Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Лузгарев Александр Юрьевич

Надгруппы исключительных групп

специальность 01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Вавилов Николай Александрович

Санкт-Петербург
2008 г.

Содержание

Введение

Настоящая диссертация посвящена изучению надгрупп исключительных групп Шевалле в различных естественных вложениях.

Задача описания промежуточных подгрупп занимает одно из центральных мест в изучении алгебраических групп. Для случая алгебраически замкнутого поля, как правило, возможно полное решение разнообразных задач описания промежуточных *алгебраических* подгрупп, но уже при переходе к произвольному полю некоторые вопросы, типа классификации *всех* максимальных подгрупп в (изотропных) полупростых группах становятся заведомо бессмысленными.

Важным общим контекстом для рассмотрения подобных задач, предлагающим схему классификации максимальных подгрупп алгебраических групп, является subgroup structure theorem Майкла Ашбахера ([18], [19], [17], [37], [43]) и особенно интересные в нашей ситуации обобщения на исключительные группы, полученный Мартином Либеком и Гари Зейтцем ([53], [42], [54], [55], [44], [68], [41], [56]). С этой точки зрения велось изучение надгрупп классических групп (это максимальные подгруппы из класса Ашбахера $\mathcal{C}_\forall$). Полное описание таких надгрупп над коммутативным кольцом получено в работах Николая Вавилова и Виктора Петрова [10], [11]. В настоящей работе получены аналогичные результаты для некоторых типов вложений исключительных групп.

Изучение исключительных групп велось вместе с изучением классических групп в общем контексте алгебраических групп начиная с 1950-х годов. Вместе с тем, во многих вопросах специфика исключительных случаев делает практически невозможным их анализ без рассмотрения отдельно каждого исключительного типа. Для такого рассмотрения в работах Николая Вавилова и его учеников [67], [66], [65], [49], [5], [8] был развит метод явных матричных вычислений в исключительных группах. Его основы — стабильные вычисления в линейных представлениях — были заложены Хидейа Мацумото [45] и Майклом Стайном [58]. Отметим, что под исключительными группами здесь подразумеваются в первую очередь группы типов E_6 и E_7. Группа Шевалле типа F_4 реализуется нами как сворачивание группы Шевалле типа E_6 (см. главу 3). Группа типа G_2 во многих вопросах гораздо ближе к классическим группам типов B_3 и D_4. Изучение группы типа E_8 с помощью этих методов тоже возможно, но сопряжено с дополнительными сложностями: ее минимальное представление не является микровесовым.

Перечислим основные результаты работы. В первой главе мы вычисляем нормализатор группы $G(\mathrm{E}_6, R)$ в $\mathrm{GL}(27, R)$. Как хорошо известно, полную ортогональную группу проще всего мыслить себе как стабилизатор квадрики. В работе [7] получен аналогичный результат для исключительной группы типа E_6. А именно, там построена аффинная групповая схема $\overline{G}(\mathrm{E}_6, -)$, которая является нормализатором $G(\mathrm{E}_6, -)$ в GL_{27}. Следующая теорема утверждает, что этот «схемный» нормализатор совпадает с «поточечным» для любого коммутативного кольца R. Напомним несколько обозначений из теории групп. Пусть H_1, H_2 — подгруппы группы G. *Транспортером* подгруппы H_1 в подгруппу H_2 называется множество

$$\mathrm{Tran}_G(H_1, H_2) = \{g \in G \mid H_1^g \leq H_2\}.$$

В частном случае $H_1 = H_2 = H$ получаем *нормализатор*:

$$N_G(H) = \mathrm{Tran}_G(H, H).$$

Основным результатом первой главы является следующая теорема.

Теорема A. *Пусть R — любое коммутативное кольцо. Тогда*

$$N(E(\mathrm{E}_6, R)) = N(G(\mathrm{E}_6, R)) = \mathrm{Tran}(E(\mathrm{E}_6, R), G(\mathrm{E}_6, R)) = \overline{G}(\mathrm{E}_6, R),$$

где нормализаторы и транспортер берутся в группе $\mathrm{GL}(27, R)$.

Раздел 1.1 носит подготовительный характер; здесь собраны основные обозначения и наиболее важные факты, касающиеся групп Шевалле над кольцами. Приводится краткое описание построения аффинной групповой схемы Шевалле–Демазюра. В разделе 1.2 мы рассматриваем более конкретную ситуацию: минимальные представления групп Шевалле типов E_6 и E_7. В разделе 1.3 описаны важные инварианты минимального представления группы типа E_6: кубическая и связанные с ней формы. Основная теорема первой главы, теорема A доказана в разделе 1.4. В разделе 1.5 явно приведены уравнения, которыми задается нормализатор $G(\mathrm{E}_6, R)$ в $\mathrm{GL}(27, R)$.

Вторая глава посвящена вопросу классификации надгрупп элементарной подгруппы $E(\Phi, R)$ группы Шевалле типа $\Phi = \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7$ в минимальных неприводимых представлениях, над коммутативным кольцом R. Подобным задачам описания надгрупп посвящено большое количество работ, но подавляющее большинство из них касается классических групп, и почти всегда рассматриваются группы над полем. Таковы работы Дая [30], [31], [32], Кинга [35], [36], Ли Шанчжы [38], [39], [40]. Лишь в недавних работах Н. А. Вавилова и В. А. Петрова [10], [11] получено стандартное описания надгрупп симплектической и ортогональной элементарных групп для случая коммутативного кольца, а в работе В. А. Петрова [48] — описание надгрупп унитарных групп в смысле Бака для произвольного кольца с некоторым ограничением на локальный стабильный ранг. Сходным вопросам посвящены работы Хона Ю [70], [71].

Доказательство подобных теорем о стандартном описании для исключительных групп представляло бы большой интерес. Поясним, что это означает. Мы рассматриваем группу $G(\Phi, R)$ в минимальном неприводимом представлении как подгруппу в $\mathrm{G} = GL(n, R)$; при этом $n = 27$ в случае $\Phi = \mathrm{E}_6$, $n = 56$ в случае $\Phi = \mathrm{E}_7$. Говорят, что выполнено *стандартное описание* подгрупп в $\mathrm{GL}(n, R)$, содержащих $\mathrm{E}(\Phi, R)$, если для любой такой подгруппы H

существует единственный идеал $A \trianglelefteq R$ такой, что

$$\mathrm{E}(\Phi,R)\,\mathrm{E}(n,R,A) \le H \le N_G(\mathrm{E}(\Phi,R)\,\mathrm{E}(n,R,A)),$$

где $\mathrm{E}(n,R,A) = \mathrm{E}(n,A)^{\mathrm{E}(n,R)}$ — относительная элементарная группа, а N_G означает взятие нормализатора в группе G. Для исключительных групп типа E_6 и E_7 в их минимальных неприводимых представлениях (размерностей 27 и 56 соответственно) неизвестно, имеет ли место стандартное описание, даже в случае, когда R — поле.

Основным результатом второй главы является следующая теорема.

Теорема B. *Пусть H — подгруппа в $\mathrm{GL}(n,R)$, содержащая $E(\Phi,R)$, причем $2,3 \in R^*$. Тогда существует единственный наибольший идеал $A \trianglelefteq R$ такой, что $E(n,R,A) \le H$. При этом, если $t_{\lambda\mu}(\xi) \in H$ для некоторых $\lambda,\mu \in \Lambda$, $\lambda \ne \mu$, то $\xi \in A$.*

Идеал A, фигурирующий в теореме, называется *нижним уровнем* подгруппы H; таким образом, доказано одно из включений, необходимых для получения стандартного описания подгрупп. А именно, мы нашли идеал $A \trianglelefteq R$ такой, что подгруппа $E(\Phi,R)E(n,R,A)$ содержится в H. Эта подгруппа является совершенной (см. предложение 2.3)

Для группы типа E_7, видимо, стандартное описание должно выглядеть сложнее: необходимо рассматривать группу

$$\mathrm{EE}_7'(56,R,A,B) = \mathrm{E}(\mathrm{E}_7,R)\,\mathrm{E}(56,R,A)\,\mathrm{Ep}(56,R,B),$$

где $A \subseteq B$ — два идеала в R. Это связано с тем, что группа типа E_7 вкладывается в подходящую симплектическую группу $\mathrm{Ep}(56,R)$. Для случая $\Phi = \mathrm{E}_7$, таким образом, мы строим серию промежуточных подгрупп, параметризованных не одним, а двумя идеалами; после этого доказывается, что построенные подгруппы совершенны (см. предложение 2.5).

Структура второй главы такова: в разделе 2.1 мы формулируем вспомогательные результаты, к которым сводится теорема B. Их доказательству посвящены разделы 2.2–2.5. В разделе 2.6 приведено доказательство предложения 2.3 о совершенности промежуточных подгрупп. Разделы 2.7–2.9 посвящены включению в описание надгрупп $E(\mathrm{E}_7, R)$ симплектической группы: в разделе 2.7 мы занимаемся построением подходящей симплектической группы, в разделе 2.8 доказываем вспомогательный результат (предложение 2.4) о нижнем уровне в этом случае, а в разделе 2.9 доказываем предложение 2.5.

Глава 3 посвящена описанию надгрупп элементарной группы Шевалле типа F_4 в группе Шевалле типа E_6 над произвольным коммутативным кольцом. Эта задача по духу близка вопросам, рассмотренным во второй главе, но вместо описания надгрупп исключительной группы в классических группах $\mathrm{GL}(n, R)$ и $\mathrm{Sp}(n, R)$, мы рассматриваем подгруппы, лежащие между двумя исключительными группами.

В работах [6], [9] было замечено, что для изучения группы Шевалле типа F_4 часто удобнее рассматривать не минимальное ее представление, имеющее размерность 26, а *приводимое* представление размерности 27, возникающее в результате скручивания минимального модуля группы типа E_6. Таким образом, мы получаем вложение $G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{F}_4, R) \leq G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, R)$, и естественно ставить вопрос об описании промежуточных подгрупп. Для случая поля этот вопрос был решен в [69].

При переносе локализационных доказательств из [10] на исключительные группы возникают заметные технологические усложнения, но общая канва рассуждений остается неизменной, как и итоговый результат: «веерное» расположение подгрупп в духе Боревича. А именно, для всякой подгруппы H, лежащей между $\mathrm{E}(\mathrm{F}_4, R)$ и $G(\mathrm{E}_6, R)$ (рассматриваемых как подгруппы в $\mathrm{GL}(27, R)$), существует единственный идеал A кольца R такой, что H лежит между $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A) = E(\mathrm{F}_4, R)E(\mathrm{E}_6, R, A)$ и ее нормализатором в $G(\mathrm{E}_6, R)$.

Теорема C. *Пусть R — коммутативное кольцо. Тогда для любой подгруппы в $G = G(\mathrm{E}_6, R)$, содержащей группу $E(\mathrm{F}_4, R)$, существует единствен-*

ный идеал $A \trianglelefteq R$ такой, что

$$\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A) \leq H \leq N_G(\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)).$$

Рассмотрим расширенную группу Шевалле

$$\overline{G}(\mathrm{F}_4, R) = G(\mathrm{F}_4, R)\,\mathrm{Cent}(G(\mathrm{E}_6, R))$$

(через $\mathrm{Cent}(G)$ мы обозначаем центр группы G). Мы доказываем (см. предложение 3.7) аналог теоремы A для вложения группы типа F_4 в группу типа E_6: $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$ является нормализатором $E(\mathrm{F}_4, R)$ в $G(\mathrm{E}_6, R)$

Кроме того, мы явно вычисляем нормализатор, фигурирующий в теореме. Оказывается, что условие принадлежности матрицы группе $N_G(\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A))$ описывается сравнениями (по модулю идеала A) на ее коэффициенты (см. предложение 3.15). Мы явно приводим эти сравнения в предложении 3.17.

С технической точки зрения доказательства этих результатов соединяют метод *локализации-пополнения*, предложенный Баком в [21] и позднее упрощенный Хазратом и Вавиловым в [33], [34], [10], с явными вычислениями с элементами исключительных групп в минимальных представлениях, освоенными Вавиловым и его учениками (см. [5], [6], [7], [8], [9], [13]).

Третья глава организована следующим образом. В разделе 3.1 мы вводим основные обозначения, относящиеся к группе Шевалле типа F_4 в 27-мерном представлении. В разделе 3.2 вводятся элементарные группы Шевалле типов F_4 и E_6 и предварительные сведения о локализации.

В разделе 3.3 собраны технические утверждения, относящиеся к уравнениям, задающим группу $G(\mathrm{E}_6, R)$, которые в дальнейшем понадобятся нам для проведения конкретных вычислений. В разделе 3.4 обсуждается вид нужных нам параболических подгрупп в $G(\mathrm{E}_6, R)$ и $G(\mathrm{F}_4, R)$ и их унипотентных радикалов. Предложение 3.7, аналогичное теореме A, доказывается в разделе 3.5 вместе с описанием уравнениями расширенной группы Шевалле $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$. В разделе 3.6 вводится понятие нижнего уровня для классифицируемых подгрупп. В разделе 3.7 приведено описанием уравнениями нормализатора, фигурирующего в теореме C. Техническим сердцем доказательства теоремы C является раздел 3.8, в котором с помощью локализации происходит значительное упрощение задачи извлечения корневого элемента. Следующие три раздела посвящены этому извлечению: мы показываем существование корневого элемента при все более слабых условиях. После того, как это сделано, доказательство теоремы C легко завершается в разделе 3.12.

Глава 1

Нормализатор группы Шевалле типа E_6

1.1. Предварительные сведения о группах Шевалле

В этом разделе мы напомним основные сведения о группах Шевалле над кольцами и зафиксируем обозначения.

Пусть Φ — приведенная неприводимая система корней ранга l, а P — решетка, лежащая между решеткой корней $Q(\Phi)$ и решеткой весов $P(\Phi)$. Мы фиксируем на Φ некоторый порядок и обозначаем через $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, Φ^+ и Φ^- — множества простых, положительных и отрицательных корней, отвечающие этому порядку. Наша нумерация простых корней следует [2]. Для записи корней используется *нотация Дынкина*: так, для $\Phi = \mathrm{E}_6$ это означает, что корень $a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_4 + e\alpha_5 + f\alpha_6$ записывается как $\genfrac{}{}{0pt}{}{acdef}{b}$. Через δ обозначается максимальный корень системы Φ относительно этого порядка, например, для $\Phi = \mathrm{E}_6$ имеем $\delta = \genfrac{}{}{0pt}{}{12321}{2}$. Обозначим через $P(\Phi)_{++}$ множество доминантных весов для этого порядка, то есть неотрицательных целочисленных линейных комбинаций фундаментальных весов $\varpi_1, \dots, \varpi_l$. Через $W = W(\Phi)$ обозначается группа Вейля системы корней Φ.

Пусть, далее, R — коммутативное кольцо с 1. Как хорошо известно, по кольцу, системе корней Φ и решетке P можно построить **группу Шевалле** $G = G_P(\Phi, R)$, являющуюся группой точек над R некоторой аффинной групповой схемы $G = G_P(\Phi, -)$, называемой **схемой Шевалле–Демазюра**. Существование этой схемы было доказано Шевалле в [27], а единственность — Демазюром в [28]. Опишем вкратце ее построение.

Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная полупростая алгебра Ли типа Φ, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{g}$ допускает разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Phi$, где $\mathfrak{g}_\alpha$ — одномерные $\mathfrak{h}$-инвариантные подпространства. Корни $\alpha \in \Phi$ играют роль линейных функционалов на $\mathfrak{h}$, то есть $[h, e_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha$ для всех $h \in \mathfrak{h}$ и $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. Можно выбрать базис, состоящий из векторов $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ для $\alpha \in \Phi$ и $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ для $\alpha \in \Pi$ так, что $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$ и все структурные константы $N_{\alpha\beta}$, где $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}$, являются целыми числами. Такой базис называется **базисом Шевалле**. Явный выбор знаков структурных констант для случая $\Phi = \mathrm{E}_6$ проведен нами в работе [8], см. также [3], [62], [50], [51], [26], [25], [57], [46], [47]. Пусть $\mathfrak{g}_\mathbb{Z}$ — абелева группа, порожденная в $\mathfrak{g}$ базисом Шевалле. Тогда $\mathfrak{g}_\mathbb{Z}$ является $\mathbb{Z}$-формой $\mathfrak{g}$, то есть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}$. Возьмем коммутативное кольцо R и положим $\mathfrak{g}_R = \mathfrak{g}_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} R$; тогда $\mathfrak{g}_R$ является алгеброй Ли над R и называется *расщепимой полупростой алгеброй Ли типа* Φ *над* R или *алгеброй Шевалле типа* Φ *над* R.

Рассмотрим теперь конечномерное представление $\pi : \ \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ комплексной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с выбранным базисом Шевалле. Для $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ определим **весовое подпространство** пространства V следующим образом:

$$V^\lambda = \langle v \in V \mid \pi(h)v = \lambda(h)v, h \in \mathfrak{h}\rangle.$$

Если $V^\lambda \neq 0$, говорят, что λ — **вес** представления π. Размерность $\mathrm{mult}(\lambda)$ пространства V^λ называется **кратностью** этого веса. Мы будем обозначать через $\overline{\Lambda}(\phi)$ *множество* весов представления π, а через $\Lambda(\phi)$ — *набор* весов, с учетом кратности. Другими словами, каждому весу $\lambda \in \overline{\Lambda}(\pi)$ ставится в соответствие m различных «весов» $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \Lambda(\pi)$, где $m = \mathrm{mult}(\lambda)$. Соответствующие множества *ненулевых* весов мы будем обозначать через $\overline{\Lambda}^*(\pi)$ и $\Lambda^*(\pi)$. Пусть $P = P(\pi)$ — *решетка весов* представления π, то есть подгруппа $P(\Phi)$, порожденная $\Lambda(\pi)$. В частности для присоединенного представления $\pi = \mathrm{ad}$ имеем $V = \mathfrak{g}$, $\Lambda^*(\pi) = \Phi$, $\Lambda(\pi) = \Phi \cup \{0_1, \dots, 0_l\}$, $P = Q(\Phi)$, $V^0 = \mathfrak{h}$, $V^\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$ для всех $\alpha \in \Phi$.

