, $K_\bullet$ — точный комплекс, и потому, с одной стороны, следующая лемма 5.4.15 показывает, что $C_\bullet \cong K_\bullet \oplus E''_\bullet$, откуда $[C_\bullet] = [E''_\bullet] + [K_\bullet]$, а с другой стороны, $[K_\bullet] = 0$. Потому $[E''_\bullet] = [C_\bullet] = [E_\bullet] - [E'_\bullet]$, и предложение доказано. □

Лемма 5.4.15. *Пусть* X *— паракомпактное хаусдорфово пространство. Пусть* $j\colon K_\bullet \hookrightarrow C_\bullet$ *— вложение ограниченных комплексов векторных расслоений на* X. *Предположим, что комплекс* $K_\bullet$ *точен. Тогда вложение* j *расщепляется: существует морфизм* $\pi\colon C_\bullet \to K_\bullet$ *такой, что* $\pi \circ j = \mathrm{id}$.

Доказательство. Можно считать, что $K_i = C_i = 0$ при $i < 0$. По предложению 5.4.12 мы можем записать K в виде прямой суммы комплексов вида $D_i(A_i)$, $i = 0, \dots, N$, для некоторых векторных расслоений $A_0, \dots, A_N$ на X. Выберем расщепление $\pi_0\colon C_0 \to A_0$ для вложения расслоений $A_0 \to C_0$. Далее, рассмотрим вложение $A_1 \hookrightarrow A_0 \oplus A_1 \cong K_1 \hookrightarrow C_1$. Выберем для него расщепление $\rho_1\colon C_1/A_0 \hookrightarrow A_1$. Теперь положим $\pi_1\colon C_1 \to K_1 \cong A_0 \oplus A_1$ равным сумме морфизмов $C_1 \to C_1/A_0 \xrightarrow{\rho_1} A_1$ и $C_1 \to C_0 \xrightarrow{\pi_0} A_0$. Нетрудно проверить, что π_1 расщепляет морфизм j_1. Эту конструкцию можно продолжить по индукции. □

Предложение 5.4.16. *Для любой пары* (X, A) *отображение* $\pi^*\colon \mathcal{K}(X, A) \to \mathcal{K}(X \times I, A \times I)$ *является изоморфизмом.*

Доказательство. По определению $\mathcal{K}$ для вложений $j_0, j_1\colon (X, A) \hookrightarrow (X \times I, A \times I)$ выполняется равенство $j_0^* = j_1^*$. Поэтому гомотопные отображения индуцируют одинаковые морфизмы на $\mathcal{K}$-группах, а относительная гомотопическая эквивалентность индуцирует изоморфизм. □

Предложение 5.4.17. *Если* X *— компактное хаусдорфово пространство, то*

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(X, \varnothing) &\to K^0(X), \\ [E_\bullet] &\mapsto \sum_i (-1)^i [E_i] \end{aligned}$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Несложно понять, что указанная формула задает гомоморфизм групп $\chi\colon \mathcal{K}(X, \varnothing) \to K^0(X)$. Есть очевидное отображение $j\colon K^0(X) \to \mathcal{K}(X, \varnothing)$, сопоставляющее векторному расслоению E цепной комплекс $E[0]$, у которого все члены нулевые, кроме $E[0]_0 = E$. Очевидно, что $\chi \circ j = \mathrm{id}$.

Если $E_\bullet$ — цепной комплекс векторных расслоений на X, мы можем продеформировать его в комплекс с нулевыми дифференциалами, умножив их все на параметр $(1-t)$. Поэтому

$$[(E_\bullet, d)] = [(E_\bullet, 0)] = \sum_i [\Sigma^i E_i] \in \mathcal{K}(X, \varnothing).$$

По лемме 5.4.9 имеем $[\Sigma^i E_i] = (-1)^i [E_i]$. Из этого следует, что $j \circ \chi = \mathrm{id}$. □

Заметим, что для ограниченных комплексов векторных расслоений на X определено обычное тензорное произведение. Кроме того, имеется *внешнее* тензорное произведение: если $E_\bullet$ — комплекс векторных расслоений на X, а $F_\bullet$ — комплекс векторных расслоений на Y, можно положить

$$E_\bullet \widehat{\otimes} F_\bullet = \pi_1^*(E_\bullet) \otimes \pi_2^*(F_\bullet),$$

где π_1, π_2 — канонические проекции $X \times Y$ на сомножители. Заметим, что обычное тензорное произведение выражается через внешнее: $E_\bullet \otimes F_\bullet \cong \Delta^*(E_\bullet \widehat{\otimes} F_\bullet)$.

Описанные тензорные произведения индуцируют биаддитивные отображения $\mathcal{K}$-групп:

$$\begin{aligned} &\otimes\colon \mathcal{K}(X, A) \otimes \mathcal{K}(X, B) \to \mathcal{K}(X, A \cup B), \\ &\widehat{\otimes}\colon \mathcal{K}(X, A) \otimes \mathcal{K}(Y, B) \to \mathcal{K}(X \times Y, (A \times Y) \cup (X \times B)). \end{aligned}$$

Единственным нетривиальным моментом является тот факт, что если $V_\bullet$ и $W_\bullet$ — ограниченные комплексы векторных пространств, и $V_\bullet$ точен, то и $V_\bullet \otimes W_\bullet$ точен. Снова можно выразить внутреннее тензорное произведение через внешнее:

$$[E_\bullet] \otimes [F_\bullet] = \Delta^*([E_\bullet] \widehat{\otimes} [F_\bullet]).$$

Теорема 5.4.18 (Atiyah–Bott–Shapiro). *Существует единственное естественное преобразование функторов $\chi\colon \mathcal{K}(X, A) \to K^0(X, A)$ из категории гомотопически компактных пар в категорию абелевых групп, для которого при $A = \varnothing$ выполнено $\chi(E_\bullet) = \sum_i (-1)^i [E_i]$. Это преобразование χ является естественным изоморфизмом, и согласовано с произведениями:*

$$\chi(E_\bullet \otimes F_\bullet) = \chi(E_\bullet) \cdot \chi(F_\bullet)$$

5.5 Комплексы Кошуля

Пусть V — комплексное векторное пространство размерности n, $v \in V$. Рассмотрим цепной комплекс $J_{V,v}$:

$$0 \to \Lambda^0(V) \xrightarrow{v \wedge -} \Lambda^1(V) \xrightarrow{v \wedge -} \dots \xrightarrow{v \wedge -} \Lambda^{n-1}(V) \xrightarrow{v \wedge -} \Lambda^n(V) \to 0.$$

Если $v \neq 0$, то этот комплекс точен. Кроме того, нетрудно видеть, что $J_{V,v} \otimes J_{W,w} \cong J_{V \oplus W, v \oplus w}$. Нас больше интересует комплекс $J^*_{V,v}$, двойственный к $J_{V,v}$:

$$0 \to \Lambda^n(V^*) \xrightarrow{d_v} \Lambda^{n-1}(V^*) \xrightarrow{d_v} \dots \xrightarrow{d_v} \Lambda^1(V^*) \xrightarrow{d_v} \Lambda^0(V^*) \to 0.$$

Он называется **комплексом Кошуля**.

Упражнение 5.5.1. *Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис пространства V, и пусть $v = \sum v_i e_i$. Обозначим через $e_1^*, \dots, e_n^*$ двойственный базис в пространстве V^*. Тогда дифференциал в комплексе Кошуля $J^*_{V,v}$ выглядит так:*

$$d_v(e^*_{i_0} \wedge \dots \wedge e^*_{i_k}) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j v_{i_j} e^*_{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{e^*_{i_j}} \wedge \dots \wedge e^*_{i_k}.$$

Аналогично, если $E \to B$ — комплексное векторное расслоение ранга n, а $s\colon B \to E$ — его сечение, мы получаем комлпекс векторных расслоений

$$0 \to \Lambda^0(E) \xrightarrow{s \wedge -} \Lambda^1(E) \xrightarrow{s \wedge -} \dots \xrightarrow{s \wedge -} \Lambda^{n-1}(E) \xrightarrow{s \wedge -} \Lambda^n(E) \to 0,$$

который будет обозначаться через $J_{E,s}$. Пусть $x \in B$. Если $s(x) \neq 0$, то указанный комплекс точен в слое над точкой x. Поэтому он определяет элемент в $K^0(B, B - s^{-1}(0))$. Заметим, что и двойственный комплекс $J^*_{E,s}$ определяет элемент $[J^*_{E,s}] \in K^0(B, B - s^{-1}(0))$.

Пусть V — комплексное векторное пространство размерности n. С ним связано векторное расслоение

$$\pi_1\colon V \times V \to V$$

и его диагональное сечение $\Delta\colon V \to V \times V$. Заметим, что комплекс Кошуля $J^*_{V \times V, \Delta}$ точен на $V - 0$, и потому определен элемент

$$\beta(V) = [J^*_{V \times V, \Delta}] \in K^0(V, V - 0).$$

Выбор базиса в пространстве V определяет цепочку изоморфизмов

$$K^0(V, V-0) \cong K^0(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - 0) \cong K^0(D^{2n}, \partial D^{2n}) \cong \widetilde{K}^0(S^{2n}) \cong \widetilde{K}^{-2n}(S^0) = K^{-2n}(\mathrm{pt}).$$

Можно проверить, что полученный изоморфизм $K^0(V, V-0) \cong K^{-2n}(\mathrm{pt})$ не зависит от выбора базиса. Поэтому можно считать, что мы построили элемент $\beta(V) \in K^{-2n}(\mathrm{pt})$. Несложно видеть, что $\beta(V \oplus W) = \beta(V) \cdot \beta(W)$. Элемент $\beta = \beta(\mathbb{C}) \in K^{-2}(\mathrm{pt})$ называется **элементом Ботта**.

Теорема 5.5.2. *1.* $K^0(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - 0) \cong K^{-2n}(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{Z}$ *с образующей* $\beta(\mathbb{C}^n) = \beta^n$*;*

2. $K^*(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z}[\beta, \beta^{-1}]$.

Для разнообразия обратимся к алгебраическому аналогу комплекса Кошуля.