Вес $\omega \in \Lambda(\pi)$ называется *старшим весом*, а вектор $v^+ \in V^\omega$ — *вектором старшего веса*, если $\pi(e_\alpha)v^+ = 0$ для всех $\alpha \in \Phi^+$. Представление π неприводимо тогда и только тогда, когда V порождается как $\mathfrak{g}$-модуль вектором старшего веса. Кратность старшего веса неприводимого представления равна 1, и доминантные веса (то есть веса $\omega \in P(\Phi)$ такие, что $(\omega, \alpha) > 0$ для всех $\alpha \in \Pi$) биективно соответствуют классам изоморфизма конечномерных неприводимых представлений $\mathfrak{g}$. По *теореме Шевалле–Ри* в конечномерном $\mathfrak{g}$-модуле V можно выбрать $\mathbb{Z}$-решетку $V_{\mathbb{Z}}$, инвариантную по отношению к преобразованиям $\pi(e_\alpha)^m/m!$, $\alpha \in \Phi$, $m \in \mathbb{N}$; такая решетка является прямой суммой своих весовых компонент $V_{\mathbb{Z}} \cap V^\lambda$ (см. [27], [52], [59], [1], [14]). Такая решетка называется *допустимой $\mathbb{Z}$-формой* модуля V, а базис v^λ, $\lambda \in \overline{\Lambda}(\pi)$ решетки $V_{\mathbb{Z}}$, для которого любой вектор $\pi(e_\alpha^m/m!)v^\lambda$ является целочисленной линейной комбинацией базисных, называется *допустимым*.

Теперь снова возьмем коммутативное кольцо R и положим $V_R = V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} R$. Построенный таким образом свободный R-модуль V_R является $\mathfrak{g}_R$-модулем и называется **модулем Вейля** алгебры Шевалле $\mathfrak{g}_R$, соответствующим старшему весу ω.

Пусть $G = G_{\mathbb{C}}$ — связная полупростая алгебраическая группа над $\mathbb{C}$ с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и решеткой весов P, а $\mathbb{C}[G]$ — аффинная алгебра G, то есть алгебра регулярных функций на G. Структура группы на G индуцирует структуру *алгебры Хопфа* на $\mathbb{C}[G]$. Пусть $\pi: G \to V$ — представление группы G, дифференциал которого равен $\pi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ (мы будем использовать одну и ту же букву для обозначения представления и его дифференциала, поскольку из контекста всегда ясно, о каком именно отображении идет речь). После выбора допустимого базиса v^λ, $\lambda \in \Lambda(\pi)$ мы можем считать, что зафиксирован изоморфизм $V \simeq \mathbb{C}^n$, $n = \dim V$. Теперь ограничения стандартных координатных функций на $\pi(G)$ порождают подкольцо $\mathbb{Z}[G]$ в $\mathbb{C}[G]$. Это подкольцо оказывается алгеброй Хопфа над $\mathbb{Z}$ (см. [27], [28], [29]). Это позволяет нам определить *аффинную групповую схему* над $\mathbb{Z}$, то есть представимый функтор из категории коммутативных колец с 1 в категорию групп

$$G_P(\Phi, -): \ R \mapsto G_P(\Phi, R) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G], R).$$

Образ $G_P(\Phi, R)$ кольца R под действием этого функтора называется **груп-**

пой Шевалле типа Φ над R. С точностью до изоморфизма этот функтор определяется заданием Φ и P, и не зависит от π. Заметим, что по самому построению $G_P(\Phi, -)$ является подфунктором в $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{Z}} \otimes -) \simeq \mathrm{GL}(n, -)$. Мы будем работать с односвязными группами, для которых $P = P(\Phi)$ и поэтому обычно опускать указание на P в записи $G(\Phi, R)$. Если же нужно подчеркнуть, что речь идет об односвязной группе, мы будем использовать обозначение $G_{\mathrm{sc}}(\Phi, R)$. Присоединенная группа, для которой $P = Q(\Phi)$, обозначается $G_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$.

Зафиксируем расщепимый максимальный тор $T_P(\Phi, -)$ в схеме $G(\Phi, -)$, действующий диагонально на допустимом базисе v^λ, $\lambda \in \overline{\Lambda}(\pi)$. Тогда

$$T_P(\Phi, R) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[T], R) \simeq \mathrm{Hom}(P, R^*),$$

где алгебра Хопфа $\mathbb{Z}[T]$ тора T является алгеброй многочленов Лорана: $\mathbb{Z}[T] = \mathbb{Z}[\lambda_1, \lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_l, \lambda_l^{-1}]$ для некоторого базиса решетки P. Для характера этой решетки $\chi \in \mathrm{Hom}(P, R^*)$ мы будем обозначать через $h(\chi)$ соответствующий элемент $T_P(\Phi, R)$.

Для каджого корня $\alpha \in \Phi$ и $\xi \in \mathbb{C}$ линейный оператор $\xi\pi(e_\alpha)$ нильпотентен, поэтому можно определить его экспоненту

$$\exp(\xi\pi(e_\alpha)) = e + \xi\pi(e_\alpha) + \xi^2\pi(e_\alpha^2/2!) + \ldots$$

Образ базисного вектора v^λ под действием этого оператора всегда является линейной комбинацией базисных векторов с коэффициентами из кольца многочленов $\mathbb{Z}[\xi]$; это дает нам возможность определить преобразование

$$x_\alpha(\xi) = \exp(\xi\pi(e_\alpha)) \in \mathrm{GL}(V_R)$$

для любого коммутативного кольца R и элемента $\xi \in R$. Для каждого $\alpha \in \Phi$ эти преобразования определяют морфизм групповых схем $X_\alpha : \ \mathbb{G}_a \to G(\Phi, -)$, который при подстановке кольца R превращается в гомоморфизм групп $R \to G(\Phi, R)$ (здесь $\mathbb{G}_a$ обозначает аддитивную схему, то есть $\mathbb{G}_a(R)$

является аддитивной группой кольца R). Образ этого гомоморфизма называется (элементарной) **корневой подгруппой** $X_\alpha = \langle x_\alpha(\xi) \mid \xi \in R\rangle$, а группа $\mathrm{E}(\Phi, R) = \langle X_\alpha, \alpha \in \Phi\rangle$, порожденная всеми элементарными корневыми подгруппами — (абсолютной) **элементарной подгруппой** группы Шевалле $G(\Phi, R)$.

В группе $E(\Phi, R)$ справедлива *коммутационная формула Шевалле.* А именно, при $\beta \neq -\alpha$ выполнено

$$[x_\alpha(\xi), x_\beta(\zeta)] = \prod_{i\alpha+j\beta\in\Phi} x_{i\alpha+j\beta}(N_{\alpha\beta ij}\xi^i\zeta^j)$$

(везде под коммутатором $[x, y]$ имеется в виду левонормированный коммутатор: $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$). Этой формулой мы будем часто пользоваться без специального упоминания.

Напомним определение относительной элементарной группы. Пусть R — коммутативное кольцо, $A \trianglelefteq R$ — идеал в нем, Φ — произвольная система корней. Рассмотрим подгруппу $E(\Phi, A)$, порожденную всеми элементарными корневыми унипотентами *уровня* A:

$$E(\Phi, A) = \langle x_\alpha(\xi), \xi \in A\rangle.$$

Относительная элементарная группа $E(\Phi, R, A)$ определяется как нормальное замыкание этой группы в абсолютной элементарной группе:

$$E(\Phi, R, A) = E(\Phi, A)^{E(\Phi,R)}.$$

Следующее утверждение доказано Титсом [63].

Лемма 1.1. *Пусть Φ — приведенная неприводимая система корней ранга ≥ 2. Подгруппа $E(\Phi, R, A)$ порождается всеми элементами вида*

$$z_\alpha(\xi, \zeta) = {}^{x_{-\alpha}(\zeta)}x_\alpha(\xi), \qquad \xi \in A,\ \zeta \in R,\ \alpha \in \Phi.$$

Как обычно, определим $w_\alpha(\varepsilon) = x_\alpha(\varepsilon)x_{-\alpha}(-\varepsilon^{-1})x_\alpha(\varepsilon)$ для $\alpha \in \Phi$, $\varepsilon \in R^*$. Расщепимый максимальный тор $T(\Phi, R)$ является абелевой подгруппой и порождается *полупростыми корневыми элементами*

$$h_\alpha(\varepsilon) = w_\alpha(\varepsilon)w_\alpha(1)^{-1} = e + \sum_{\lambda,\lambda+\alpha\in\Lambda} ((\varepsilon-1)e_{\lambda+\alpha,\lambda+\alpha} + (\varepsilon^{-1}-1)e_{\lambda,\lambda})$$

для всех $\alpha \in \Pi(\mathrm{E}_6)$, $\varepsilon \in R^*$.

Нам также понадобится *расширенная* группа Шевалле $\overline{G}(\Phi, R)$, играющая такую же роль по отношению к $G(\Phi, R)$, как полная линейная группа $\mathrm{GL}(n, R)$ по отношению к специальной линейной группе $\mathrm{SL}(n, R)$. *Присоединенные* расширенные группы были построены в первой работе Шевалле [15]. Построить *односвязные* расширенные группы несколько сложнее, так как при этом нужно увеличить размерность максимального тора. Общая конструкция была предложена Берманом и Муди [24]. Для случая $\Phi = \mathrm{E}_6$ на группу $\overline{G}_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_7, K)$ естественно смотреть просто как на подгруппу обычной группы Шевалле $G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_7, K)$,

$$\overline{G}_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K) = G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K) \cdot T_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_7, K).$$

В случае же $\Phi = \mathrm{F}_4$ мы дадим явную конструкцию группы $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$ ниже.

A priori элементарная группа $\mathrm{E}(\Phi, R)$ зависит от выбора максимального тора $T(\Phi, R)$. В действительности, основной результат работы Джованни Таддеи [61], играющий решающую роль в доказательстве теоремы A, состоит в том, что для $\mathrm{rk}(\Phi) \geq 2$ такой зависимости нет. Для классических групп аналогичный результат был ранее доказан Андреем Суслиным и Вячеславом Копейко, см. [22], [23], [34], [60], [67] по поводу истории этого результата, других доказательств и обобщений.

Лемма 1.2. *В случае* $\mathrm{rk}(\Phi) \geq 2$ *элементарная подгруппа* $E(\Phi, R)$ *нормальна в расширенной группе Шевалле* $\overline{G}(\Phi, R)$ *для любого коммутативного кольца* R.

Конечно, формально, в [61] сформулирована лишь нормальность элементарной подгруппы в обычной группе Шевалле $G(\Phi, R)$, но нормальность в $\overline{G}(\Phi, R)$ легко получается тем же методом. Кроме того, в работах Леонида Васерштейна [64], Рузби Хазрата и Николая Вавилова [34] доказаны следующие усиления этого результата, каждое из которых, в частности, влечет лемму 1.2 в сформулированной выше форме.

Лемма 1.3. *В случае* $\mathrm{rk}(\Phi) \geq 2$ *элементарная подгруппа* $E(\Phi, R)$ *является характеристической в группе Шевалле* $G(\Phi, R)$ *для любого коммутативного кольца* R.

Лемма 1.4. *Пусть* $\mathrm{rk}(\Phi) \geq 2$, *причем в случае* $\Phi = \mathrm{B}_2, \mathrm{G}_2$ *предположим дополнительно, что* R *не имеет поля вычетов* $\mathbb{F}_2$ *из двух элементов. Тогда группа* $E(\Phi, R)$ *может быть охарактеризована как наибольшая совершенная подгруппа в* $G(\Phi, R)$.

1.2. Микровесовые представления исключительных групп

В настоящей работе мы рассматриваем группу $G(\mathrm{E}_6, R)$ в минимальном представлении со старшим весом ϖ_1, а группу $G(\mathrm{E}_7, R)$ — в минимальном представлении со старшим весом ϖ_7. Эти представления микровесовые, так что кратности всех весов равны 1. Зафиксируем некоторый допустимый базис v^λ, $\lambda \in \Lambda$, модуля V. Мы мыслим вектор $a \in V$, $a = \sum v^\lambda a_\lambda$, как *столбец* координат $a = (a_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$.

Важнейшим инструментом для работы с группой Шевалле в конкретном представлении является *весовая диаграмма* этого представления. Она строится следующим образом: каждому весу представления сопоставляется вершина диаграммы и, если $\lambda = \mu + \alpha_i$ для некоторых $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\alpha_i \in \Pi$, то вершины λ и μ соединяются ребром, снабженным меткой α_i или просто i. Мы будем располагать диаграмму так, что старший вес оказывается слева, и если разность $\lambda - \mu$ является корнем, то вершина λ расположена левее вершины μ. При этом одинаковые метки, расположенные на параллельно идущих ребрах, часто опускаются.

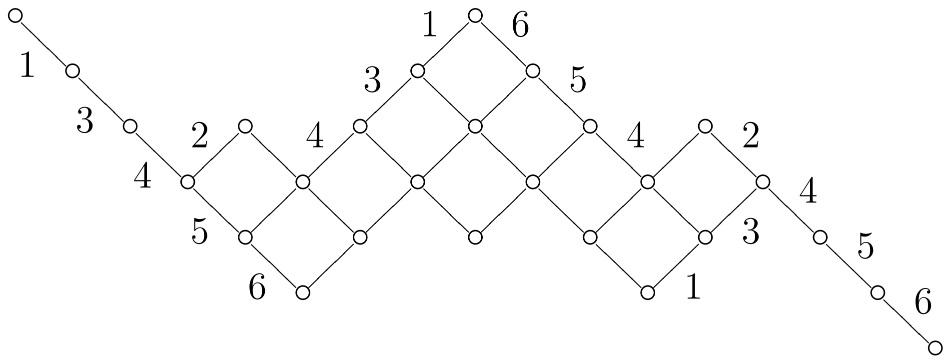


Рис. 1: (E_6, ϖ_1): корни

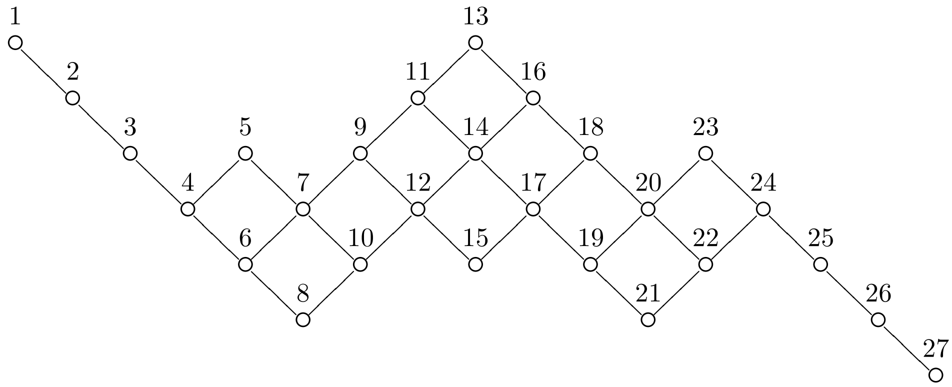
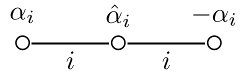


Рис. 2: (E_6, ϖ_1): естественная нумерация весов

Если Λ содержит нулевые веса, построение немного усложняется: размерность весового подмодуля V^0, отвечающего нулевому весу представления π, равна числу простых корней из Φ, которые одновременно являются весами π. Обозначим через $\hat{v}^i$ базисный вектор из V^0, соответствующий простому корню $\alpha_i \in \Pi$. Соответствующую ему вершину весовой диаграммы будем помечать символом $\hat{\alpha}_i$ или $\hat{i}$. Эту вершину мы будем соединять только с вершинами, соответствующими весам α_i и $-\alpha_i$. Таким образом, для каждого простого корня α_i, который является весом π, на диаграмме имеется следующая цепочка длины 3:



Вектор $v \in V$ теперь может рассматриваться как весовая диаграмма, в вершинах которой расставлены коэффициенты $v^\lambda \in R$.

На рисунках 1–4 воспроизведены весовые диаграммы представлений (E_6, ϖ_1) и (E_7, ϖ_7), вместе с используемой в первых двух главах диссертации *есте-*