Определение 5.5.3. Пусть R — коммутативное кольцо, $x_1, \dots, x_n \in R$. Определим **комплекс Кошуля** $K(x_1, \dots, x_n; R)$

$$0 \to \Lambda^n(R^n) \xrightarrow{d} \Lambda^{n-1}(R^n) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda^1(R^n) \xrightarrow{d} \Lambda^0(R^n) \to 0,$$

где дифференциалы d задаются формулой

$$d(e_{i_i} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j x_{i_j} (e_{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge \dots \wedge e_{i_k}).$$

Группы гомологий этого комплекса называются **группами гомологий Кошуля** и обозначаются через

$$H_*(x_1, \dots, x_n; R) = H_*(K(x_1, \dots, x_n; R))$$

В частности, заметим, что $d\colon \Lambda^1 R^n \to \Lambda^0 R^n$ — единственное дифференцирование, переводящее e_i в x_i; поэтому $H_0(x_1, \dots, x_n; R) = R/(x_1, \dots, x_n)$.

Замечание 5.5.4. Мы часто будем обозначать последовательность $x_1, \dots, x_n$ символом $\underline{x}$ для сокращения нотации. Основная польза комплекса Кошуля происходит от того, что иногда $K(x_1, \dots, x_n; R)$ является резольвентой R-модуля $R/(x_1, \dots, x_n)$.

Определение 5.5.5. Последовательность $x_1, \dots, x_n \in R$ называется **регулярной последовательностью**, если для каждого $i = 1, \dots, n$ элемент x_i не является делителем нуля в $R/(x_1, \dots, x_{i-1})$. В частности, при $i = 1$ это условие означает, что x_1 — не делитель нуля в R.

Пример 5.5.6. В кольце многочленов $R = k[x_1, \dots, x_n]$ над полем k переменные $x_1, \dots, x_n$ образуют регулярную последовательность.

Теорема 5.5.7. *Пусть* $x_1, \dots, x_n \in R$.

1. *Если* $x_1, \dots, x_n$ *— регулярная последовательность, то* $H_i(\underline{x}; R) = 0$ *при всех* $i \geqslant 1$.

2. *Предположим, что* R *— нетерово локальное кольцо, и* $x_1, \dots, x_n$ *лежат в его максимальном идеале* $\mathfrak{m}$*. Тогда регулярность последовательности* $x_1, \dots, x_n$ *равносильна тому, что* $H_i(\underline{x}; R) = 0$ *при всех* $i \geqslant 1$.

Доказательство. Рассмотрим подалгебру в $\Lambda^* R^n$, порожденную элементами $e_1, \dots, e_{n-1}$. Мы получим подкомплекс в $K(x_1, \dots, x_n; R)$, изоморфный $K(x_1, \dots, x_{n-1}; R)$. Фактор-комплекс состоит из свободных R-модулей, натянутых на базисные элементы, содержащие множитель e_n. На самом деле, отображение $w \mapsto w \wedge e_n$ задает изоморфизм между подкомплексом $K(x_1, \dots, x_{n-1}; R)$ и этим фактор-комплексом (со сдвигом нумерации на 1); это аналог формулы $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ для биномиальных коэффициентов. Таким образом, мы получили короткую точную последовательность комплексов

$$0 \to K(x_1, \dots, x_{n-1}; R) \to K(x_1, \dots, x_n; R) \to \Sigma K(x_1, \dots, x_{n-1}; R) \to 0.$$

Обозначим последовательность $x_1, \dots, x_n$ через $\underline{x}$, а последовательность $x_1, \dots, x_{n-1}$ — через $\underline{x}'$. Наша короткая точная последовательность комплексов индуцирует длинную точную последовательность на группах гомологий:

$$\dots \to H_i(\underline{x}'; R) \to H_i(\underline{x}; R) \to H_{i-1}(\underline{x}'; R) \xrightarrow{d} H_{i-1}(\underline{x}'; R) \to \dots,$$

и нетрудно видеть, что связывающее отображение d — это умножение на $\pm x_n$.

Теперь мы можем доказать первое утверждение индукцией по n. При $n = 1$ комплекс Кошуля выглядит так:

$$0 \to R \xrightarrow{\cdot x_1} R \to 0,$$

и потому $H_1(\underline{x}; R) = \operatorname{Ann}_R(x_1) = 0$, поскольку x_1 не является делителем нуля. Пусть теперь $n \geqslant 2$, и теорема доказана при всех $i < n$. Рассмотрение длинной точной последовательности показывает, что $H_i(\underline{x}; R) = 0$ при $i \geqslant 2$. Осталось проверить, что $H_1(\underline{x}; R) = 0$, и у нас есть точная последовательность

$$0 = H_1(\underline{x}'; R) \to H_1(\underline{x}; R) \to H_0(\underline{x}'; R) \xrightarrow{\pm x_n} H_0(\underline{x}'; R) \to H_0(\underline{x}; R) \to 0.$$

Мы знаем, что $H_0(x'; R) = R/(x_1, \dots, x_{n-1})$. По условию x_n — не делитель нуля в этом кольце, и поэтому ядро отображения $H_0(\underline{x}'; R) \xrightarrow{\pm x_n} H_0(\underline{x}'; R)$ нулевое, откуда $H_1(\underline{x}; R) = 0$.