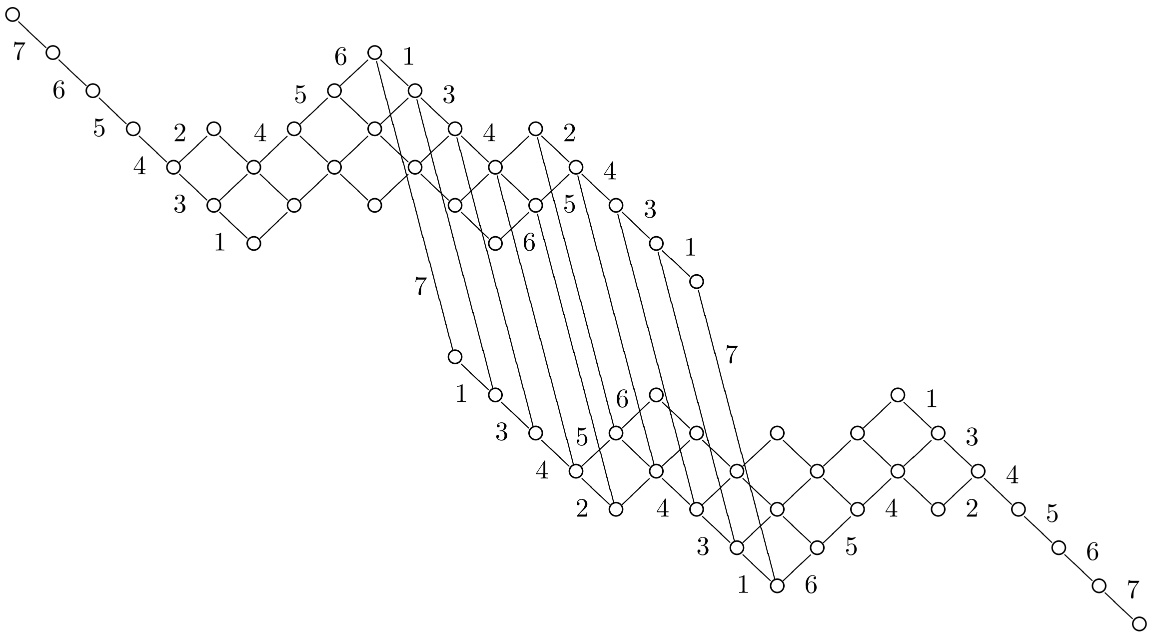


Рис. 3: (E_7, ϖ_7): корни

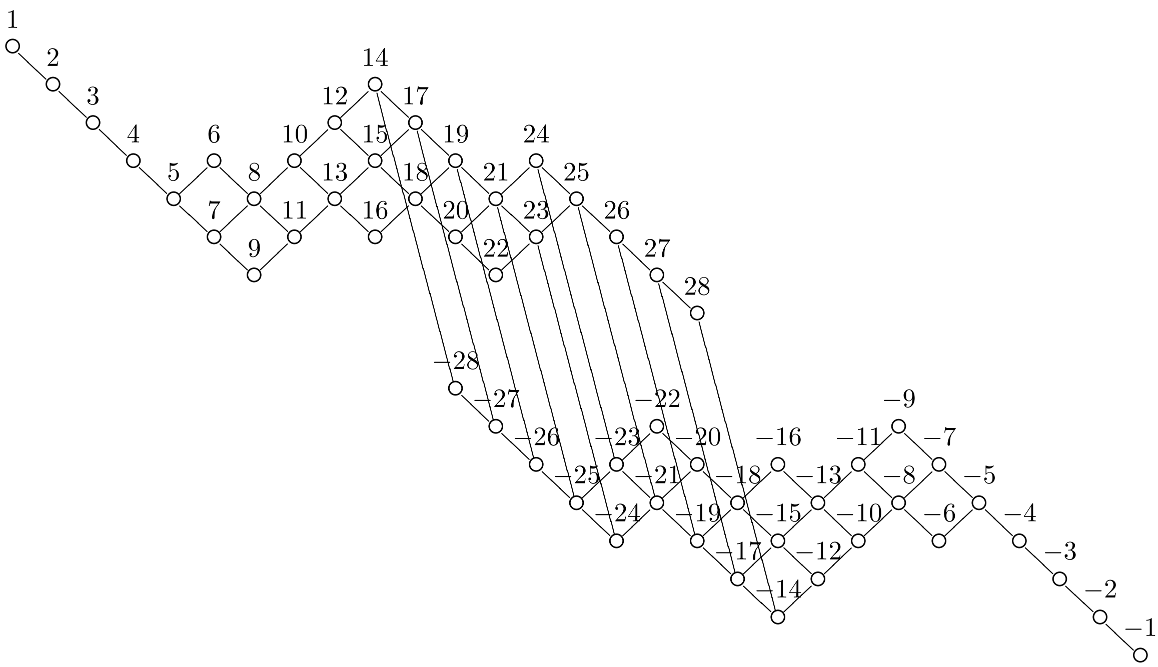


Рис. 4: (E_7, ϖ_7): естественная нумерация весов

ственной нумерацией весов, когда веса упорядочиваются в соответствии с порядком, определенным системой простых корней Π. Таким образом, мы будем обозначать веса из Λ через $\lambda_1, \ldots, \lambda_{27}$ в случае $\Phi = \mathrm{E}_6$ и через $\lambda_1, \ldots, \lambda_{28}$, $\lambda_{-28}, \ldots, \lambda_{-1}$ в случае $\Phi = \mathrm{E}_7$. Иногда (особенно в индексах) мы будем опускать λ в обозначениях весов: так, вместо g_{λ_1,λ_1} мы будем писать $g_{1,1}$ или даже g_{11}. Отметим, что в третьей главе, при изучении вложения $G(\mathrm{F}_4, R) < G(\mathrm{E}_6, R)$, нам удобнее использовать другую нумерацию (см. раздел 3.1) В работе [8] можно найти списки весов в форме Дынкина и гиперболической форме, а также другие часто используемые нумерации весов.

Весовая диаграмма помогает визуализовать действие группы на модуле представления. Так, следующий замечательный результат Мацумото [45] описывает действие элементарных корневых унипотентов.

Лемма 1.5. *1. Если $\lambda \in \Lambda^*$, $\lambda + \alpha \notin \Lambda^*$, то $x_\alpha(\xi) v^\lambda = v^\lambda$.*

2. Если $\lambda, \lambda + \alpha \in \Lambda^*$, то $x_\alpha(\xi) v^\lambda = v^\lambda + c_{\lambda,\alpha} v^{\lambda+\alpha}$.

3. Если $v^0 \in V^0$, $\alpha \notin \Lambda$, то $x_\alpha(\xi) v^0 = v^0$.

4. Если $v^0 \in V^0$, $\alpha \in \Lambda$, то $x_\alpha(\xi) v^0 = v^0 \pm \xi \alpha_*(v^0) v^\alpha$.

5. Если $\alpha \in \Lambda$, то $x_\alpha(\xi) v^{-\alpha} = v^{-\alpha} \pm \xi v^0(\alpha) \pm \xi^2 v^\alpha$.

Здесь $\alpha_* \in (V^0)^* = \mathrm{Hom}_R(V^0, R)$, $v^0(\alpha) \in V^0$ и $c_{\lambda,\alpha} = \pm 1$.

В рассматриваемых нами случаях минимальных представлений групп типов E_6 и E_7 эта лемма принимает особенно простой вид, поскольку $0 \notin \Lambda(\pi)$. Поэтому мы не будем уточнять знаки в последних двух пунктах леммы; нам достаточно знания констант $c_{\lambda,\alpha}$. Их вычисление проведено, к примеру, в работе [8], и мы будем свободно пользоваться таблицами оттуда.

Лемма Мацумото позволяет следующим образом неформально описать действие элемента $x_\alpha(\xi) \in E(\Phi, R)$ на V: нужно представить α в виде линейной комбинации простых корней и найти все пути на весовой диаграмме, согласованные с частичным порядком, которые состоят из полученного набора простых корней, идущих *в каком-нибудь порядке.* Таких путей всегда 6 для представления (E_6, ϖ_1) и 12 для представления (E_7, ϖ_7). Пусть $\alpha \in \Phi^+$; тогда $x_\alpha(\xi)$ прибавляет к крайней слева вершине такого пути крайнюю справа, умноженную на ξ. Если $\alpha \in \Phi^-$, прибавление происходит в обратном направлении.

Приведем также несложную переформулировку леммы 1.5, справедливую для микровесовых представлений (см. [5]).

Лемма 1.6. *Если π — микровесовое представление группы $G(\Phi, R)$ в пространстве $V = V(\pi)$ размерности n, $g \in \mathrm{GL}(n, R)$, $\alpha \in \Phi$ и $\xi \in R$, то*

$$(x_\alpha(\xi)g)_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma} \pm \xi g_{\rho-\alpha,\sigma}, \quad (gx_\alpha(\xi))_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma} \pm \xi g_{\rho,\sigma+\alpha}$$

для всех $\rho, \sigma \in \Lambda$.

С весовой диаграммой тесно связано понятие *весового графа*, вершинами которого служает элементы $\Lambda(\pi)$, и вершины соединяются ребром, если разность соответствующих им весов является корнем.

Определение. Пусть λ, $\mu \in \Lambda$. *Расстоянием* $d(\lambda, \mu)$ между весами λ и μ называется наименьшее $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, для которого найдется d корней $\beta_1, \ldots, \beta_d \in \Phi$ таких, что $\lambda = \mu + \beta_1 + \cdots + \beta_d$.

В частности, $d(\lambda, \lambda) = 0$ для любого $\lambda \in \Lambda$; $d(\lambda, \mu) = 1$ для двух различных весов $\lambda, \mu \in \Lambda$ тогда и только тогда, когда разность $\lambda - \mu$ является корнем. Для представления (E_6, ϖ_1) максимальное расстояние между весами равно 2, поэтому $d(\lambda, \mu) = 2$ для $\lambda \neq \mu$ равносильно тому, что $\lambda - \mu \notin \Phi$. Для представления (E_7, ϖ_7) максимальное расстояние между весами равно 3, причем для всякого $\lambda \in \Lambda$ существует ровно один вес на расстоянии 3 от Λ, а именно, вес $-\lambda$.

1.3. Инвариантная кубическая форма

Важнейшими инструментами для изучения группы $G(\mathrm{E}_6, R)$ в 27-мерном представлении являются инвариантная кубическая форма, ее полная поляризация и ее 27 частных производных.

Эту форму впервые построил Леонард Диксон в 1905 году. Позже Клод Шевалле и Ганс Фрейденталь предложили другие конструкции, и ее изучением (как правило, при условии, что характеристика основного поля отлична от 2 и 3) занимались Жак Титс, Тони Спрингер, Фердинанд Фельдкамп, Арье Коэн, Брюс Куперстейн и другие. Майкл Ашбахер показал, что на самом деле и случай маленькой характеристики не создает проблем. Существует несколько способов построить эту форму; мы следуем комбинаторному описанию, приведенному в [8].

На протяжении этого раздела мы считаем, что $\Phi = \mathrm{E}_6$, $V = V(\varpi_1)$ — минимальное представление группы $G(\mathrm{E}_6, R)$, $\Lambda = \Lambda(\varpi_1)$ — множество весов этого представления.

Определение. Тройка различных весов (λ, μ, ν) называется **триадой**, если попарные разности $\lambda - \mu$, $\mu - \nu$, $\nu - \alpha$ не являются корнями.

Иными словами, все попарные расстояния (в весовом графе) между весами триады равны 2. Триада полностью определяется двумя своими элементами: для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ таких, что $d(\lambda, \mu) = 2$, найдется единственный вес $\lambda \circ \mu$ такой, что $(\lambda, \mu, \lambda \circ \mu)$ — триада.

Пусть Θ множество триад, $|\Theta| = 27 \cdot 10$. Определим на V трилинейную форму $F: V \times V \times V \to R$, придав ей следующие значения на базисных векторах: $F(v^\lambda, v^\mu, v^\nu) = \pm 1$ если $(\lambda, \mu, \nu) \in \Theta$ и $F(v^\lambda, v^\mu, v^\nu) = 0$ в противном случае. Знаки же определяются из условия, что форма F инвариантна относительно действия расширенной группы Вейля $\widetilde{W}$. Модельная триада имеет вид $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$, где

$$(\lambda_0, \mu_0, \nu_0) = \left(\begin{smallmatrix}234321\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}012221\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}000001\\0\end{smallmatrix}\right) = (\lambda_1, \lambda_{13}, \lambda_{27})$$

и мы полагаем $F(\lambda_0, \mu_0, \nu_0) = 1$ для этой триады.

Возьмем любую триаду $(\lambda, \mu, \nu) \in \Theta$. Для $w_\alpha \in W(\mathrm{E}_6)$ имеется следующая альтернатива:

- либо $w_\alpha(\lambda,\mu,\nu)=(\lambda,\mu,\nu)$,
- либо в точности два из весов λ,μ,ν перемещаются под действием w_α в противоположных направлениях, скажем,

$$w_\alpha(\lambda)=\lambda+\alpha,\qquad w_\alpha(\mu)=\mu-\alpha,\qquad w_\alpha(\nu)=\nu.$$

Посмотрев на это с точки зрения означенного базиса $\pm v^\lambda$, на котором действует *расширенная* группа Шевалле, мы видим, что либо под действием $w_\alpha(1)$ тройка базисных векторов v^λ, v^μ, v^ν не меняется, либо она переходит в *другую* тройку и при этом происходит *одна* смена знака.

Это показывает, как вычислить знак $F(v^\lambda,v^\mu,v^\nu)$. А именно, положим

$$F(v^\lambda,v^\mu,v^\nu)=\mathrm{sgn}(w),$$

где w — самый короткий элемент группы Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ такой, что

$$w(\lambda_0,\mu_0,\nu_0)=(\lambda,\mu,\nu).$$

Нетрудно доказать (см. [7]), что определенная таким образом форма инвариантна относительно действия группы $E(\mathrm{E}_6,R)$.

Другими словами, значение $\mathrm{sgn}(w)$ равно $(-1)^{h(\lambda,\mu,\nu)}$, где $h(\lambda,\mu,\nu)$ — расстояние от модельной триады до (λ,μ,ν), то есть число отражений относительно простых корней, необходимых для того, чтобы из (λ_0,μ_0,ν_0) получить (λ,μ,ν).

Кубическая форма $Q:\ V\to R$ определяется аналогично, но чтобы избежать появления коэффициента 6, который порождает проблемы в характеристиках 2 и 3, теперь нужно проводить суммирование по множеству Θ_0 *неупорядоченных* триад $\{\lambda,\mu,\nu\}$. Ясно, что $|\Theta_0|=|\Theta|/6=45$. Теперь значение формы Q на векторе $x=\sum x_\lambda v^\lambda$ определяется формулой

$$Q(x)=\sum \mathrm{sgn}(w)x_\lambda x_\mu x_\nu,$$

где сумма берется по всем $\{\lambda,\mu,\nu\}\in\Theta_0$, а w имеет тот же смысл, что выше.

Воспроизведем из [8] явный вид получающейся при помощи этой конструкции кубической формы Q относительно *естественной* нумерации весов, приведенной на рисунке 2:

$$\begin{aligned}
Q(x) = {} & x_1x_{13}x_{27} - x_1x_{16}x_{26} + x_1x_{18}x_{25} - x_1x_{20}x_{24} + x_1x_{22}x_{23} \\
& - x_2x_{11}x_{27} + x_2x_{14}x_{26} - x_2x_{17}x_{25} + x_2x_{19}x_{24} - x_2x_{21}x_{23} \\
& + x_3x_9x_{27} - x_3x_{12}x_{26} + x_3x_{15}x_{25} - x_3x_{19}x_{22} + x_3x_{20}x_{21} \\
& - x_4x_7x_{27} + x_4x_{10}x_{26} - x_4x_{15}x_{24} + x_4x_{17}x_{22} - x_4x_{18}x_{21} \\
& + x_5x_6x_{27} - x_5x_8x_{26} + x_5x_{15}x_{23} - x_5x_{17}x_{20} + x_5x_{18}x_{19} \\
& - x_6x_{10}x_{25} + x_6x_{12}x_{24} - x_6x_{14}x_{22} + x_6x_{16}x_{21} + x_7x_8x_{25} \\
& - x_7x_{12}x_{23} + x_7x_{14}x_{20} - x_7x_{16}x_{19} - x_8x_9x_{24} + x_8x_{11}x_{22} \\
& - x_8x_{13}x_{21} + x_9x_{10}x_{23} - x_9x_{14}x_{18} + x_9x_{16}x_{17} - x_{10}x_{11}x_{20} \\
& + x_{10}x_{13}x_{19} + x_{11}x_{12}x_{18} - x_{11}x_{15}x_{16} - x_{12}x_{13}x_{17} + x_{13}x_{14}x_{15}
\end{aligned}$$

Нам также понадобится явный вид 27 частных производных формы Q.

$$f_1(x) = x_{13}x_{27} - x_{16}x_{26} + x_{18}x_{25} - x_{20}x_{24} + x_{22}x_{23}$$

$$f_2(x) = -x_{11}x_{27} + x_{14}x_{26} - x_{17}x_{25} + x_{19}x_{24} - x_{21}x_{23}$$

$$f_3(x) = x_9x_{27} - x_{12}x_{26} + x_{15}x_{25} - x_{19}x_{22} + x_{20}x_{21}$$

$$f_4(x) = -x_7x_{27} + x_{10}x_{26} - x_{15}x_{24} + x_{17}x_{22} - x_{18}x_{21}$$

$$f_5(x) = x_6x_{27} - x_8x_{26} + x_{15}x_{23} - x_{17}x_{20} + x_{18}x_{19}$$

$$f_6(x) = x_5x_{27} - x_{10}x_{25} + x_{12}x_{24} - x_{14}x_{22} + x_{16}x_{21}$$

$$f_7(x) = -x_4x_{27} + x_8x_{25} - x_{12}x_{23} + x_{14}x_{20} - x_{16}x_{19}$$

$$f_8(x) = -x_5x_{26} + x_7x_{25} - x_9x_{24} + x_{11}x_{22} - x_{13}x_{21}$$

$$f_9(x) = x_3x_{27} - x_8x_{24} + x_{10}x_{23} - x_{14}x_{18} + x_{16}x_{17}$$

$$f_{10}(x) = x_4x_{26} - x_6x_{25} + x_9x_{23} - x_{11}x_{20} + x_{13}x_{19}$$

$$f_{11}(x) = -x_2x_{27} + x_8x_{22} - x_{10}x_{20} + x_{12}x_{18} - x_{15}x_{16}$$

$$f_{12}(x) = -x_3x_{26} + x_6x_{24} - x_7x_{23} + x_{11}x_{18} - x_{13}x_{17}$$

$$f_{13}(x) = x_1x_{27} - x_8x_{21} + x_{10}x_{19} - x_{12}x_{17} + x_{14}x_{15}$$

$$f_{14}(x) = x_2x_{26} - x_6x_{22} + x_7x_{20} - x_9x_{18} + x_{13}x_{15}$$

$$f_{15}(x) = x_3x_{25} - x_4x_{24} + x_5x_{23} - x_{11}x_{16} + x_{13}x_{14}$$

$$f_{16}(x) = -x_1x_{26} + x_6x_{21} - x_7x_{19} + x_9x_{17} - x_{11}x_{15}$$

$$f_{17}(x) = -x_2x_{25} + x_4x_{22} - x_5x_{20} + x_9x_{16} - x_{12}x_{13}$$

$$f_{18}(x) = x_1x_{25} - x_4x_{21} + x_5x_{19} - x_9x_{14} + x_{11}x_{12}$$

$$f_{19}(x) = x_2x_{24} - x_3x_{22} + x_5x_{18} - x_7x_{16} + x_{10}x_{13}$$

$$f_{20}(x) = -x_1x_{24} + x_3x_{21} - x_5x_{17} + x_7x_{14} - x_{10}x_{11}$$

$$f_{21}(x) = -x_2x_{23} + x_3x_{20} - x_4x_{18} + x_6x_{16} - x_8x_{13}$$

$$f_{22}(x) = x_1x_{23} - x_3x_{19} + x_4x_{17} - x_6x_{14} + x_8x_{11}$$

$$f_{23}(x) = x_1x_{22} - x_2x_{21} + x_5x_{15} - x_7x_{12} + x_9x_{10}$$

$$f_{24}(x) = -x_1x_{20} + x_2x_{19} - x_4x_{15} + x_6x_{12} - x_8x_9$$

$$f_{25}(x) = x_1x_{18} - x_2x_{17} + x_3x_{15} - x_6x_{10} + x_7x_8$$

$$f_{26}(x) = -x_1x_{16} + x_2x_{14} - x_3x_{12} + x_4x_{10} - x_5x_8$$

$$f_{27}(x) = x_1x_{13} - x_2x_{11} + x_3x_9 - x_4x_7 + x_5x_6$$

Следующий результат позволяют смотреть на группу Шевалле и на расширенную группу Шевалле как на группы изометрий и подобий построенной трилинейной формы F.

Лемма 1.7.

$$G(\Phi, R) = \{g \in \mathrm{GL}(27, R) \,|F(gu, gv, gw) = F(u, v, w) \text{ для всех } u, v, w \in V\};$$

$$\overline{G}(\Phi, R) = \{g \in \mathrm{GL}(27, R) \,|F(gu, gv, gw) = \lambda(g)F(u, v, w)$$
$$\text{для некоторого } \lambda(g) \in R^* \text{ и всех } u, v, w \in V\}.$$

Второе из этих равенств было доказано в работе [7], а первое по существу доказано в [20]; см. также [67], где приведен набросок более простого доказательства.