Для доказательства второго утверждения попробуем обратить рассуждение выше. Снова будем доказывать индукцией по n Для $n = 1$ все хорошо даже без дополнительных условий на R, поскольку $H_1(x; R) = \operatorname{Ann}(x)$. Из рассмотрения той же длинной точной последовательности следует, что имеются короткие точные последовательности вида

$$0 \to H_i(\underline{x}'; R)/x_n H_i(\underline{x}'; R) \to H_i(\underline{x}; R) \to \operatorname{Ann}_{H_{i-1}(\underline{x}'; R)}(x_n) \to 0$$

для всех $i \geqslant 1$ Из предположения $H_i(\underline{x}; R)$ теперь следует, что $x_n H_i(\underline{x}'; R) = H_i(\underline{x}'; R)$. Но по условию $x_n \in \mathfrak{m}$, и потому $H_i(\underline{x}'; R) = 0$ (лемма Накаямы). По предположению индукции из этого следует, что $\underline{x}' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ — регулярная последовательность. Осталось заметить также, что (из той же короткой точной последовательности) $\operatorname{Ann}_{H_{i-1}(\underline{x}'; R)}(x_n) = 0$, то есть, x_n не является делителем нуля в $H_{i-1}(\underline{x}'; R)$ В частности, для $i = 1$ это означает, что x_n — не делитель нуля в $H_0(\underline{x}'; R) = R/(x_1, \dots, x_{n-1})$, и потому $\underline{x}$ — регулярная последовательность. □

Теорема 5.5.8 (Теорема Гильберта о сизигиях). *Пусть L – поле, M — конечно порожденный модуль над кольцом многочленов $R = L[x_1, \dots, x_n]$. Тогда у M есть конечная проективная резольвента.*

Доказательство. Рассмотрим сначала градуированный случай. Пусть на R задана градуировка: степень каждой переменной равна 1, и предположим, что M — конечно порожденный градуированный модуль. Построим так называемую «минимальную резольвенту» M. Выберем минимальный конечный набор однородных образующих $w_1, \dots, w_k \in M$. Рассмотрим свободный модуль $F_0 = R^k$, градуированный в соответствии со степенями $w_1, \dots, w_k$: пусть образующая F_0 с номером i имеет степень $\deg(w_i)$. Обозначим через $d_0 \colon F_0 \to M$ отображение, посылающее e_i в w_i для всех i, и через K_0 — его ядро. Заметим, что d_0 сохраняет степени, и потому K_0 тоже является градуированным модулем. Повторяя этот процесс, строим сюръекцию $F_1 \to K_0$, обозначаем через K_1 ее ядро, и так далее. В итоге получаем свободную резольвенту $F_\bullet \to M$ вида

$$\cdots \to R^{b_2} \to R^{b_1} \to R^{b_0} \to M \to 0.$$

Нетрудно понять, что все элементы матриц всех указанных отображений вида $R^l \to R^k$ лежат в идеале $(x_1, \ldots, x_n)$ кольца R (это следует из минимальности выбора множества образующих на каждом шаге).

Как доказать, что полученная резольвента на самом деле конечна? Домножим ее тензорно на фактор-кольцо $R/(x_1, \ldots, x_n)$, и возьмем гомологии полученного комплекса. Как мы заметили, матрицы всех дифференциалов станут нулевыми. Каждый свободный модуль вида R^k при этом превратится в L^k. Поэтому гомологии указанного комплекса равны L^{b_i}. С другой стороны, они равны $\mathrm{Tor}_i(M, R/(x_1, \ldots, x_n))$, поскольку мы взяли свободную резольвенту модуля M, тензорно домножили ее на $R/(x_1, \ldots, x_n)$ и посчитали гомологии.

Однако, мы могли посчитать тот же Tor и другим способом: взять R-резольвенту модуля $R/(x_1, \ldots, x_n)$, тензорно домножить ее на M и посчитать гомологии. Мы знаем, что такой резольвентой является комплекс Кошуля, который имеет длину n. Поэтому на самом деле $\mathrm{Tor}_i(M, R/(x_1, \ldots, x_n)) = 0$ при $i > n$. Из этого следует, что $b_i = 0$ при $i > n$, то есть, $F_\bullet$ — на самом деле конечная резольвента.