1.4. Вычисление нормализатора группы Шевалле типа E_6

Перед тем, как доказывать теорему A, сформулируем комбинаторную лемму.

Лемма 1.8. *Если $d(\lambda,\mu)=2$, то не существует такого $\alpha\in\Phi$, что $\lambda+\alpha,\mu+\alpha\in\Lambda$.*

Доказательство. В силу транзитивности действия группы Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ на парах весов, находящихся на одинаковом расстоянии в весовом графе, можно без потери общности считать, что $\lambda=\lambda_0$ – старший вес модуля V, а $\mu=\nu_0$ – младший вес. Но тогда из того, что $\lambda+\alpha\in\Lambda$ вытекает, что $\alpha\in\Phi^-$, а из того, что $\mu+\alpha\in\Lambda$ – что $\alpha\in\Phi^+$, что невозможно в силу того, что $\Phi^+\cap\Phi^-=\emptyset$.

Замечание. В дальнейшем мы при анализе конфигураций весов будем без явного упоминания использовать транзитивность действий группы Вейля на парах весов. Часто для того, чтобы провести некоторое рассуждение, можно перевести имеющийся набор весов в некоторый *удобный* элементом группы $W(\mathrm{E}_6)$; после этого достаточно явно указать необходимое построение и затем перевести его в исходную ситуацию.

Доказательство теоремы A. Очевидно, что $\overline{G}(\mathrm{E}_6,R)\le N(G(\mathrm{E}_6,R))$. По лемме 1.2 имеем $\overline{G}(\mathrm{E}_6,R)\le N(E(\mathrm{E}_6,R))$. С другой стороны, как $N(E(\mathrm{E}_6,R))$, так и $N(G(\mathrm{E}_6,R))$ очевидным образом содержатся в $\mathrm{Tran}(E(\mathrm{E}_6,R),G(\mathrm{E}_6,R))$. Таким образом, для завершения доказательства теоремы достаточно доказать, что $\mathrm{Tran}(E(\mathrm{E}_6,R),G(\mathrm{E}_6,R))$ содержится в $\overline{G}(\mathrm{E}_6,R)$.

Пусть $g\in\mathrm{GL}(27,R)$ лежит в $\mathrm{Tran}(E(\mathrm{E}_6,R),G(\mathrm{E}_6,R))$. Выберем $\alpha\in\Phi$ и $\xi\in R$. Тогда $h=gx_\alpha(1)g^{-1}$ лежит в $G(\mathrm{E}_6,R)$, значит, $F(hu,hv,hw)=F(u,v,w)$ для всех $u,v,w\in V$. Подставляя (gu,gv,gw) вместо (u,v,w), получаем, что

$$F(gx_\alpha(1)u,gx_\alpha(1)v,gx_\alpha(1)w)=F(gu,gv,gw).$$

Учитывая, что $x_\alpha(1)=e+e_\alpha$ и пользуясь линейностью F по всем аргументам, получаем, что

$$\begin{aligned} 0 = {} & F(gu, gv, ge_\alpha w) + F(gu, ge_\alpha v, gw) + F(ge_\alpha u, gv, gw) + \\ & F(gu, ge_\alpha v, ge_\alpha w) + F(ge_\alpha u, gv, ge_\alpha w) + F(ge_\alpha u, ge_\alpha v, gw) + \\ & F(ge_\alpha u, ge_\alpha v, ge_\alpha w) \end{aligned} \tag{1}$$

для всех $u, v, w \in V$.

i) Теперь пусть $e_\alpha u = 0$. Применяя сформулированное выше условие к векторам $(u, e_\alpha v, e_\alpha w)$ и используя тот факт, что $e_\alpha^2 = 0$, получаем, что

$$F(gu, ge_\alpha v, ge_\alpha w) = 0, \qquad \text{если } e_\alpha u = 0.$$

ii) Продолжая считать, что $e_\alpha u = 0$, применим сформулировнное выше условие к тройке (u, v, w). Оно приобретет следующий вид

$$F(gu, gv, ge_\alpha w) + F(gu, ge_\alpha v, gw) + F(gu, ge_\alpha v, ge_\alpha w) = 0.$$

Но, как мы только что показали, третье слагаемое в этой сумме тоже равно 0. Таким образом, $F(gu, gv, ge_\alpha w) + F(gu, ge_\alpha v, gw) = 0$ для всех $v, w \in V$ и $u \in V$ таких, что $e_\alpha u = 0$. Подставим в это равенство $e_\alpha u$ вместо u:

$$F(ge_\alpha u, gv, ge_\alpha w) + F(ge_\alpha u, ge_\alpha v, gw) = 0 \qquad \text{для всех } u, v, w \in V.$$

iii) Теперь фиксируем $\lambda, \mu \in \Lambda$ такие, что $d(\lambda, \mu) = 1$ и некоторый вес $\nu \in \Lambda$. Выберем $\alpha \in \Phi$ так, чтобы $\lambda - \alpha \in \Lambda$, $\mu - \alpha \in \Lambda$, $\nu + \alpha \notin \Lambda$. Такой выбор возможен: для доказательства этого можно считать, что $\lambda = \lambda_0$ — старший вес, а $\mu = \lambda - \delta$, где $\delta \in \Phi$ — максимальный корень. Тогда $\alpha = \alpha_1$ подходит для всех $\nu \in \Lambda$, кроме тех, для которых $\nu + \alpha_1 \in \Lambda$. Но для них такой выбор легко указать: положим

$$\begin{aligned} \alpha &= \substack{11000 \\ 0} &\quad& \text{для} \quad \nu = \lambda_2,\ \lambda_{20},\ \lambda_{21}, \\ \alpha &= \substack{11100 \\ 0} && \text{для} \quad \nu = \lambda_{18}, \\ \alpha &= \substack{11110 \\ 0} && \text{для} \quad \nu = \lambda_{16}, \\ \alpha &= \substack{11111 \\ 0} && \text{для} \quad \nu = \lambda_{13}. \end{aligned}$$

Возьмем $u = v^{\lambda-\alpha}$, $v = v^{\nu}$, $w = v^{\mu-\alpha}$. Благодаря нашему выбору α, $e_\alpha v^\nu = 0$ и результат пункта ii) превращается в равенство $F(ge_\lambda, ge_\nu, ge_\mu) = 0$. Поскольку это верно для всех $\nu \in \Lambda$, то

$$F(gv^\lambda, gv, gv^\mu) = 0, \quad \text{если } d(\lambda, \mu) = 1.$$

В частности, можно подставить в это равенство $v = g^{-1}v^\nu$ для $\nu \in \Lambda$ и получить все уравнения на пару столбцов $g_{*\lambda}$ и $g_{*\mu}$.

iv) Таким образом, $F(gv^\lambda, gv^\mu, gv^\nu) = 0$ для весов $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ таких, что хотя бы одно из попарных расстояний между ними равно 1. Если же хотя бы одно из расстояний равно 0, например, $\lambda = \mu$, то найдется корень α такой, что $\lambda + \alpha \notin \Lambda$, $\nu - \alpha \in \Lambda$. Из пункта ii) мы знаем, что $F(gu, gv, ge_\alpha w) + F(gu, ge_\alpha v, gw) = 0$ для всех $v, w \in V$ и $u \in V$ таких, что $e_\alpha u = 0$. Взяв $u = e^\lambda$, $v = e^\mu$, $w = e^{\nu-\alpha}$, получаем, что $F(gv^\lambda, gv^\mu, gv^\nu)$ равно 0 и в этом случае.

v) Остается посмотреть на значения $F(gv^\lambda, gv^\mu, gv^\nu)$ для $(\lambda, \mu, \nu) \in \Theta$. Обозначим $k = F(gv^{\lambda_0}, gv^{\mu_0}, gv^{\nu_0})$. Пусть $\alpha \in \Pi$ такой, что w_α не оставляет на месте триаду (λ, μ, ν): будем считать, что $w_\alpha(\lambda) = \lambda$, $w_\alpha(\mu) = \mu + \alpha$, $w_\alpha(\nu) = \nu - \alpha$. Тогда по лемме 1.8 имеем $\lambda + a \notin \Lambda$. Подставим $(v^\lambda, v^\mu, v^{\nu-\alpha})$ в условие (1) и используем результат пункта iii). Получим, что $F(gv^\lambda, gv^\mu, gv^\nu) = -F(gv^\lambda, gv^{\mu+\alpha}, gv^{\nu-\alpha})$. Последовательно применяя такие отражения w_α, из триады $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$ можно получить любую другую триаду; отсюда следует, что $F(gv^\lambda, gv^\mu, gv^\nu) = (-1)^{h(\lambda,\mu,\nu)}k$. С другой стороны, из явной формулы для F, приведенной в разделе 1.3, следует, что $F(v^\lambda, v^\mu, v^\nu) = (-1)^{h(\lambda,\mu,\nu)}$. Таким образом, $F(gv^\lambda, gv^\mu, gv^\nu) = kF(v^\lambda, v^\mu, v^\nu)$. Для троек весов $(\lambda, \mu, \nu) \notin \Theta$ мы показали, что $F(gv^\lambda, gv^\mu, gv^\nu) = kF(v^\lambda, v^\mu, v^\nu) = 0$. Отсюда в силу трилинейности формы F получаем, что $F(gu, gv, gw) = kF(u, v, w)$ для всех $u, v, w \in V$. Подставив g^{-1} вместо g, получим, что $k \in R^*$. Значит, g лежит в группе подобий формы F.

1.5. Экспликация уравнений

В настоящем разделе мы придадим еще одну, более явную, форму уравнениям, определяющим принадлежность матрицы $g \in \mathrm{GL}(27, R)$ нормализатору группы Шевалле $G(\mathrm{E}_6, R)$. Лемма 1.7 характеризует $\overline{G}(\mathrm{E}_6, R)$ как наибольшую *подгруппу* в $\mathrm{GL}(27, R)$, состоящую из матриц, первые столбцы которых удовлетворяют системе квадрик. Однако, она не отвечает на вопрос, когда *индивидуальная* матрица $g \in \mathrm{GL}(27, R)$ принадлежит $\overline{G}(\mathrm{E}_6, R)$? Ясно, что в уравнениях на матрицу g должны фигурировать элементы нескольких столбцов.

Напомним обозначение для *поляризации* частной производной кубической формы F:

$$f_\lambda(x, y) = F(e_\lambda, x, y) = \sum \mathrm{sgn}(w) x_\mu y_{\lambda \circ \mu},$$

Сумма здесь берется по всем весам ν таким, что $d(\lambda, \mu) = 2$, а а $w \in W(\mathrm{E}_6)$ выбирается так, чтобы $w(\lambda_0, \mu_0, \nu_0) = (\lambda, \mu, \lambda \circ \mu)$. Явные формулы для $f_\lambda(x, y)$ в выбранной нами нумерации легко получить поляризацией из формул для частных производных $f_\lambda(x)$ кубической формы Q, приведенных в разделе 1.3. Чтобы не вводить в доказательстве элементы группы Вейля для различных троек, в дальнейшем мы используем привычное обозначение $\mathrm{sgn}(w) = (-1)^{h(\lambda, \mu, \lambda \circ \mu)}$.

Следующий результат является аналогом предложения 4 работы [10] и предложения 1 работы [11] (см. также лемму 3.9 ниже) Обратите внимание на то, что теперь вместо элементов матрицы g в уравнениях фигурируют квадратичные формы от этих элементов. Таким образом, по отношению к элементам матриц g и g^{-1} эти уравнения являются не квадратичными, как для классических групп, а *кубическими*.

Теорема D. *Матрица $g \in \mathrm{GL}(27, R)$ лежит в $N(G(\mathrm{E}_6, R))$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- **Уравнения на пару близких столбцов.** *Для всех $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ та-*

ких, что $d(\mu,\nu)\le 1$, *имеем*

$$f_\lambda(g_{*\mu},g_{*\nu})=0.$$

• **Уравнения на две пары далеких столбцов.** *Для всех* $\lambda,\mu,\nu,\rho,\sigma,\tau\in\Lambda$ *таких, что* $d(\mu,\nu)=d(\sigma,\tau)=2$, *имеем*

$$(-1)^{h(\mu\circ\nu,\mu,\nu)}g'_{\mu\circ\nu,\lambda}f_\rho(g_{*\sigma},g_{*\tau})=(-1)^{h(\sigma\circ\tau,\sigma,\tau)}g'_{\sigma\circ\tau,\rho}f_\lambda(g_{*\mu},g_{*\nu})$$

Доказательство. Сначала докажем, что любая матрица из $\overline{G}(\mathrm{E}_6,R)$ удовлетворяет этим уравнениям. По определению $g\in\overline{G}(\mathrm{E}_6,R)$ равносильно тому, что найдется $k(g)\in R^*$ такое, что $F(gu,gv,gw)=k(g)F(u,v,w)$. Это условие, в свою очередь, равносильно такому же условию, где u, v, w — базисные векторы v^λ, v^μ, v^ν соответственно, для всех троек весов $\lambda,\mu,\nu\in\Lambda$. Если $d(\mu,\nu)\le 1$, то наше условие превращается в $F(gv^\lambda,gv^\mu,gv^\nu)=0$ для всех $\lambda\in\Lambda$, что эквивалентно тому, что $F(u,gv^\mu,gv^\nu)=0$ для всех $u\in V$, что эквивалентно $F(v^\lambda,gv^\mu,gv^\nu)=0$, а это и есть уравнения на пару близких столбцов. Если же $d(\mu,\nu)=2$, наше условие эквивалентно тому, что $F(gu,gv^\mu,gv^\nu)=k(g)F(u,v^\mu,v^\nu)$ для всех $u\in V$, а это эквивалентно тому, что $F(u,gv^\mu,gv^\nu)=k(g)F(g^{-1}u,v^\mu,v^\nu)$ для всех $u\in V$. Достаточно требовать выполнения этого только для $u=v^\lambda$, то есть $F(v^\lambda,gv^\mu,gv^\nu)=k(g)F(g^{-1}v^\lambda,v^\mu,v^\nu)$. Преобразуем правую часть:

$$\begin{aligned}k(g)F(g^{-1}v^\lambda,v^\mu,v^\nu)&=k(g)F(g'_{*\lambda},v^\mu,v^\nu)=k(g)\sum_{\kappa\in\Lambda}g'_{\kappa\lambda}F(v^\kappa,v^\mu,v^\nu)\\&=k(g)g'_{\mu\circ\nu,\lambda}F(v^{\mu\circ\nu},v^\mu,v^\nu)=k(g)g'_{\mu\circ\nu,\lambda}(-1)^{h(\mu\circ\nu,\mu,\nu)}.\end{aligned}$$

В то же время левая часть — это $f_\lambda(g_{*\mu},g_{*\nu})$. Чтобы избавиться от коэффициента подобия $k(g)$, возьмем теперь другую тройку весов $\rho,\sigma,\tau\in\Lambda$ с $d(\sigma,\tau)=2$. Исключая $k(g)$ из получившихся соотношений, мы как раз и придем к уравнениям на пары далеких столбцов.

Пусть теперь H — аффинная схема над $\mathbb{Z}$, определенная уравнениями из формулировки предложения. Включение $H(R)\subseteq\overline{G}(\mathrm{E}_6,R)$ достаточно доказывать для случая локального кольца R. Пусть M — максимальный идеал R. Заметим, что из уравнений на пару близких столбцов следует, что $F(gv^\lambda, gv^\mu, gv^\nu) = 0$ для всех $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ таких, что $d(\mu, \nu) \leq 1$. Осталось найти $k \in R^*$ такое, что $f_\lambda(g_{*\mu}, g_{*\nu}) = k(-1)^{h(\mu\circ\nu,\mu,\nu)} g'_{\mu\circ\nu,\lambda}$ для всех $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ таких, что $d(\mu, \nu) = 2$.

Докажем вначале, что найдутся $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ такие, что $d(\mu, \nu) = 2$ и

$$g'_{\mu\circ\nu,\lambda} f_\lambda(g_{*\mu}, g_{*\nu}) \in R^*.$$

Предположим обратное: пусть для всех $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ таких, что $d(\mu, \nu) = 2$, имеем $g'_{\mu\circ\nu,\lambda} f_\lambda(g_{*\mu}, g_{*\nu}) \in M$. Заметим, что найдутся $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ такие, что $d(\mu, \nu) = 2$ и $g'_{\mu\circ\nu,\lambda} \in R^*$, для этого достаточно фиксировать μ, ν, и варьировать λ. Кроме того, найдутся $\rho, \sigma, \tau \in \Lambda$ такие, что $d(\sigma, \tau) = 2$ и $f_\rho(g_{*\sigma}, g_{*\tau}) \in R^*$. В самом деле, в противном случае при любых фиксированных ρ, σ с учетом уравнений на пару близких столбцов имеем $f_\rho(g_{*\sigma}, g_{*\tau}) \in M$ для *всех* $\tau \in \Lambda$. Но тогда по линейности отсюда следует, что $f_\rho(g_{*\sigma}, u) \in M$ для всех $u \in V$. Но это значит, что $f_\rho(g_{*\sigma}, v^\kappa) = \pm g_{\rho\circ\kappa,\sigma} \in M$ для всех $\rho, \kappa \in \Lambda$ таких, что $d(\rho, \kappa) = 2$, что невозможно. Таким образом, $g'_{\mu\circ\nu,\lambda} f_\rho(g_{*\sigma}, g_{*\tau}) \in R^*$ и $g'_{\sigma\circ\tau,\rho} f_\lambda(g_{*\mu}, g_{*\nu}) \in M$, что противоречит тому, что $g \in H(R)$. Значит, найдутся $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ с $d(\mu, \nu) = 2$ такие, что $g'_{\mu\circ\nu,\lambda} f_\lambda(g_{*\mu}, g_{*\nu}) \in R^*$. Положим

$$k = (-1)^{h(\mu\circ\nu,\mu,\nu)} (g'_{\mu\circ\nu,\lambda})^{-1} f_\lambda(g_{*\mu}, g_{*\nu}).$$

С учетом этого обозначения уравнения на g можно переписать в виде

$$f_\rho(g_{*\sigma}, g_{*\tau}) = k(-1)^{h(\sigma\circ\tau,\sigma,\tau)} g'_{\sigma\circ\tau,\rho},$$

как и утверждалось.

Глава 2

Надгруппы исключительных групп в минимальных представлениях

2.1. План доказательства

В этой главе $\Phi = \mathrm{E}_6$ или $\Phi = \mathrm{E}_7$. В ситуациях, когда имеет значение, какой именно из двух случаев имеет место, мы будем отделять высказывания для $\Phi = \mathrm{E}_6$ и $\Phi = \mathrm{E}_7$ знаком «risp». Напомним, что мы рассматриваем группы $G(\Phi, R)$ как подгруппы полной линейной группы $\mathrm{GL}(n, R)$, причем $n = 27$ risp 56.

Нашей ближайшей целью является доказательство следующих двух предложений:

Предложение 2.1. *Пусть $A \trianglelefteq R$. Тогда*

$$E(n, A)^{E(\Phi,R)} = E(n, R, A),$$

где, как обычно, $E(n, R, A) = E(n, A)^{E(n,R)}$.

Предложение 2.2. *Пусть H — подгруппа в $\mathrm{GL}(n, R)$, содержащая $E(\Phi, R)$, причем $2, 3 \in R^*$. Для $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$ положим $A_{\lambda\mu} = \{\xi \in R \mid t_{\lambda\mu}(\xi) \in H\}$. Тогда для любых $\rho, \sigma \in \Lambda$, $\rho \neq \sigma$ имеем $A_{\lambda\mu} = A_{\rho\sigma} = A$, причем $A \trianglelefteq R$.*

Из этих двух теорем немедленно следует теорема B. Таким образом, мы определили *нижний уровень* подгруппы H — наибольший идеал $A \trianglelefteq R$ такой, что подгруппа $E(\Phi, R)E(n, R, A)$ содержится в H. Следующее предложение утверждает, что эта подгруппа является совершенной.

Предложение 2.3. *Пусть R — коммутативное кольцо, $A \trianglelefteq R$. Тогда Группы $\mathrm{EE}_6(27, R, A) = E(\mathrm{E}_6, R)E(27, R, A)$ и $\mathrm{EE}_7(56, R, A) = E(\mathrm{E}_7, R)E(56, R, A$ совершенны.*

Следующий результат является аналогом предложения 2.1 для симплектической группы, которая возникает в случае $\Phi = \mathrm{E}_7$.

Предложение 2.4. *Пусть* $A \trianglelefteq R$, $2 \in R^*$. *Тогда*

$$\mathrm{Ep}(56, A)^{E(\mathrm{E}_7, R)} = \mathrm{Ep}(56, R, A),$$

где, как обычно, $\mathrm{Ep}(56, R, A) = \mathrm{Ep}(56, A)^{\mathrm{Ep}(56,R)}$.

Напомним, что построение симплектической группы, обозначенной выше $\mathrm{Ep}(56, R)$, проведено в разделе 2.7.

Вот как выглядит аналог предложения 2.3 в этом случае.

Предложение 2.5. *Пусть* R *— коммутативное кольцо,* $A \trianglelefteq R$, $B \trianglelefteq R$, $A \subseteq B$, $2 \in R^*$. *Группа* $\mathrm{EE}_7'(56, R, A, B) = E(\mathrm{E}_7, R)E(56, R, A)\,\mathrm{Ep}(56, R, B)$ *совершенна.*

2.2. Построение нижнего уровня

Доказательство предложения 2.1. Очевидно, что левая часть содержится в правой. Для доказательства обратного включения воспользуемся леммой 1.1: группа $E(n, R, A)$ порождается всеми трансвекциями вида

$$z_{\lambda\mu}(\xi, \zeta) = {}^{t_{\mu\lambda}(\zeta)}t_{\lambda\mu}(\xi)$$

для $\xi \in A, \zeta \in R$, $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$. Таким образом, достаточно убедиться, что $z_{\lambda\mu}(\xi, \zeta)$ содержится в $H = E(n, A)^{E(\Phi,R)}$. Доказательство этого содержится в леммах 2.6, 2.8 и 2.9; в них разобраны, соответственно, случаи $d(\lambda, \mu) = i$, $i = 1, 2, 3$. Очевидно, что в нашем представлении 2 risp 3 — это максимальное расстояние между весами, и предложение доказано, как только проверена справедливость следующих лемм.

В дальнейшем везде $\zeta \in R$, $\xi \in A$. Мы будем пользоваться следующим прямым вычислением:

$$\begin{aligned} z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta) &= t_{\mu\lambda}(\zeta)t_{\lambda\mu}(\xi)t_{\mu\lambda}(-\zeta) \\ &= (e+\zeta e_{\mu\lambda})(e+\xi e_{\lambda\mu})(e-\zeta e_{\mu\lambda}) \\ &= e+\xi e_{\lambda\mu}+\xi\zeta(e_{\mu\mu}-e_{\lambda\lambda})-\xi\zeta^2 e_{\mu\lambda}. \end{aligned}$$

Лемма 2.6. *Пусть* $d(\lambda,\mu)=1$. *Тогда* ${}^{t_{\mu\lambda}(\zeta)}t_{\rho\sigma}(\xi)\in H$ *для любых* ρ, $\sigma\in\Lambda$. *В частности,* $z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta)\in H$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\rho=\lambda$, $\sigma=\mu$. Обозначим $\mu-\lambda=\alpha\in\Phi$ и рассмотрим

$${}^{x_\alpha(\zeta)}t_{\lambda\mu}(\xi)=x_\alpha(\zeta)t_{\lambda\mu}(\xi)x_\alpha(-\zeta)\in H.$$

Из леммы 1.6 легко видеть, что

$$g=x_\alpha(\zeta)t_{\lambda\mu}(\xi)=e+\xi e_{\lambda\mu}\pm\zeta\xi e_{\mu\mu}\pm\zeta e_{\mu\lambda}+\sum_{i=1}^{s}(-1)^{\varepsilon_i}\zeta e_{\nu_i+\alpha,\nu_i},$$

где $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s$ — все отличные от λ веса ν из Λ, для которых $\nu+\alpha$ также является весом. Знаки $(-1)^{\varepsilon_i}$, с которыми они входят в эту запись, нас не интересуют; мы обращаем внимание только на знак при действии «между» весами λ и μ, который будем выражать знаками $\pm$ и $\mp$.

После этого осталось домножить получившееся на $x_\alpha(-\zeta)$ и проследить за матричными элементами. Очевидно (см. снова лемму 0), подвергнутся изменению только элементы в позициях (τ,τ'), для которых $\tau,\tau',\tau'+\alpha\in\Lambda$. Но мы уже знаем все такие τ', для которых и τ', и $\tau'+\alpha$ являются весами: это в точности $\lambda,\nu_1,\ldots,\nu_s$. Проанализировав, при каких τ добавка $g_{\tau,\tau'+\alpha}$ не равняется нулю, мы видим, что знаки для действия ‘между‘ весами ν_i и $\nu_i+\alpha$ противоположны, что приводит к уничтожению слагаемых, в которые входят ν_i — именно поэтому нас не интересует, какие именно знаки там были. Остается следующее выражение:

$${}^{x_\alpha(\zeta)}t_{\lambda\mu}(\xi)=gx_\alpha(-\zeta)=e\mp\xi\zeta e_{\lambda\lambda}+\xi e_{\lambda\mu}-\xi\zeta^2 e_{\mu\lambda}\pm\xi\zeta e_{\mu\mu}.$$

Мы видим, что это выражение совпадает с полученным выше выражением для $z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta)$ с точностью до знаков в позициях $e_{\lambda\lambda}$ и $e_{\mu\mu}$, который легко поменять, заменив с самого начала ζ на $-\zeta$.

Оставшиеся случаи, когда либо $\rho \neq \lambda$, либо $\sigma \neq \mu$, на самом деле еще проще. Действительно, $y = {}^{t_{\mu\lambda}(\zeta)}t_{\rho\sigma}(\xi) = [t_{\mu\lambda}(\zeta), t_{\rho\sigma}(\xi)] \cdot t_{\rho\sigma}(\xi)$. Если $\rho = \lambda$, но $\sigma \neq \mu$, то $y = t_{\mu\sigma}(\xi\zeta)t_{\rho\sigma}(\xi) \in E(n,A)$. Аналогично рассматривается случай, когда $\sigma = \mu$, но $\rho \neq \lambda$. Если же $\sigma \neq \mu$ и $\rho \neq \lambda$, то эти трансвекции коммутируют, и $y = t_{\rho\sigma}(\xi) \in E(n,A)$. Лемма доказана.

Следствие 2.7. *Пусть $d(\lambda,\mu) = 1$. Тогда $E(n,A)^{t_{\mu\lambda}(\zeta)} \leq H$.*

Лемма 2.8. *Пусть $d(\lambda,\mu) = 2$. Тогда $z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta) \in H$*

Доказательство. Найдем $\alpha, \beta \in \Phi$ такие, что $\lambda - \mu = \alpha + \beta$, причем $\lambda - \alpha = \mu + \beta \in \Lambda$ и $\lambda - \beta = \mu + \alpha \in \Lambda$. Это легко сделать: пара (λ,μ) переводится элементом группы Вейля в пару $(\lambda_1, \lambda_{27})$ risp $(\lambda_1, \lambda_{-28}$. Тогда можно взять, например, $\alpha = \begin{smallmatrix}12211\\1\end{smallmatrix}$ risp $\alpha = \alpha_7$ и $\beta = \begin{smallmatrix}11221\\1\end{smallmatrix}$ risp $\beta = \begin{smallmatrix}012221\\1\end{smallmatrix}$.

Обозначим $\lambda - \alpha = \mu + \beta = \kappa$, $\lambda - \beta = \mu + \alpha = \nu$. Тогда

$$\begin{aligned} z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta) &= {}^{t_{\mu\lambda}(\zeta)}t_{\lambda\mu}(\xi) \\ &= {}^{t_{\mu\lambda}(\zeta)}[t_{\lambda\nu}(\xi), t_{\nu\mu}(1)] \\ &= [t_{\lambda\nu}(\xi)t_{\mu\nu}(\xi\zeta), t_{\nu\mu}(1)t_{\nu\lambda}(-\zeta)] \\ &= t_{\lambda\nu}(\xi)t_{\mu\nu}(\xi\zeta) \cdot {}^{t_{\nu\mu}(1)t_{\nu\lambda}(-\zeta)}t_{\mu\nu}(-\xi\zeta)t_{\lambda\nu}(-\xi). \end{aligned}$$

Таким образом, достаточно доказать, что

$${}^{t_{\nu\mu}(1)t_{\nu\lambda}(-\zeta)}t_{\mu\nu}(-\xi\zeta)t_{\lambda\nu}(-\xi) \in H.$$

В дальнейшем мы ограничим все наши вычисления на четыре веса: λ, ν, μ, κ, то есть будем рассматривать свободный подмодуль W ранга 4 в модуле представления $V = \langle v^\rho | \rho \in \Lambda \rangle$, порожденный v^λ, v^ν, v^μ, v^κ. Этого достаточно для наших вычислений, потому что они будут включать лишь элементарные трансвекции $t_{\rho\sigma}(\zeta)$, где $\zeta \in R$, $\{\rho,\sigma\} \subset \{\lambda,\nu,\mu,\kappa\}$ и сопряжения при помощи элементов $x_\alpha(\zeta)$, $x_\beta(\zeta)$. Эти сопряжения также не выведут нас за пределы этого пространства: действительно, если элемент $g \in \mathrm{GL}(n,R)$ таков, что «нетривиальность действия» g заключена внутри W, то таков же и элемент ${}^{x_\alpha(r)}g$ — это немедленно следует из того, что представление микровесовое, поэтому ни один из элементов $\lambda{+}\alpha$, $\nu{+}\alpha$, $\mu{-}\alpha$, $\kappa{-}\alpha$ не является весом. Таким образом, «действия» между весами ρ и σ (где $\rho-\sigma=\alpha$) будут уничтожать друг друга так же, как было в доказательстве леммы 2.6. Конечно, то же самое касается и β.

Мы будем изображать матрицы действия элементов $\mathrm{GL}(n,R)$ при ограничении на W в базисе $(v^\lambda, v^\nu, v^\mu, v^\kappa)$. Обозначим $h = {}^{t_{\nu\lambda}(-\zeta)}t_{\mu\nu}(-\xi\zeta)t_{\lambda\nu}(-\xi)$, $g = {}^{t_{\nu\mu}(1)}h$ — элемент, принадлежность которого H нам необходимо установить. Заметим, что по следствию из леммы 2.6 элемент h лежит в H. Будем обозначать $\widetilde{g}$, $\widetilde{h}$ матрицы из $\mathrm{GL}(4,R)$, соответствующие g и h, ограниченным на W, в указанном базисе. Легко видеть, что

$$\widetilde{h} = \begin{pmatrix} 1-\xi\zeta & -\xi & 0 & 0 \\ \xi\zeta^2 & 1+\xi\zeta & 0 & 0 \\ -\xi\zeta^2 & -\xi\zeta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{g} = \begin{pmatrix} 1-\xi\zeta & -\xi & \xi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\xi\zeta^2 & -\xi\zeta & 1+\xi\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{x_\alpha(\zeta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \zeta \\ 0 & 1 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда элементу ${}^{x_\alpha(1)}h \in H$ соответствует следующая матрица:

$$\begin{pmatrix} 1-\xi\zeta & -\xi & \xi & \xi\zeta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\xi\zeta^2 & -\xi\zeta & 1+\xi\zeta & \xi\zeta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После умножения слева на $t_{\lambda\kappa}(-\xi\zeta)t_{\mu\kappa}(-\xi\zeta^2) \in E(n,R)$ мы получаем также элемент из H, который записывается матрицей $\widetilde{g}$.

Вообще говоря, последнее рассуждение справедливо только тогда, когда знаки действия у элемента $x_\alpha(\zeta)$ в ограничении на W одинаковы; тогда $x_\alpha(\zeta)$ действительно имеет такой вид, как показано выше. Но если знаки противоположны, то рассуждение не сильно меняется; при сопряжении h с помощью $x_\alpha(\pm 1)$ получается *почти* та же самая матрица, что и в рассмотренном случае. А именно, недиагональные элементы последнего столбца будут иметь противоположный знак. Понятно, что после этого нужно домножать на элементарные трансвекции с противоположными знаками в аргументах, и вновь получится в точности матрица $\widetilde{g}$. Значит, в любом случае $g \in H$ и лемма доказана.

Лемма 2.9. *Пусть* $d(\lambda,\mu) = 3$. *Тогда* $z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta) \in H$

Доказательство. Здесь $\Phi = \mathrm{E}_7$. Сейчас, как всегда, мы построим некую конфигурацию весов для конкретного случая $\lambda = \lambda_1$, $\mu = -\lambda_{-1}$, и «перенесем» ее элементом группы Вейля на произвольную пару весов на расстоянии 3 друг от друга. Возьмем $\alpha = \alpha_7$, $\beta = \genfrac{}{}{0pt}{}{123221}{2}$, $\gamma = \genfrac{}{}{0pt}{}{123321}{1}$. Нетрудно видеть, что $-\omega + \alpha + \beta + \gamma = \omega$ и $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi$. Обозначим также вес $\nu = \mu + \alpha$.

Такое же вычисление, как и в начале доказательства леммы 2.8, показывает, что достаточно проверить включение

$$g = {}^{t_{\nu\mu}(1) t_{\nu\lambda}(-\zeta)} t_{\lambda\nu}(-\xi) t_{\mu\nu}(-\xi\zeta) \in H.$$

Преобразуем далее:

$$g = t_{\nu\mu}(1) \cdot t_{\nu\lambda}(-\zeta) t_{\lambda\nu}(-\xi) t_{\nu\lambda}(\zeta) \cdot t_{\nu\lambda}(-\zeta) t_{\mu\nu}(-\xi\zeta) t_{\nu\lambda}(\zeta) \cdot t_{\nu\mu}(-1).$$

Из леммы 2.8 следует, что $t_{\nu\lambda}(-\zeta) t_{\lambda\nu}(-\xi) t_{\nu\lambda}(\zeta) \in H$, так как $d(\lambda,\nu) = 2$. Преобразуем множитель $t_{\nu\lambda}(-\zeta) t_{\mu\nu}(-\xi\zeta) t_{\nu\lambda}(\zeta)$:

$$\begin{aligned} & t_{\nu\lambda}(-\zeta) t_{\mu\nu}(-\xi\zeta) t_{\nu\lambda}(\zeta) \\ & = t_{\mu\nu}(-\xi\zeta) \cdot [t_{\mu\nu}(\xi\zeta), t_{\nu\lambda}(-\zeta)] \\ & = t_{\mu\nu}(-\xi\zeta) t_{\mu\lambda}(-\xi\zeta^2) \in E(n,A). \end{aligned}$$

Мы получили, что $g = {}^{t_{\nu\mu}(1)}h$, где $h \in H$. Теперь все аналогично финальному шагу в доказательстве леммы 2.8: посмотрим на конкретные матрицы, чтобы сравнить g и ${}^{x_\alpha(1)}h \in H$. Элементы, которые у нас получились, затрагивают только веса λ, μ и ν. Мы хотим коммутировать с $x_\alpha(1)$, поэтому необходимо еще включить в рассмотрение вес $\kappa = \lambda - \alpha$. Получившиеся четыре веса уже дают нам свободный подмодуль, которым можно ограничиться: прибавления и вычитания корня α не приводят к новым весам. Итак, можно ограничить все рассмотрение свободным подмодулем W ранга 4, натянутым на векторы v^λ, v^κ, v^ν, v^μ. Мы будем записывать эти ограничения матрицами из $\mathrm{GL}(4, R)$ в базисе $(v^\lambda, v^\kappa, v^\nu, v^\mu)$.

$$\widetilde{h} = \begin{pmatrix} 1+\xi\zeta & 0 & -\xi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \xi\zeta^2 & 0 & 1+\xi\zeta & 0 \\ -\xi\zeta^2 & 0 & -\xi\zeta & 1 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{x_\alpha(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{{}^{x_\alpha(1)}h} = \begin{pmatrix} 1-\xi\zeta & \xi\zeta & -\xi & \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\xi\zeta^2 & \xi\zeta^2 & -\xi\zeta & 1+\xi\zeta \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{g} = \begin{pmatrix} 1-\xi\zeta & 0 & -\xi & \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\xi\zeta^2 & 0 & -\xi\zeta & 1+\xi\zeta \end{pmatrix}.$$

Теперь видно, что после умножения слева ${}^{x_\alpha(1)}h$ на

$$t_{\lambda\kappa}(-\xi\zeta)t_{\mu\kappa}(-\xi\zeta^2) \in E(n, A)$$

получается g. К сожалению, $\widetilde{x_\alpha(1)}$ не всегда имеет такой вид, как указано выше. Знаки действия могут быть различными для пар весов (λ, κ) и (ν, μ). Очевидно, что есть только два приниципиально разных случая: когда знаки одинаковые (выше мы рассмотрели именно его), и когда они разные — все сводится к ним заменой $x_\alpha(1)$ на $x_\alpha(-1)$. Таким образом, когда знаки разные, можно считать, что

$$\widetilde{x_\alpha(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\widetilde{x_{\alpha(1)}h} = \begin{pmatrix} 1-\xi\zeta & -\xi\zeta & -\xi & \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\xi\zeta^2 & -\xi\zeta^2 & -\xi\zeta & 1+\xi\zeta \end{pmatrix},$$

и результат достигается умножением слева на $t_{\lambda\kappa}(\xi\zeta)t_{\mu\kappa}(\xi\zeta^2) \in E(n, A)$.