Перейдем теперь к общему случаю не обязательно градуированного модуля. Выберем точную последовательность вида

$$R^{b_1} \xrightarrow{A} R^{b_0} \to M \to 0,$$

где A — матрица с коэффициентами из R. Введем новую переменную x_0 и сделаем матрицу A однородной, домножив каждый моном в матричных элементах A на некоторую степень переменной x_0. Обозначим $S = L[x_0, \ldots, x_n] = R[x_0]$, и пусть $\widetilde{M}$ — коядро отображения $\widetilde{A}$:

$$S^{b_1} \xrightarrow{\widetilde{M}} S^{b_0} \to \widetilde{M} \to 0.$$

Заметим, что модуль $\widetilde{M}$ уже является градуированным S-модулем. Для того, чтобы вернуться к исходному модулю M, нужно просто подставить $x_0 \mapsto 1$. Иными словами, $\widetilde{M} \otimes_S (S/(1 - x_0)) \cong M$. Выше мы доказали, что у $\widetilde{M}$ есть свободная S-резольвента

$$\widetilde{F}_\bullet \to \widetilde{M} \to 0.$$

Пусть $F_\bullet = \widetilde{F}_\bullet \otimes_S (S/(1 - x_0))$. Это комплекс свободных R-модулей, у которого $H_0(F_\bullet) \cong M$. По определению $H_i(F) = \mathrm{Tor}_i^S(\widetilde{M}, S/(1 - x_0))$. Снова заметим, что этот же результат можно получить с помощью резольвенты модуля $S/(1 - x_0)$. Возьмем резольвенту

$$0 \to S \xrightarrow{1 - x_0} S \to 0,$$

и сразу получим, что $H_i(F) = 0$ при $i \geqslant 2$. Наконец, $H_1(F) = \mathrm{Ann}_{\widetilde{M}}(1 - x_0)$. Но этот аннулятор равен 0 для любого конечно порожденного градуированного модуля. Поэтому $F_\bullet \to M$ — конечная свободная R-резольвента. □

6 Сравнение с алгебраической K-теорией

6.1 Алгебраические векторные расслоения

Пусть $E_\bullet$ — ограниченный комплекс векторных расслоений на $\mathbb{C}^n$, точный на $\mathbb{C}^n - 0$. Конструкция выше сопоставляет ему класс $[E_\bullet] \in K^0(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - 0) \cong K^{-2n}(\mathrm{pt})$. Теорема 5.5.2

говорит, что $K^{-2n}(\mathrm{pt})$ — циклическая группа, порожденная β^n. Поэтому $[E_\bullet] = d \cdot \beta^n$ для некоторого однозначно определенного целого числа d. Это число называется **локальным индексом** комплекса $E_\bullet$ и обозначается через $\mathrm{ind}_0(E_\bullet)$.

Теорема 6.1.1. *Если $E_\bullet$ — ограниченный комплекс* алгебраических *векторных расслоений на $\mathbb{C}^n$, точный на $\mathbb{C}^n - 0$, то*

$$\mathrm{ind}_0(E_\bullet) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H_i(P_\bullet),$$

где $P_\bullet$ — комплекс конечно порожденных проективных модулей над $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ такой, что $P_\bullet(\mathbb{C}) \cong E_\bullet$.

Определение 6.1.2. Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие над $\mathbb{C}$, то есть, $X = \operatorname{Spec} R$, где $R = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/Q$, $Q \trianglelefteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ — простой идеал. Напомним, что **алгебраическим векторным расслоением на** X называется конечно порожденный проективный R-модуль. Если $P_\bullet$ — комплекс алгебраических векторных расслоений на X, и $p \in X$, то говорят, что комплекс $P_\bullet$ **точен в** p, если локализация $(P_\bullet)_p$ является точным комплексом R_p-модулей.

Замечание 6.1.3. Напомним, что для топологических расслоений мы определяли точность как точность на слоях, а определение 6.1.2 говорит о точности на стеблях. Следующая лемма показывает, что для алгебраических расслоений эти понятия совпадают.

Лемма 6.1.4. *Пусть $P_\bullet$ — ограниченный снизу комплекс конечно порожденных проективных модулей над нетеровым кольцом R. Пусть подмножество $U \subseteq \operatorname{Spec} R$ замкнуто относительно специализации. Следующие утверждения равносильны:*

1. *$(P_\bullet)_q$ точен для всех простых $q \in U$;*
2. *$(P_\bullet)_m$ точен для всех максимальных $m \in U$;*
3. *$P_\bullet \otimes_R R/m$ точен для всех максимальных $m \in U$.*

Определение 6.1.5. Пусть $X = \operatorname{Spec} R$ как выше, $Z \subseteq X$ замкнуто (в топологии Зариского). Пусть $K^0_{\mathrm{alg}}(X, X - Z)$ — свободная абелева группа на множестве ограниченных цепных комплексов алгебраических векторных расслоений на X, точных в каждой точке $X - Z$, профакторизованная по соотношениям

1. $[P_\bullet] = 0$, если $P_\bullet$ точен во всех точках X;
2. $[P_\bullet] = [P'_\bullet] + [P''_\bullet]$ для любой короткой точной последовательности вида

$$0 \to P'_\bullet \to P_\bullet \to P''_\bullet \to 0.$$

Другое обозначение для той же группы: $K(R)_Z$.

Замечание 6.1.6. Каждому алгебраическому векторному расслоению P можно сопоставить топологическое векторное расслоение $P(\mathbb{C})$. Это сопоставление индуцирует гомоморфизм абелевых групп

$$\varphi\colon K^0_{\mathrm{alg}}(X, X - Z) \to K^0(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{C}) - Z(\mathbb{C})).$$

Последнюю группу мы будем часто обозначать через $K^0_{\mathrm{top}}(X, X - Z)$ (или просто $K^0(X, X - Z)$).