2.3. Совпадение идеалов

Напомним, что далее везде H — подгруппа в $\mathrm{GL}(n, R)$, содержащая $E(\Phi, R)$. Следующая лемма проверяется прямым вычислением.

Лемма 2.10. *Пусть λ, $\mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$, $\alpha \in \Phi$. $\lambda - \mu \neq \pm\alpha$.*

а) *Если $\mu - \alpha \notin \Lambda$, $\lambda + \alpha \in \Lambda$, то $[t_{\lambda\mu}(\xi), x_\alpha(\zeta)] = t_{\lambda+\alpha,\mu}(\pm\xi\zeta)$.*

б) *Если $\lambda - \alpha \notin \Lambda$, $\mu + \alpha \in \Lambda$, то $[t_{\lambda\mu}(\xi), x_\alpha(\zeta)] = t_{\lambda,\mu+\alpha}(\pm\xi\zeta)$.*

Лемма 2.11. *Пусть λ, $\mu \in \Lambda$, $d(\lambda, \mu) = 1$. Тогда если $\alpha \in \Phi$ таков, что $\lambda + \alpha \in \Lambda$ и $\lambda + \alpha \neq \mu$, то $\mu - \alpha \notin \Lambda$.*

Доказательство. Посмотрим на диаграмму весов. Можно считать, что $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \lambda_{21}$ risp $\mu = \lambda_{28}$. Тогда если $\lambda + \alpha \in \Lambda$, то $\alpha \in \Phi^-$ и в разложение α по простым корням должен входить $-\alpha_1$ risp $-a_7$. Но для того, чтобы $\mu - \alpha \in \Lambda$, нужно, чтобы между $\mu - \alpha$ и μ был корень $-\alpha_1$ risp $-a_7$, что возможно только при $\alpha = \mu - \lambda$.

Теперь можно доказать часть предложения 2.2:

Лемма 2.12. *Пусть $\lambda, \mu, \rho, \sigma \in \Lambda$, причем $d(\lambda, \mu) = d(\rho, \sigma) = 1$. Тогда $A_{\lambda\mu} = A_{\rho\sigma} = A_1$, причем $A_1 \trianglelefteq R$.*

Доказательство. Очевидно, что $A_{\lambda\mu}$ является подгруппой R по сложению. Пункт а) леммы 2.10 фактически утверждает, что если $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$, $\alpha \in \Phi$, $\lambda - \mu \neq \pm\alpha$, $\mu - \alpha \notin \Lambda$, то $RA_{\lambda\mu} \subset A_{\lambda+\alpha,\mu}$. Тогда по лемме 2.11 получаем $RA_{\lambda\mu} \subset A_{\rho\sigma}$ (можно «прошагать» по ребрам диаграммы и заменить оба веса в индексах на нужные нам) и, кроме того, $A_{\lambda\mu}$ является идеалом в R. Значит, все такие идеалы совпадают.

Еще одно продвижение к предложению 2.2:

Лемма 2.13. *Пусть* $\lambda, \mu, \rho, \sigma \in \Lambda$, *причем* $d(\lambda, \mu) = d(\rho, \sigma) = 2$. *Тогда* $A_{\lambda\mu} = A_{\rho\sigma} = A_2$, *причем* $A_2 \trianglelefteq R$.

Доказательство. Снова будем смотреть на диаграмму весов. Можно считать, что $\mu = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_{13}$ risp $\lambda = \lambda_{-28}$ ($\overset{22210}{1}$ risp $\overset{012222}{1}$ не является корнем, поэтому $d(\lambda, \mu) = 2$). Тогда для любого $\alpha \in \Phi^-$ выполнено $\mu - \alpha \notin \Lambda$. Значит, можно применять пункт а) леммы 4 для $\alpha \in \Phi^-$ таких, что $\lambda + \alpha \in \Lambda$. Так можно добиться, чтобы $\rho = \lambda + \alpha$ было любым другим весом таким, что $d(\rho, \mu) = 2$, кроме $\rho = \lambda_{-27}$ в случае E_6, то есть получить $RA_{\lambda\mu} \subset A_{\rho\mu}$. Если же $\Phi = \mathrm{E}_6$ и $\rho = \lambda_{27}$, нужно действовать в два шага: сначала добиться $RA_{\lambda\mu} \subset A_{\rho\mu}$, где $\rho = \lambda_{26}$, а затем перейти к $\rho - \overset{00001}{0} = \lambda_{27}$, то есть сопряжением с $x_{\alpha_6}(\pm 1)$ получить $RA_{\lambda\mu} \subset A_{\rho\mu} \subset A_{-\omega,\mu}$. Доказательство завершается так же, как в предыдущей лемме.

Теперь мы установим равенство идеалов A_1 и A_2. Для этого в следующих двух леммах доказываются включения в обе стороны. Интересно, что включение $A_1 \subset A_2$ легко получается теми же методами, что и предыдущие леммы в доказательстве предложения 2.2. Обратное же включение потребует того, что H *содержит* $E(\Phi, R)$ (ранее мы использовали только то, что H *нормализуется* $E(\Phi, R)$), и возникнет ограничение $2, 3 \in R^*$.

Лемма 2.14. $A_1 \subseteq A_2$.

Доказательство. Возьмем $\xi \in A_1$. По лемме 2.12 имеем $t_{\lambda\mu}(\xi) \in H$ для $\mu = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_{11}$ risp $\lambda = \lambda_{14}$. В таком случае по лемме 2.10 $[t_{\lambda\mu}(\xi), x_{-\alpha_1}(1)] = t_{\lambda-\alpha_1,\mu}(\xi)$ risp $[t_{\lambda\mu}(\xi), x_{-\alpha_7}(1)] = t_{\lambda-\alpha_7,\mu}(\xi)$. Но так как $d(\lambda - \alpha_1, \mu) = 2$ risp $d(\lambda - \alpha_7, \mu) = 2$, то $\xi \in A_2$.

Лемма 2.15. *Если* $2, 3 \in R^*$, *то* $A_2 \subseteq A_1$.

Доказательство. Сейчас нам придется посмотреть, что происходит при коммутировании трансвекции $t_{\lambda\mu}(\xi)$ с корневым элементом $x_\alpha(\zeta)$, если все еще $\lambda-\mu \neq \pm\alpha$, но $\lambda+\alpha$, $\mu-\alpha \in \Lambda$, где $\alpha \in \Phi$. Итак, возьмем $\xi \in A_2$, $\zeta \in R$ (на самом деле далее мы возьмем $\zeta = 1$). Будем также считать, что $d(\lambda, \mu) = 2$. Снова воспользовавшись техникой из доказательства предложения 2.1, легко видеть, что

$$\begin{aligned}
&[t_{\lambda\mu}(\xi), x_\alpha(\zeta)] \\
&\quad = (e + \xi e_{\lambda\mu} + (-1)^\varepsilon \xi\zeta e_{\lambda,\mu-\alpha} + (-1)^\eta \zeta e_{\lambda+\alpha,\lambda} + (-1)^\varepsilon \zeta e_{\mu,\mu-\alpha})\cdot \\
&\quad (e - \xi e_{\lambda\mu} + (-1)^\varepsilon \xi\zeta e_{\lambda,\mu-\alpha} - (-1)^\eta \zeta e_{\lambda+\alpha,\lambda} - (-1)^\varepsilon \zeta e_{\mu,\mu-\alpha}) \\
&\quad = e + (-1)^\varepsilon \xi\zeta e_{\lambda,\mu-\alpha} - (-1)^\eta \xi\zeta e_{\lambda+\alpha,\mu} + (-1)^{\varepsilon+\eta} \xi\zeta^2 e_{\lambda+\alpha,\mu-\alpha} \in H.
\end{aligned} \tag{2}$$

Заметим, что $d(\lambda+\alpha, \mu-\alpha) \geq 2$ (это легко проверить непосредственно: можно считать, что $\lambda = \lambda_{13}$ risp $\lambda = \lambda_{-28}$ и что $\alpha = \alpha_1$ risp $\alpha = \alpha_7$, после чего взглянуть на диаграмму весов). Значит, по лемме 2.13 имеем $t_{\lambda+\alpha,\mu-\alpha}(\pm\xi\zeta^2) \in H$, и умножением на такой элемент можно добиться $e + (-1)^\varepsilon \xi\zeta e_{\lambda,\mu-\alpha} - (-1)^\eta \xi\zeta e_{\lambda+\alpha,\mu} \in H$. Итак, мы получили, что произведение двух трансвекций $t_{\lambda,\mu-\alpha}((-1)^\varepsilon \xi\zeta) t_{\lambda+\alpha,\mu}((-1)^{\eta+1}\xi\zeta)$ лежит в H. Но нам необходимо найти какую-нибудь *одну* трансвекцию, лежащую в H.

Теперь нас будут интересовать случаи, когда $\lambda-(\mu-\alpha) = (\lambda+\alpha)-\mu = \beta$, где $\beta \in \Phi$ — фиксированный корень. Идея состоит в том, чтобы рассмотреть все трансвекции $t_{\rho\sigma}(\dots)$, для которых $\rho - \sigma = \beta$. Очевидно, что количество k таких пар (ρ, σ) равно 6 risp 12. Обозначим их (ρ_i, σ_i), $1 \leq i \leq k$.

Последняя часть наших рассуждений несколько замысловата, поэтому мы сначала разберем случай $\Phi = \mathrm{E}_6$, а затем внесем изменения, необходимые для случая $\Phi = \mathrm{E}_7$.

2.4. Доказательство леммы 2.15

Итак, пусть сначала $\Phi = \mathrm{E}_6$. Мы утверждаем, что для каждой *пары* таких пар (ρ_i, σ_i) и (ρ_j, σ_j) разность $\rho_i - \rho_j = \sigma_i - \sigma_j$ является корнем. Действительно, одна такая пара, скажем, (ρ_i, σ_i) переводится элементом группы Вейля в пару (λ_1, λ_2). Тогда легко взглянуть на оставшиеся пять пар (ρ_j, σ_j) на диаграмме весов и убедиться, что всегда $\rho_i - \rho_j = \omega - \rho_j$ будет корнем. Значит, можно применить наше вычисление, подставить $\zeta = 1$ и получить, что произведение трансвекций $t_{\rho_i,\sigma_i}(\pm\xi)t_{\rho_j,\sigma_j}(\pm\xi)$ лежит в H для любых $1 \leq i, j \leq 6$, $i \neq j$. В то же время, про знаки при ξ мы пока ничего не говорили. Очевидно, есть два случая: когда в таком произведении знаки совпадают, и когда они различны. То есть можно считать, что произведение $t_{\rho_i,\sigma_i}(\xi)t_{\rho_j,\sigma_j}(\pm\xi)$ лежит в H.

Финальная идея доказательства выглядит так: поскольку корневой элемент x_β есть произведение шести трансвекций

$$x_\beta(\xi) = \prod_{i=1}^{6} t_{\rho_i,\sigma_i}(\pm\xi),$$

можно постараться из наших попарных произведений и этого произведения составить *одну* трансвекцию $t_{\rho_i,\sigma_i}(\pm n\xi)$ с некоторым $n \in R^*$ и получить таким образом, что $\xi \in A_1$, что и требовалось. Теперь можно взять $\beta = \delta$, чтобы все знаки в выражении $x_\beta(\xi)$ были положительны.

Сейчас нам понадобятся некоторые факты относительно знаков действия корневого элемента $x_\alpha(1)$, потому что без всякого предположения о знаках реализация нашей финальной идеи невозможна. Нам понадобится теорема 1 из [65], в которой утверждается, что если α — простой корень или $-\alpha$ — простой корень, то все знаки в разложении $x_\alpha(1)$ на трансвекции равны единице. В нашем случае это означает, что в формуле 2 $\eta = \varepsilon = 0$. Таким образом, если α или $-\alpha$ — простой корень, то полученное с помощью $x_\alpha(1)$ произведение трансвекций имеет *разные* знаки при ξ. Мы взяли $\beta = \delta$, и можно взять

$$\rho_1 = \lambda_1, \quad \rho_2 = \lambda_2,$$

$$\rho_3 = \lambda_3, \quad \rho_4 = \lambda_4,$$

$$\rho_5 = \lambda_6, \quad \rho_6 = \lambda_8,$$

$$\sigma_i = \rho_i - \delta, \quad 1 \leq i \leq 6$$

Теперь заметим, что когда мы составляем произведение трансвекций

$$t_{\rho_i,\sigma_i}(\xi)t_{\rho_{i+1},\sigma_{i+1}}(\pm\xi),$$

мы используем коммутирование при помощи x_α, где $\alpha = \rho_i - \rho_{i+1}$ всегда является простым корнем. Значит, мы получим следующие произведения:

$$y_1 = t_{\rho_1,\sigma_1}(\xi)t_{\rho_2,\sigma_2}(-\xi) \in H, \quad y_2 = t_{\rho_2,\sigma_2}(\xi)t_{\rho_3,\sigma_3}(-\xi) \in H,$$

$$y_3 = t_{\rho_3,\sigma_3}(\xi)t_{\rho_4,\sigma_4}(-\xi) \in H, \quad y_4 = t_{\rho_4,\sigma_4}(\xi)t_{\rho_5,\sigma_5}(-\xi) \in H,$$

$$y_5 = t_{\rho_5,\sigma_5}(\xi)t_{\rho_6,\sigma_6}(-\xi) \in H.$$

Посмотрим на произведение $h = y_1y_2^2y_3^3y_4^4y_5^5x_\beta(-\xi) \in H$. Несложно понять, что $h = t_{\rho_6,\sigma_6}(-6\xi)$, откуда $6\xi \in A_1$ и, следовательно, $\xi \in A_1$, что завершает доказательство в рассматриваемом случае.

Пусть теперь $\Phi = \mathrm{E}_7$; в этом случае мы не можем утверждать, что для *каждой пары* пар (ρ_i, σ_i) и (ρ_j, σ_j) разность $\rho_i - \rho_j = \sigma_i - \sigma_j$ является корнем. Если посмотреть на пару $(\rho_i, \sigma_i) = (\omega, \omega - \alpha_7)$, то эта разность является корнем только для десяти из оставшихся одиннадцати пар (ρ_j, σ_j). Но нетрудно заметить, что в доказательстве для $\Phi = \mathrm{E}_6$ мы использовали не все возможные комбинации таких пар, а только пять штук, из которых составлялись элементы y_1, y_2, y_3, y_4, y_5. Сейчас мы покажем, что в случае E_7 нам понадобится ровно одиннадцать подобных комбинаций. Итак, точно так же, как и выше, можно показать, что произведение трансвекций $t_{\rho_i,\sigma_i}(\pm\xi)t_{\rho_j,\sigma_j}(\pm\xi)$ лежит в H для тех i, j, для которых разность $\rho_i - \rho_j = \sigma_i - \sigma_j$ является корнем.

Финальная идея доказательства, описанная в предыдущем разделе, применяется к нашему случаю следующим образом. Мы снова берем $\beta = \delta$, чтобы все знаки в недиагональных матричных элементах $x_\beta(\xi)$ были положительны, и, пользуясь теоремой 1 из [65], получаем, что если α или $-\alpha$ — простой корень, то знаки для $x_\alpha(1)$ также равны единице, благодаря чему в формулу 2 для этих случаев $\eta = \varepsilon = 0$. Теперь берем

$$\rho_1 = \lambda_1, \quad \rho_2 = \lambda_2, \quad \rho_3 = \lambda_3,$$

$$\rho_4 = \lambda_4, \quad \rho_5 = \lambda_5, \quad \rho_6 = \lambda_7,$$

$$\rho_7 = \lambda_6, \quad \rho_8 = \lambda_8, \quad \rho_9 = \lambda_{10},$$

$$\rho_{10} = \lambda_{12}, \quad \rho_{11} = \lambda_{14}, \quad \rho_{12} = \lambda_{-28},$$

$$\sigma_i = \rho_i - \delta, \quad 1 \le i \le 6$$

Когда мы составляем произведение трансвекций для последовательных пар (ρ_i, σ_i), $(\rho_{i+1}, \sigma_{i+1})$, получаем

$$t_{\rho_i,\sigma_i}(\xi) t_{\rho_{i+1},\sigma_{i+1}}(\pm\xi),$$

и мы используем коммутирование при помощи x_α, где $\alpha = \rho_i - \rho_{i+1}$ является простым корнем для всех i, $1 \le i \le 11$, кроме $i = 6$. Кроме этого,

$$t_{\rho_5,\sigma_5}(\xi) t_{\rho_7,\sigma_7}(\pm\xi)$$

получается коммутированием при помощи x_{α_2}. Итак, поскольку используются простые корни, то мы имеем произведения $y_i = t_{\rho_i,\sigma_i}(\xi) t_{\rho_{i+1},\sigma_{i+1}}(-\xi) \in H$, где $1 \le i \le 11$, $i \ne 6$. Положим также $y_6 = t_{\rho_5,\sigma_5}(\xi) t_{\rho_7,\sigma_7}(-\xi)$. Теперь остается посмотреть на произведение

$$h = y_1^1 y_2^2 y_3^3 y_4^4 y_5^{-1} y_6^6 y_7^7 y_8^8 y_9^9 y_{10}^{10} y_{11}^{11} x_\alpha(-\xi) \in H.$$

Несложно понять, что $h = t_{\rho_{12},\sigma_{12}}(-12\xi)$ (здесь точно так же, как в случае $\Phi = \mathrm{E}_6$, используется разложение $x_\beta(-\xi)$ в произведение двенадцати трансвекций $t_{\rho_i,\sigma_i}(\xi)$), откуда $12\xi \in A_1$ и, следовательно, $\xi \in A_1$. Лемма доказана.

2.5. Окончание доказательства предложения 2.2

Заметим, что доказательство предожения 2.2 для случая $\Phi = \mathrm{E}_6$ уже закончено, потому что 2 — максимальное расстояние между весами микровесового представления E_6. В случае $\Phi = \mathrm{E}_7$ придется еще немного потрудиться, чтобы включить случай расстояния, равного трем. Обозначим $A = A_1 = A_2$.