Напомним, что **носителем** конечно порожденного R-модуля M называется множество

$$\operatorname{Supp} M = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

Нетрудно понять, что это в точности $V(\operatorname{Ann} M)$ (множество простых идеалов R, содержащих $\operatorname{Ann} M$). В частности, это множество замкнуто в топологии Зариского. Обозначим через $G(X)_Z$ группу Гротендика конечно порожденных R-модулей M, у которых $\operatorname{Supp} M \subseteq Z$. Как обычно, можно определить **эйлерову характеристику**

$$\begin{aligned}\chi\colon K^0_{\mathrm{alg}}(X, X - Z) &\to G(Z)_Z,\\ [P_\bullet] &\mapsto \sum_i (-1)^i [H_i(P)].\end{aligned}$$

Теорема 6.1.7. *Если кольцо R регулярно, то ξ устанавливает изоморфизм между $K^0_{\mathrm{alg}}(X, X - Z) \cong G(X)_Z$ для любого $Z \subseteq \operatorname{Spec} R$.*

Доказательство. Отправим класс $[M] \in G(X)_Z$ в класс $[P_\bullet]$ его проективной резольвенты. □

ОБратимся теперь к случаю $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, $Z = \{0\} = V(x_1, \ldots, x_n)$. Таким образом, $X = \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$, и Z — замкнутое подмножество, состоящее только из начала координат. Наша ближайшая цель — вычислить $K^0_{\mathrm{alg}}(X, X - Z) = K^0_{\mathrm{alg}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - 0)$. Пусть $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$ — соответствующий максимальный идеал в R. Легко видеть, что следующие условия на конечно порожденный R-модуль M равносильны:

1. $\operatorname{Supp} M = \{\mathfrak{m}\}$;
2. $\mathfrak{m}$ — единственный максимальный идеал, содержащий $\operatorname{Ann} M$;
3. $\sqrt{\operatorname{Ann} M} = \mathfrak{m}$;
4. $\mathfrak{m}^k M = 0$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

По определению группа $G(X)_Z$ порождена классами таких модулей M. Рассмотрим конечную фильтрацию

$$M \supseteq \mathfrak{m}M \supseteq \mathfrak{m}^2 M \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{m}^{k-1}M \supseteq \mathfrak{m}^k M = 0.$$

Тогда в $G(R)_Z$ выполнено соотношение

$$[M] = \sum_i [\mathfrak{m}^i M / \mathfrak{m}^{i+1} M].$$

Каждое слагаемое в правой части есть класс конечномерного векторного пространства над полем $R/\mathfrak{m}$, и потому $[M]$ кратно $[R/\mathfrak{m}]$. Таким образом, $G(R)_Z$ — циклическая группа с образующей $[R/\mathfrak{m}]$. Более того, каждый из этих факторов — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{C}$. Поэтому размерность (над $\mathbb{C}$) задает аддитивную функцию

$$\dim\colon G(R)_Z \to \mathbb{Z},$$

которая является изоморфизмом.

Таким образом, $G(\mathbb{C}^n)_{\{0\}}$ порождается классом $[R/\mathfrak{m}]$. В группе $K^0_{\mathrm{alg}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - 0)$ этой образующей соответствует класс проективной резольвенты R-модуля $[R/\mathfrak{m}]$, то есть, комплекса Кошуля $K(x_1, \ldots, x_n; R)$.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} K^0_{\mathrm{alg}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - 0) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\xi", "\cong"'] & K^0_{\mathrm{top}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - 0) \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{Z} \cdot \beta^n \\ G(R)_m \arrow[rr, "\dim", "\cong"'] & & \mathbb{Z}. \end{tikzcd}$$

Мы видим, что отображение φ на самом деле действует между двумя группами, изоморфными $\mathbb{Z}$.

Выбранные образующие в $K^0_{\mathrm{alg}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - 0)$ и $K^0_{\mathrm{top}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - 0)$ — это алгебраический и топологический комплекс Кошуля. Но отображение φ, разумеется, переводит алгебраический комплекс Кошуля в топологический. Поэтому если мы дополним диаграмму отображением $\mathbb{Z}\beta^n \to \mathbb{Z}$, $\beta^n \mapsto 1$, то получим коммутативную диаграмму. □

6.2 Фундаментальные классы

Пусть теперь $Z \subseteq \mathbb{C}^n$ — замкнутое алгебраическое подмногообразие, то есть, $Z = V(I)$ для некоторого идеала $I \trianglelefteq R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Предположим, что Z — гладкое подмногообразие коразмерности c. Мы знаем, что у него есть относительный фундаментальный класс $[Z]_{rel} \in K^{2c}_{\mathrm{top}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - Z)$. Построим его алгебраический аналог.

Пусть $P_\bullet$ — ограниченная проективная резольвента R-модуля R/I. Для простого идеала $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$ выполнено $\mathfrak{q} \in Z$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{q} \supseteq I$, то есть, когда $(R/I)_\mathfrak{q} \neq 0$. Поэтому комплекс $(P_\bullet)_\mathfrak{q}$ точен в точках $\mathfrak{q} \notin Z$. Мы получили класс $[P_\bullet] \in K^0_{\mathrm{alg}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - Z)$. Это и есть аналог относительного фундаментального класса. Действительно, применив к нему отображение φ, мы получим класс $[P_\bullet] \in K^0_{\mathrm{top}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - Z)$, а домножив на β^{-c}, попадем в K^{2c}_{top}.

Теорема 6.2.1. *В этих обозначениях* $[Z]_{rel} = \beta^{-c} \cdot [P_\bullet]$.

Набросок доказательства. Напомним, что класс $[Z]_{rel}$ определялся с помощью выбора трубчатой окрестности U подмногообразия Z в $\mathbb{C}^n$ и изоморфизма между U и нормальным расслоением $N = N_{\mathbb{C}^n/Z}$: после этого $[Z]_{rel}$ соответствовал классу Тома $\mathcal{U}_N$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} {[Z]_{rel} \in K^{2c}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - Z)} \arrow[d, "\cong"] & K^0(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - Z) \arrow[l, "\cong", "\beta^{-c}"'] \arrow[d, "\cong"] & K^0_{\mathrm{alg}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - Z) \arrow[l, "\varphi"'] \\ K^{2c}(U, U - Z) \arrow[d, equal] & K^0(U, U - Z) \arrow[l, "\beta^{-c}"] \arrow[d, equal] & \\ \mathcal{U}_N \in K^{2c}(N, N - 0) & K^0(N, N - 0) \arrow[l, "\beta^{-c}"] & K^0_{\mathrm{alg}}(N, N - 0). \arrow[l, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Для доказательства теоремы мы хотим взять $[P_\bullet] \in K^0_{\mathrm{alg}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - Z)$ и показать, что образ этого элемента в левом нижнем углу равен $\mathcal{U}_N$. Заметим, что класс $\mathcal{U}_N$ алгебраичен (он представляется комплексом Кошуля), и потому поднимается до элемента $K^0_{\mathrm{alg}}(N, N - 0)$. Нам хотелось бы показать, что этот элемент соответствует $[P_\bullet]$, работая только с алгебраической частью диаграммы. К сожалению, это не так просто: трубчатая окрестность U не является алгебраической, поэтому в правом столбике нашей диаграммы пропущен средний элемент. Для того, чтобы обойти эту неприятность, используется *деформация к* *нормальному расслоению.* А именно, рассмотрим раздутие многообразия $X \times \mathbb{A}^1$ в подмногообразии $Z \times \{0\}$:

$$B = Bl_{Z\times\{0\}}(X \times \mathbb{A}^1).$$

... $\square$

6.3 K-теория проективного пространства

Для вычисления $K^*(\mathbb{C}P^n)$ нам понадобится следующая лемма.

Лемма 6.3.1. *Пусть* E *— мультипликативная теория когомологий. Если* $x_0, x_1, \dots, x_n \in \widetilde{E}^*(\mathbb{C}P^n)$*, то* $x_0 x_1 \dots x_n = 0$.

Доказательство. Проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ покрывается стягиваемыми открытыми подмножествами $U_i = \{[z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{C}P^n \mid z_i \neq 0\}$, $i = 0, \dots, n$. Пусть $* = [1 : 1 : \dots : 1]$ — отмеченная точка $\mathbb{C}P^n$. Из стягиваемости U_i следует, что $E^*(\mathbb{C}P^n, U_i) \to E^*(\mathbb{C}P^n, *)$ — изоморфизм. Поэтому каждый элемент x_i поднимается до элемента $\widetilde{x_i} \in E^*(\mathbb{C}P^n, U_i)$, а их произведение $\widetilde{x_0}\widetilde{x_1} \dots \widetilde{x_n}$ является поднятием $x_0 x_1 \dots x_{n+1}$ вдоль отображения

$$E^*(\mathbb{C}P^n, U_0 \cup \dots \cup U_n) \to E^*(\mathbb{C}P^n, *).$$

Но $U_0 \cup \dots \cup U_n = \mathbb{C}P^n$, и потому $E^*(\mathbb{C}P^n, U_0 \cup \dots \cup U_n) = 0$. откуда $x_0 x_1 \dots x_{n+1} = 0$. $\square$

Предложение 6.3.2. *Пусть* E *— комплексно ориентированная теория когомологий. Тогда отображение*

$$\begin{aligned} E^*(pt)[x]/(x^{n+1}) &\to E^*(\mathbb{C}P^n), \\ x^i &\mapsto [\mathbb{C}P^{n-1}] \end{aligned}$$

является изоморфизмом колец.