Лемма 2.16. *Если $\lambda, \mu \in \lambda$ и $d(\lambda, \mu) = 3$, то $RA \subset A_{\lambda\mu}$.*

Доказательство. Эта лемма доказывается почти так же, как лемма 2.14. Любая пара весов (λ, μ) на расстоянии 3 переводится элементом группы Вейля в пару $(\omega, -\omega)$. Поэтому мы будем считать, что $\lambda = -\omega$, $\mu = \omega$. Возьмем $\xi \in A$. По доказанному $t_{\lambda+\alpha_7,\mu}(\xi) \in H$. Воспользовавшись леммой 2.10, видим, что $[t_{\lambda+a_7,\mu}(\xi), x_{-\alpha_7}(\pm\zeta)] = t_{\lambda,\mu}(\xi\zeta)$ при надлежащем выборе знака, откуда $\xi\zeta \in A_{\lambda\mu}$.

Лемма 2.17. *Если* $\lambda, \mu, \rho, \sigma \in \lambda$ *и* $d(\lambda, \mu) = d(\rho, \sigma) = 3$, *то* $A_{\lambda\mu} \subset A_{\rho\sigma}$.

Доказательство. Здесь, как и в начале доказательства леммы 2.15, мы коммутируем элемент $t_{\lambda\mu}(\xi)$ с $x_\alpha(\zeta)$ (см. формулу 2), где $\xi \in A_{\lambda\mu}$, $\zeta \in R$, $\alpha \in \Phi$. Снова будем записывать ограничения наших матриц на свободный подмодуль W ранга 4, порожденный базисными векторами, отвечающими весам $\mu, \mu - \alpha, \lambda + \alpha, \lambda$ (в указанном порядке). Также будем считать, что α или $-\alpha$ — простой корень, поэтому недиагональные матричные элементы в $x_\alpha(\zeta)$ имеют одинаковые знаки. Тогда формула 2 с учетом данных о знаках утверждает, что матрица ограничения элемента $h_1 = [t_{\lambda\mu}(\xi), x_\alpha(\zeta)]$ имеет вид

$$\widetilde{h_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\xi\zeta & \xi\zeta^2 & 1 & 0 \\ 0 & \xi\zeta & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Теперь подставим в полученное выражение $\zeta = 1$, поменяем знак у ξ и прокоммутируем результат с $x_{-\alpha}(\zeta)$. Заметим, что при нашем выборе α недиагональные матричные элементы в $x_{-\alpha}(\zeta)$ снова имеют одинаковые знаки. Обозначим результат $h_2 = [[t_{\lambda\mu}(-\xi), x_\alpha(1)], x_{-\alpha}(\zeta)]$. Вычисления показывают, что

$$\widetilde{h_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \xi\zeta & 0 & 1 & 0 \\ 2\xi\zeta + \xi\zeta^2 & -\xi\zeta & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как по построению $h_1, h_2 \in H$, то и произведение $h = h_1 h_2 t_{\lambda\mu}(-2\xi\zeta - \xi\zeta^2)$ лежит в H и имеет вид

$$\widetilde{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi\zeta^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В частном случае $\zeta = 1$ получаем, что $t_{\lambda+\alpha,\mu-\alpha}(\xi)$ лежит в H. Легко видеть, что расстояние между $\lambda + \alpha$ и $\mu - \alpha$ равно трем. Действительно, два веса на расстоянии 3 соответствуют точкам в диаграмме, симметричным относительно центра, и если λ и μ были симметричны, то $\lambda+\alpha$ и $\mu-\alpha$ останутся симметричными. Итак, мы получили, что $\xi \in A_{\lambda+\alpha,\mu-\alpha}$, откуда $A_{\lambda\mu} \subset A_{\lambda+\alpha,\mu-\alpha}$.

Теперь уже нетрудно завершить доказательство леммы. Действительно, если мы можем брать в качестве α любой простой или противоположный простому корень, значит, можно «прошагать» по ребрам диаграммы и перейти от любой пары весов на расстоянии 3 к любой другой такой паре.

Обозначим через A_3 множество $A_{\lambda\mu}$ для $d(\lambda,\mu)=3$. Заметим, что, в отличие от лемм 2.12 и 2.13, мы еще не показали, что A_3 является идеалом в R. Мы и не будем доказывать этого напрямую, а лишь покажем совпадение аддитивной подгруппы A_3 и идеала A. Включение $A \subset A_3$ показано в лемме 2.16, и сейчас мы докажем обратное.

Лемма 2.18. *$A_3 \subset A$.*

Доказательство. Возьмем $\xi \in A_3$. Для наглядности зафиксируем веса $\lambda=\lambda_{-1}$, $\mu=\lambda_1$, $\alpha=\alpha_7$. Воспользуемся обозначениями из доказательства предыдущей леммы: $h_1=[t_{\lambda\mu}(\xi),x_\alpha(\zeta)]$. Возьмем $\zeta=1$, тогда из формулы 3 легко видеть, что после умножения h_1 на $t_{\lambda+\alpha,\mu-\alpha}(-\xi)$ получится элемент $h=e-\xi e_{\lambda+\alpha,\mu}+\xi e_{\lambda,\mu-\alpha}$. К счастью, в нашем случае $d(\lambda+\alpha,\mu)=d(\lambda,\mu-\alpha)=2$, поэтому нам не придется снова проводить головокружительные трюки в духе доказательства леммы 2.15. Достаточно взять $\beta=\alpha_6$ и посмотреть на элемент $[h,x_\beta(1)]\in H$ (явный вид элемента $x_\beta(1)$ нам известен, потому что β — простой корень). Несложное вычисление показывает, что $[h,x_\beta(1)]=e+\xi e_{\lambda,\mu-\alpha-\beta}$, а так как $d(\lambda,\mu-\alpha-\beta)=2$, то получаем $\xi\in A$, что доказывает лемму, а вместе с ней и предложение 2.2.

2.6. Доказательство предложения 2.3

Здесь мы докажем, что группа, естественным образом появившаяся в теореме B, является совершенной. Пусть $n=27$ risp $n=56$, $E=\mathrm{EE}_6(27,R,A)$ risp $E=\mathrm{EE}_7(56,R,A)$. Так как группа $E(\Phi,R)$ совершенна (лемма 1.4, см.

также [65], [12]), то достаточно доказать, что образующие группы $E(n,R,A)$ лежат в $[E,E]$. Возьмем $x = z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta)$, где, как обычно,

$$z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta) = {}^{t_{\mu\lambda}(\zeta)}t_{\lambda\mu}(\xi), \quad \xi \in A, \zeta \in R.$$

Из предложения 2.2 следует, что $x \in E(n,A)^{E(\Phi,R)}$, то есть x можно представить в виде произведения

$$x = \prod_i x_i y_i x_i^{-1}, \qquad \text{где } x_i \in E(\Phi,R), y_i \in E(n,A) \subset E(n,R,A).$$

Тогда $x = \prod_i [x_i, y_i] y_i$, и для любого i коммутатор $[x_i, y_i]$ лежит в $[E,E]$. Остается доказать, что $E(n,A) \subset [E,E]$, а это легко следует из леммы 2.10. Действительно, возьмем $t_{\rho\sigma}(\xi) \in E(n,A)$ и попытаемся найти такие $\lambda,\mu \in \Lambda$, $\alpha \in \Phi$, чтобы выполнялось условие пункта a) леммы 2.10 и при этом $\lambda+\alpha = \rho$, $\mu = \sigma$, Если это удастся, то мы получим $t_{\rho\sigma}(\xi) = [t_{\lambda\mu}(\xi), x_\alpha(\pm 1)] \in [E(n,A), E(\Phi,R)] \subset [E,E]$.

Для этого можно считать, что $\mu = \sigma = \lambda_1$ — старший вес. Если $\rho \neq \lambda_2$, то можно взять простой корень β такой, что $\rho+\beta \in \Lambda$ и положить $\lambda = \rho+\beta$, $\alpha = -\beta$. Тогда $\lambda+\alpha = \rho$, $\mu-\alpha \notin \Lambda$, потому что $\alpha \in \Phi^-$, а μ — старший вес. Легко понять, что $\lambda \neq \mu$, $\lambda-\mu \neq \pm\alpha$ (поскольку может быть только $\lambda-\mu = \alpha$, но тогда $\lambda-\alpha$, λ, $\lambda+\alpha \in \Lambda$, что невозможно).

Осталось рассмотреть случай $\sigma = \lambda_1$, $\rho = \lambda_2$. Но тогда можно взять $\alpha = \alpha_3$ risp $\alpha = \alpha_6$ и $\lambda = \rho - \alpha$ и убедиться, что все условия для применения леммы 2.10 выполнены. Это завершает доказательство.

2.7. Вложение $E(\mathrm{E}_7,R)$ в симплектическую группу

Этот раздел посвящен описанию вложения $E(\mathrm{E}_7,R)$ в некоторую симплектическую группу матриц порядка 56. Заметим, что мы уже вложили $E(\mathrm{E}_7,R)$ в полную линейную группу $\mathrm{GL}(56,R)$, поэтому мы будем строить симплектическую билинейную форму φ в имеющемся базисе. Весовая диаграмма нашего представления E_7 симметрична: каждому весу λ соответствует симметричный вес $-\lambda$. Положим симплектическое произведение

$\varphi(v^\lambda, v^\mu) = 0$, если $\mu \neq -\lambda$. В случае $\mu = -\lambda$ представим $\lambda_1 - \lambda$ в виде суммы простых корней. Число слагаемых в полученной сумме — это «расстояние» от веса λ до старшего веса ω на весовой диаграмме, то есть количество ребер в минимальном пути между ними (в отличие от введенного ранее расстояния d — расстояния в *весовом графе*). На время обозначим эту величину $d'(\omega, \lambda)$. Нам понадобится только ее четность: обозначим $\varepsilon_\lambda = (-1)^{d'(\omega,\lambda)}$; иногда мы будем называть ε_λ *знаком* веса λ (если не возникает двусмысленностей). Нетрудно понять, что $\varepsilon_{-\lambda} = -\varepsilon_\lambda$, так что это название имеет некоторый смысл. Итак, положим $\varphi(v_\lambda, v_{-\lambda}) = \varepsilon_\lambda$.

Очевидно, что, задав произведение на базисных векторах, мы получим некоторую симплектическую билинейную форму на всем пространстве представления, и, следовательно, соответствующую симплектическую группу. Напомним, как выглядят симплектические трансвекции:

$$T_{\lambda\mu}(\xi) = T_{-\mu,-\lambda}(-\varepsilon_\lambda\varepsilon_\mu\xi) = \begin{cases} t_{\lambda\mu}(\xi)t_{-\mu,-\lambda}(-\varepsilon_\lambda\varepsilon_\mu\xi), & \text{если } \mu \neq -\lambda, \\ t_{\lambda,-\lambda}(\xi), & \text{если } \mu = -\lambda. \end{cases}$$

Мы будем говорить, что трансвекция $T_{\lambda\mu}(\xi)$ *соответствует короткому корню* (*«short root transvection»*), если $\mu \neq -\lambda$, и *соответствует длинному корню* (*«long root transvection»*), если $\mu = -\lambda$.

Мы часто без специальных оговорок будем пользоваться коммутационной формулой Шевалле для симплектических трансвекций. Приведем ее важнейшие случаи:

$$\begin{aligned} &= T_{\lambda\sigma}(\xi\zeta), \quad \text{если } \lambda \neq \pm\mu,\ \mu \neq \pm\sigma,\ \lambda \neq \pm\sigma, \\ [T_{\lambda\mu}(\xi), T_{\mu,-\lambda}(\zeta)] &= T_{\lambda,-\lambda}(2\xi\zeta), \quad \text{если } \lambda \neq \pm\mu, \\ [T_{\lambda\mu}(\xi), T_{\mu,-\mu}(\zeta)] &= T_{\lambda,-\mu}(\xi\zeta)T_{\lambda,-\lambda}(\varepsilon_\lambda\varepsilon_\mu\xi^2\zeta), \quad \text{если } \lambda \neq \pm\mu, \\ [T_{\lambda\mu}(\xi), T_{\rho\sigma}(\zeta)] &= 1, \quad \text{если } \lambda \neq \mu,\ \rho \neq \sigma,\ \mu \neq \rho, \\ &\qquad \lambda \neq \sigma,\ \mu \neq -\sigma,\ \lambda \neq -\rho. \end{aligned}$$

Остальные случаи формулы Шевалле легко получаются из приведенных. Соответствующую этой симплектической форме элементарную симплектическую группу мы будем обозначать $\mathrm{Ep}(56, R) = \langle T_{\lambda\mu}(\xi), \lambda \neq \mu, \xi \in R\rangle$, а

$\mathrm{Ep}(56, R, A) = \mathrm{Ep}(56, A)^{\mathrm{Ep}(56,R)}$, где $\mathrm{Ep}(56, A) = \langle T_{\lambda\mu}(\xi), \lambda \neq \mu, \xi \in A\rangle$ для идеала $A \trianglelefteq R$.

Теперь проверим, что группа $E(\mathrm{E}_7, R)$ действительно лежит в построенной симплектической группе $\mathrm{Ep}(56, R)$. Достаточно доказать, что $x_\alpha(\xi) \in \mathrm{Ep}(56, R)$ при $\xi \in R$, $\alpha \in \mathrm{E}_7$. На самом деле даже достаточно проверить это только для простых и отрицательных простых корней $\alpha \in \mathrm{E}_7$ (в силу коммутационной формулы Шевалле). Мы покажем, что для простого корня α корневой элемент $x_\alpha(\xi)$ есть произведение шести симплектических трансвекций. Действительно, глядя на весовую диаграмму, легко понять, что ребро, помеченное α, встречается 12 раз симметричным образом, то есть имеется 6 пар таких ребер, и в каждой паре ребра симметричны. Возьмем одну такую пару: пусть это ребра (λ, μ) и $(-\mu, -\lambda)$, где $\mu - \lambda = \alpha$. Рассмотрим симплектическую трансвекцию $T_{\mu\lambda}(1) = t_{\mu\lambda}(1)t_{-\lambda,-\mu}(1)$ (это так, поскольку веса λ и μ соседние, значит, $\varepsilon_\mu = -\varepsilon_\lambda$. Но это ровно те две (элементарные) трансвекции, соответствующие взятой паре ребер, которые входят в разложение x_α, поскольку у этого корневого элемента все знаки действия равны $+1$. Таким образом можно поступить с каждой парой ребер и написать 6 симплектических трансвекций, соответствующих коротким корням.

Мы получили, что $x_\alpha(\xi) \in \mathrm{Ep}(56, R)$, откуда $E(\mathrm{E}_7, R) \leq \mathrm{Ep}(56, R)$. Теперь мы покажем, что для *произвольного* корня $\alpha \in \mathrm{E}_7$ корневой элемент $x_\alpha(\xi)$ является произведением ровно шести симплектических трансвекций. Мы можем, как и выше, разбить все пары весов (λ, μ), для которых $\mu - \lambda = \alpha$, на 6 пар, в каждую из которых входят веса (λ, μ) и $(-\mu, -\lambda)$. Но мы уже знаем, что $x_\alpha(\xi)$ лежит в симплектической группе, поэтому этот элемент должен удовлетворять некоторым простым уравнениям. Несложными вычислениями легко получить, что знаки действия в этих парах согласованы нужным образом, то есть таковы же, как в симплектической трансвекции $T_{\lambda\mu}(\pm 1)$.

2.8. Доказательство предложения 2.4

Итак, мы начнем доказательство, стараясь вести его параллельно доказательству предложения 2.1.

Доказательство. Очевидно, что левая часть содержится в правой. Для доказательства обратного включения вспомним, что при $n \geq 3$ группа $\mathrm{Ep}(n, R, A)$ порождается всеми трансвекциями вида $Z_{\lambda\mu}(\xi, \zeta) = {}^{T_{\mu\lambda}(\zeta)}T_{\lambda\mu}(\xi)$ для $\xi \in A, \zeta \in R$, $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$ (лемма 1.1). Таким образом, достаточно убедиться, что $Z_{\lambda\mu}(\xi, \zeta)$ содержится в $H = \mathrm{Ep}(n, A)^{E(\Phi,R)}$. Доказательство этого содержится в леммах 2.19, 2.21 и 2.22; там мы разбираем случаи $d(\lambda, \mu) = 1$, 2, 3 соответственно. Очевидно, что в нашем представлении 3 — это максимальное расстояние между весами, и предложение доказано, как только проверена справедливость следующих трех лемм.

Лемма 2.19. *Пусть $d(\lambda, \mu) = 1$. Тогда ${}^{T_{\mu\lambda}(\zeta)}T_{\rho\sigma}(\xi) \in H$ для любых ρ, $\sigma \in \Lambda$. В частности, $Z_{\lambda\mu}(\xi, \zeta) \in H$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\rho = \lambda$, $\sigma = \mu$ и обозначим $\alpha = \mu - \lambda$:

$$Z_{\lambda\mu}(\xi, \zeta) = {}^{T_{\mu\lambda}(\zeta)}T_{\lambda\mu}(\xi)$$

Теперь вспомним, что в предложении 2.1 мы достигали успеха, рассматривая выражение ${}^{x_\alpha(\zeta)}t_{\lambda\mu}(\xi)$. Давайте посмотрим, на что можно рассчитывать теперь. Из обсуждения в разделе 2.7 мы знаем, что корневой элемент $x_\alpha(\zeta)$ раскладывается в произведение шести симплектических трансвекций:

$$x_\alpha(\zeta) = \prod_{i=1}^{6} T_{\rho_i\sigma_i}(\pm\zeta).$$

Но при сопряжении с помощью x_α играет роль ровно одна трансвекция:

$${}^{x_\alpha(\zeta)}T_{\lambda\mu}(\xi) = {}^{T_{\mu\lambda}(\pm\zeta)}T_{\lambda\mu}(\xi).$$

Это происходит по той же причине, что и в доказательстве предложения 2.1: представление микровесовое, и из всех T_{ρ_i,σ_i}, входящих в разложение $x_\alpha(\zeta)$, имеют значение лишь те, которые «взаимодействуют» с весами $\pm\lambda$ и $\pm\mu$, то есть ровно те, которые образуют симплектическую трансвекцию $T_{\mu\lambda}(\pm\zeta)$:

остальные коммутируют с $T_{\lambda\mu}(\xi)$ в силу коммутационной формулы Шевалле. Необходимый результат получен: при необходимости меняя знак у ζ в $x_\alpha(\pm\zeta)$, добиваемся, чтобы это выражение в точности совпадало с $Z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta)$.