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность Гизина для подмногообразия $j\colon \mathbb{C}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$:

$$\begin{tikzcd} \dots & \widetilde{E}^k(\mathbb{C}P^n - \mathbb{C}P^{n-1}) \arrow[l] & \widetilde{E}^k(\mathbb{C}P^n) \arrow[l] & & \\ & & E_{k-2}(\mathbb{C}P^{n-1}) \arrow[u, "j_!"] & \widetilde{E}_{k-1}(\mathbb{C}P^n - \mathbb{C}P^{n-1}) \arrow[l] & \dots \arrow[l] \end{tikzcd}$$

По определению $[\mathbb{C}P^{n-1}] = j_!(1) \in \widetilde{E}^2(\mathbb{C}P^n)$. Обозначим $y = [\mathbb{C}P^{n-1}]$. В лемме 6.3.1 мы показали, что $y^{n+1} = 0$, и потому есть гомоморфизм колец

$$E^*(pt)[x]/(x^{n+1}) \to E^*(\mathbb{C}P^n), x \mapsto y.$$

Теория пересечений учит нас, что $y^i = [\mathbb{C}P^{n-i}]$. Поэтому осталось доказать, что построенный гомоморфизм является гомоморфизмом. Будем действовать индукцией по n (база тривиальна). Пространства $\mathbb{C}P^n - \mathbb{C}P^{n-1}$ гомеомеорфны $\mathbb{C}^n$, и потому стягиваемы. Поэтому точная последовательность Гизина, выписанная выше, на самом деле превращается в набор изоморфизмов вида

$$j_!\colon E^{k-2}(\mathbb{C}P^{n-1}) \xrightarrow{\cong} \widetilde{E}^k(\mathbb{C}P^n).$$

Собрав все k вместе, мы получаем, что $j_!$ — изоморфизм $E^*(pt)$ модулей $E^*(\mathbb{C}P^{n-1}) \to \widetilde{E}^*(\mathbb{C}P^n)$. По предположению индукции, $E^*(\mathbb{C}P^{n-1})$ является свободным $E^*(pt)$ модулем с базисом $1 = [\mathbb{C}P^{n-1}], [\mathbb{C}P^{n-2}], \dots, [\mathbb{C}P^0]$. Образы этих элементов дают нам базис модуля $\widetilde{E}^*(\mathbb{C}P^n)$, и, добавляя к этому базису 1, получаем базис модуля $E^*(\mathbb{C}P^n)$. $\square$

Следствие 6.3.3. $K^{odd}(\mathbb{C}P^n) = 0$, $K^0(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}[X]/(X^{n+1})$, *где* $X = \beta \cdot [\mathbb{C}P^{n-1}]$. *В частности, аддитивно* $K^0(\mathbb{C}P^n)$ *— это свободная абелева группа ранга* $n+1$ *с базисом* $1, X, \dots, X^n$.

6.4 Фундаментальные классы в $K^*(\mathbb{C}P^n)$

Пусть теперь $Z \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ — замкнутое комплексное подмногообразие коразмерности c. Напомним, что фундаментальный класс Z в сингулярных когомологиях равен $d \cdot [\mathbb{C}P^{n-c}]$, где $d \in \mathbb{Z}$ — степень Z. Геометрически можно истолковать d как количество точек пересечения Z с копией $\mathbb{C}P^c$ в общем положении.

Посмотрим теперь на фундаментальный класс $[Z]_K$ подмногообразия Z в $K^0(\mathbb{C}P^n)$. Следствие 6.3.3 показывает, что мы можем записать

$$[Z]_K = d_0 \cdot 1 + d_1 X + d_2 X^2 + \cdots + d_n X^n,$$

где $x^i = [\mathbb{C}P^{n-i}]$ для всех $i = 0, \dots, n$, а $d_0, \dots, d_n$ — некоторые однозначно определенные целые числа. Домножая указанное равенство на X^n, получаем, что $[Z]_K \cdot X^n = d_0 X^n$. С другой стороны, теория пересечений говорит нам, что $[Z]_K \cdot X^n = [Z]_K \cdot [\mathbb{C}P^0] = [Z \cap \mathbb{C}P^0]$, где имеется в виду пересечение Z с копией $\mathbb{C}P^0$ в общем положении. Но если коразмерность Z равна хотя бы 1, это пересечение в общем положении окажется пустым. Мы получили, что если $c \geqslant 1$, то $d_0 = 0$. В этом предположении повторим рассуждение, домножив исходное равенство на X^{n-1} вместо X^n. Получим, что $[Z \cap \mathbb{C}P^1] = [Z]_K \cdot [\mathbb{C}P^1] = d_1 X^n$. Если $c \geqslant 2$, то пересечение Z с $\mathbb{C}P^1$ в общем положении пустое, и тогда $d_1 = 0$.

Продолжая аналогичные рассуждения, получаем, что

$$d_0 = d_1 = \cdots = d_{c-1} = 0.$$

Наконец, домножая на X^{n-c}, получаем, что $[Z \cap \mathbb{C}P^c] = [Z]_K \cdot [\mathbb{C}P^c] = d_c X^n$, и поэтому d_c равно числу точек пересечения Z с $\mathbb{C}P^c$ в общем положении, то есть, степени Z.

Наше рассуждение показало, что мы можем проинтерпретировать числа $d_0, d_1, \dots, d_c$ как хорошо известные инварианты многообразия (степень). Вместе с тем (если $c < n$), фундаментальный класс Z еще несет в себе инварианты $d_{c+1}, \dots, d_n \in \mathbb{Z}$. Оказывается, это коэффициенты многочлена Гильберта Z.