Теперь перейдем к общему случаю: $\rho\neq\lambda$ или $\sigma\neq\mu$. Здесь придется рассматривать больше случаев, нежели при доказательстве предложения 2.1. Пусть для начала $\rho=\lambda$, но $\sigma\neq\mu$. Нетрудно проверить, что

$$
\begin{aligned}
&{}^{T_{\mu\lambda}(\zeta)}T_{\lambda,-\lambda}(\xi)=T_{\mu,-\lambda}(\xi\zeta)\cdot T_{\mu,-\mu}(\varepsilon_i\varepsilon_j\xi^2\zeta)\cdot T_{\lambda,-\lambda}(\xi)\in H; \quad \text{и}\\
&{}^{T_{\mu\lambda}(\zeta)}T_{\lambda\sigma}(\xi)=T_{\mu\sigma}(\xi\zeta)\cdot T_{\rho\sigma}(\xi)\in H, \quad \text{если } \sigma\neq-\lambda.
\end{aligned}
$$

Аналогично рассматривается случай $\sigma=\mu$ и $\rho\neq\lambda$. Необходимо также рассмотреть случаи $\rho=-\mu$ и $\sigma=-\lambda$. Пусть, например, выполняется $\sigma=-\lambda$, тогда если $\rho=\lambda$, приходим к рассмотренному выше случаю. Если же $\rho\neq-\lambda$, то $T_{\rho\sigma}(\xi)$ — трансвекция, соответствующая короткому корню, следовательно, ее можно переписать в виде $T_{-\sigma,-\rho}(-\varepsilon_\rho\varepsilon_\sigma\xi)=T_{\lambda,-\rho}(-\varepsilon_\sigma\varepsilon_\rho\xi)$, и такой случай мы уже рассмотрели. Понятно, что в случае $\rho=\mu$ все абсолютно аналогично. Во всех же остальных случаях симплектические трансвекции $T_{\mu\lambda}(\zeta)$ и $T_{\rho\sigma}(\xi)$ коммутируют.

Следствие 2.20. *Пусть $d(\lambda,\mu)=1$. Тогда $Ep(56,A)^{T_{\mu\lambda}(\zeta)}\leq H$.*

Лемма 2.21. *Пусть $d(\lambda,\mu)=2$. Тогда $Z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta)\in H$.*

Доказательство. Посмотрим повнимательнее на то, что произошло в ходе доказательства аналогичной леммы 2.8. Мы будем свободно пользоваться всеми обозначениями, введенными для этого доказательства. Несложными выкладками мы сводим задачу к доказательству того, что некоторый элемент g лежит в H. При этом мы вводим вспомогательный элемент $h\in H$ такой, что $g={}^{t_{\nu\mu}(1)}h$ и фактически доказываем, что $t_{\lambda\kappa}(-\xi\zeta)t_{\mu\kappa}(-\xi\zeta^2)\cdot{}^{x_\alpha(1)}h=g$. Для того, чтобы это доказать, мы заметили, что все самое интересное происходит в подмодуле, порожденном векторами v^λ, v^ν, v^μ, v^κ, после чего работали с матрицами порядка 4. На самом деле эти прямые вычисления с матрицами можно формально записать как некоторые преобразования произведения трансвекций. Действительно, немного повозившись, мы сможем получить требуемое равенство, пользуясь лишь элементарными соотношениями между трансвекциями и коммутационной формулой Шевалле, то есть фактически проводя вычисления в группе Стейнберга. В расписанном виде это равенство выглядит так:

$$t_{\lambda\kappa}(-\xi\zeta)t_{\mu\kappa}(-\xi\zeta^2)\cdot {}^{t_{\lambda\kappa}(1)t_{\nu\mu}(1)}h = {}^{t_{\nu\mu}(1)}h,$$

где $h = t_{\nu\lambda}(-\zeta)t_{\mu\nu}(-\xi\zeta)t_{\lambda\nu}(-\xi)t_{\nu\lambda}(\zeta)$ (мы просто раскрыли выражение для g и написали вместо элемента $x_\alpha(1)$ его ограничение на наше четырехмерное подпространство).

Сейчас мы займемся тем, что введем в действие симплектические трансвекции вместо элементарных. Ключевое наблюдение состоит в том, что фактически в нашем доказательстве ничего не меняется — ведь коммутационная формула Шевалле остается справедливой, пока в наших вычислениях участвуют только трансвекции, соответствующие коротким корням. Итак, полностью переписав доказательство вышеприведенного равенства с заменой элементарных трансвекций на симплектические, получаем результат:

$$T_{\lambda\kappa}(-\xi\zeta)T_{\mu\kappa}(-\xi\zeta^2)\cdot {}^{T_{\lambda\kappa}(1)T_{\nu\mu}(1)}h = {}^{T_{\nu\mu}(1)}h,$$

где

$$h = T_{\nu\lambda}(-\zeta)T_{\mu\nu}(-\xi\zeta)T_{\lambda\nu}(-\xi)T_{\nu\lambda}(\zeta).$$

Теперь вспомним, что произведение $t_{\lambda\kappa}(1)t_{\nu\mu}(1)$ появлялось из разложения корневого элемента $x_\alpha(1)$ в произведение элементарных трансвекций. Совершенно аналогично произведение $T_{\lambda\kappa}(1)T_{\nu\mu}(1)$ — это ограничение действия $x_\alpha(1)$ на подмодуль ранга 8, порожденное векторами v^λ, v^ν, v^μ, v^κ, $v^{-\kappa}$, $v^{-\mu}$, $v^{-\nu}$, $v^{-\lambda}$, потому что этот корневой элемент является произведением шести симплектических трансвекций, ровно две из которых действуют в выбранном подмодуле.

Все эти действия законны, поскольку попарные расстояния между весами κ, λ, μ и ν не превосходят 2; поэтому все получающиеся в процессе вычисления симплектические трансвекции действительно будут соответствовать коротким корням.

Так же, как и в доказательстве леммы 2.8, мы до сих пор рассматривали только один случай распределения знаков действия $x_\alpha(1)$. Здесь снова возможны ровно четыре таких случая, то есть ограничение $x_\alpha(1)$ на указанное подпространство в действительности имеет вид $T_{\lambda\kappa}(\pm 1)T_{\nu\mu}(\pm 1)$. Как и прежде, их число сокращается до двух путем рассмотрения $x_\alpha(-1)$ вместо $x_\alpha(1)$, и оставшийся случай совершенно аналогичен рассмотренному с точностью до замены знака в аргументах дописанных трансвекций $T_{\lambda\kappa}(-\xi\zeta)T_{\mu\kappa}(-\xi\zeta^2)$. Доказательство леммы завершено.

Лемма 2.22. *Пусть* $d(\lambda, \mu) = 3$. *Тогда* $Z_{\lambda\mu}(\xi, \zeta) \in H$.

Доказательство. Мы снова используем все обозначения из аналогичной леммы 2.9. Как и при доказательстве предыдущей леммы, заменяем элементарные трансвекции на симплектические. Вычисления усложняются, поскольку теперь в игру вступают симплектические трансвекции, соответствующие длинным корням. Поскольку $d(\lambda, \mu) = 3$, мы будем, в соответствии с принятыми соглашениями, вместо μ писать $-\lambda$. Нам, как и в доказательстве леммы 2.9, понадобится вспомогательные веса $\nu = -\lambda + \alpha$ и $-\nu = \lambda - \alpha$, где α — некоторый корень.

Итак, мы будем доказывать, что $Z_{\lambda,-\lambda}(\xi, \zeta) = {}^{T_{-\lambda,\lambda}(\zeta)}T_{\lambda,-\lambda}(\xi) \in H$, где $\zeta \in R$, $\xi \in A$. Для начала заметим, что обратимость двойки позволяет нам заменить ξ на 2ξ и написать после этого $[T_{\lambda\nu}(\xi), T_{\nu,-\lambda}(1)]$ вместо $T_{\lambda,-\lambda}(2\xi)$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
Z_{\lambda,-\lambda}(\xi, \zeta) &= {}^{T_{-\lambda,\lambda}(\zeta)}[T_{\lambda\nu}(\xi), T_{\nu,-\lambda}(1)] \\
&= [[T_{-\lambda,\lambda}(\zeta), T_{\lambda\nu}(\xi)]T_{\lambda\nu}(\xi), [T_{-\lambda,\lambda}(\zeta), T_{\nu,-\lambda}(1)]T_{\nu,-\lambda}(1)] \\
&= [T_{-\lambda,\nu}(\xi\zeta)T_{-\nu,\nu}(-\varepsilon_i\varepsilon_j\xi^2\zeta)T_{\lambda\nu}(\xi), T_{\nu,\lambda}(-\zeta)T_{\nu,-\nu}(\varepsilon_i\varepsilon_j\zeta)T_{\nu,-\lambda}(1)].
\end{aligned}$$

Достаточно проверить, что

$$g = {}^{T_{\nu,\lambda}(-\zeta)T_{\nu,-\nu}(\varepsilon_i\varepsilon_j\zeta)T_{\nu,-\lambda}(1)}T_{-\lambda,\nu}(-\xi\zeta)T_{-\nu,\nu}(\varepsilon_i\varepsilon_j\xi^2\zeta)T_{\lambda\nu}(-\xi) \in H.$$

Обозначим $f = T_{\nu,\lambda}(-\zeta)T_{\nu,-\nu}(\varepsilon_i\varepsilon_j\zeta)$, тогда

$$\begin{aligned}
g &= fT_{\nu,-\lambda}(1)T_{-\lambda,\nu}(-\xi\zeta)T_{-\nu,\nu}(\varepsilon_i\varepsilon_j\xi^2\zeta)T_{\lambda\nu}(-\xi)T_{\nu,-\lambda}(-1)f^{-1}\\
&= fT_{\nu,-\lambda}(1)T_{-\lambda,\nu}(-\xi\zeta)T_{-\nu,\nu}(\varepsilon_i\varepsilon_j\xi^2\zeta)T_{\nu,-\lambda}(-1)T_{\lambda,-\lambda}(2\xi)T_{\lambda\nu}(-\xi)f^{-1}\\
&= fT_{\nu,-\lambda}(1)T_{-\lambda,\nu}(-\xi\zeta)T_{\lambda\nu}(\xi^2\zeta)T_{\lambda,-\lambda}(\xi^2\zeta+2\xi)\\
&\quad T_{\nu,-\lambda}(-1)T_{-\nu,\nu}(\varepsilon_i\varepsilon_j\xi^2\zeta)T_{\lambda\nu}(-\xi)f^{-1}\\
&= fT_{\nu,-\lambda}(1)T_{-\lambda,\nu}(-\xi\zeta)T_{\lambda,-\lambda}(-2\xi^2\zeta)T_{\nu,-\lambda}(-1)\\
&\qquad T_{\lambda\nu}(\xi^2\zeta)T_{\lambda,-\lambda}(\xi^2\zeta+2\xi)T_{-\nu,\nu}(\varepsilon_i\varepsilon_j\xi^2\zeta)T_{\lambda\nu}(-\xi)f^{-1}\\
&\qquad = fZ_{-\lambda,\nu}(\xi^2\zeta,1)T_{\lambda\nu}(\xi^2\zeta)T_{\lambda,-\lambda}(-\xi^2\zeta+2\xi)\\
&\qquad\quad T_{-\nu,\nu}(\varepsilon_i\varepsilon_j\xi^2\zeta)T_{\lambda\nu}(-\xi)f^{-1} = {}^f h,
\end{aligned}$$

где

$$h = Z_{-\lambda,\nu}(\xi^2\zeta,1)T_{\lambda\nu}(\xi^2\zeta)T_{\lambda,-\lambda}(-\xi^2\zeta+2\xi)T_{-\nu,\nu}(\varepsilon_i\varepsilon_j\xi^2\zeta)T_{\lambda\nu}(-\xi)$$

Заметим, что $h \in H$ (расстояние между $-\lambda$ и ν равно 1, поэтому $Z_{-\lambda,\nu}(\xi^2\zeta,1) \in H$). Кроме того, $f = T_{\nu\lambda}(-\zeta)[T_{\nu\lambda}(\varepsilon_i\varepsilon_j\zeta), T_{\lambda,-\nu}(1)]$. Далее, можно расписать $T_{\nu\lambda}(\dots)$: поскольку $d(\nu,\lambda) = 2$, можно найти вес τ такой, что $d(\nu,\tau) = d(\tau,\lambda) = 1$. Тогда $T_{\nu\lambda}(x) = [T_{\nu\tau}(x), T_{\tau\lambda}(1)]$. Так мы добились того, что в разложение f входят только такие симплектические трансвекции $T_{\rho\sigma}(\dots)$, для которых $\rho-\sigma$ является корнем. Теперь мы снова применим трюк с ограничением вычислений на четырехмерное пространство. Мы утверждаем, что сопряжения при помощи таких симплектических трансвекций, которые входят в f, это то же самое, что сопряжения при помощи *корневых элементов*, в разложения которых входят соответствующий трансвекции. То есть если в f мы заменим каждую трансвекцию $T_{\rho\sigma}(x)$ на корневой элемент $x_{\rho-\sigma}(\pm x)$, то результат сопряжения h при помощи f не изменится. Знак в таком корневом элементе следует выбирать так, чтобы в разложение его на симплектические трансвекции входил множитель $T_{\rho\sigma}(x)$, а не $T_{\rho\sigma}(-x)$. Для начала посмотрим, что произойдет с $T_{\nu\lambda}(x)$. Мы заменили эту трансвекцию на $[T_{\nu\tau}(x), T_{\tau\lambda}(1)]$, а потом на $[x_{\nu-\tau}(\pm x), x_{\tau-\lambda}(\pm 1)]$. Теперь мысленно распишем каждый из этих корневых элементов в произведение шести симплектических трансвекций и посмотрим, что происходит в подмодуле, натянутом на весовые вектора v^ν, v^τ, v^λ, v^κ, $v^{-\nu}$, $v^{-\tau}$, $v^{-\lambda}$, $v^{-\kappa}$ (здесь $\kappa = \lambda + (\nu - \tau)$). Совершенно понятно, что будут влиять друг на друга только те симплектические трансвекции, действие которых заключено в этом подмодуле, а остальные будут коммутировать с ними и между собой. Рассуждения здесь точно такие же, как и в доказательстве предложения 2.1, где мы постоянно применяли подобный трюк. Значит, $T_{\nu\lambda}(x)$ есть коммутатор двух корневых элементов, то есть лежит в $E(\mathrm{E}_7, R)$.

К сожалению, в f осталась трансвекция $T_{\lambda,-\nu}(1)$, которая не лежит в $E(\mathrm{E}_7, R)$. Но итог наших вычислений включает сопряжение при помощи f, поэтому здесь снова можно применить наш трюк. Теперь нужно ограничиться рассмотрением подмодуля W, натянутого на v^λ, v^ν, $v^{-\lambda}$ и $v^{-\nu}$. Рассуждения, аналогичные проведенным, показывают, что сопряжение при помощи $T_{\lambda,-\nu}(\dots)$ — это то же самое, что и сопряжение при помощи $x_{\lambda-(-\nu)}(\dots)$, если то, что мы сопрягаем, действует исключительно внутри подмодуля W (а так оно и есть, поскольку про все остальные множители, входящие в выражение для g, мы это показали).

Итак, мы получили, что сопряжение h при помощи f можно представить как последовательное сопряжение при помощи элементов $E(\mathrm{E}_7, R)$. Понятно, что такое сопряжение не выводит за пределы H, то есть $g = {}^f h \in H$, что и требовалось доказать.

2.9. Доказательство предложения 2.5

Обозначим

$$E = \mathrm{EE}_7'(56, R, A, B) = E(\mathrm{E}_7, R) E(56, R, A)\, \mathrm{Ep}(56, R, B).$$

Из предложения 2.3 видно, что осталось доказать лишь включение $\mathrm{Ep}(56, R, B) \subset [E, E]$, то есть, что образующие группы $\mathrm{Ep}(56, R, B)$ лежат в $[E, E]$. Возьмем

$x = Z_{\lambda\mu}(\xi, \zeta) = {}^{T_{\mu\lambda}(\zeta)}T_{\lambda\mu}(\xi)$, где $\xi \in B$, $\zeta \in R$. Из предожения 2.1 следует, что $x \in \mathrm{Ep}(56, A)^{E(\mathrm{E}_7, R)}$, то есть x можно представить в виде произведения

$$x = \prod_i x_i y_i x_i^{-1}, \qquad \text{где } x_i \in E(\mathrm{E}_7, R), y_i \in E(56, B) \subset E(56, R, B).$$

Тогда $x = \prod_i [x_i, y_i] y_i$, и для любого i коммутатор $[x_i, y_i]$ лежит в $[E, E]$. Остается доказать, что $E(56, B) \subset [E, E]$.

Возьмем трансвекцию $T_{\rho\sigma}(\xi) \in E(56, B)$, соответствующую короткому корню (то есть $\rho \neq \pm\sigma$) и попытаемся найти такой корень $\alpha \in \mathrm{E}_7$, чтобы можно было применить коммутационную формулу Шевалле

$$T_{\rho\sigma}(\xi) = [T_{\rho,\rho-\alpha}(1), T_{\rho-\alpha,\sigma}(\xi)],$$

а потом попытаться заменить $T_{\rho,\rho-\alpha}(1)$ на $x_\alpha(\pm 1)$, чтобы получить

$$T_{\rho\sigma}(\xi) = [x_\alpha(\pm 1), T_{\rho-\alpha,\sigma}(\xi)] \in [E(\mathrm{E}_7, R), E(56, B)] \subset [E, E].$$

Для того, чтобы применить коммутационную формулу Шевалле в таком виде, необходимо $-\rho \neq \rho - \alpha$ (это автоматически так, поскольку между противоположными весами всегда расстояние 3, а α — корень), $\rho \neq \pm\sigma$ (этого мы потребовали с самого начала), $\rho - \alpha \neq \pm\sigma$.

Для того, чтобы стал возможным второй шаг, замена $T_{\rho,\rho-\alpha}(1)$ на $x_\alpha(1)$, необходимо лишь, чтобы остальные трансвекции, получающиеся в разложении $x_\alpha(\pm 1)$, не повлияли на коммутирование с $T_{\rho-\alpha,\sigma}(\xi)$, то есть чтобы $\sigma - \alpha$ не являлось весом.

Можно считать, что $\sigma = \lambda_1$ — старший вес, а потом перенести построение на любую другую ситуацию действием группы Вейля. Предположим, что $\rho \neq \sigma - \alpha_7$; тогда возьмем в качестве α такой отрицательный простой корень, чтобы $\rho - \alpha$ являлось весом (понятно, что такой существует, поскольку ρ — не старший вес). Тогда очевидно, что $\rho - \alpha \neq \pm\sigma$ и $\sigma - \alpha$ весом не является, то есть все условия выполнены. Если же $\rho = \sigma - \alpha_7$, возьмем $\alpha = \alpha_6$, и необходимые условия снова тривиально проверяются.

Теперь рассмотрим трансвекцию $T_{\rho,-\rho}(\xi)$, соответствующую длинному корню ($\xi \in B$). Возьмем произвольный вес σ такой, что $\sigma - (-\rho) = \alpha$ является корнем. Тогда $T_{\rho,-\rho}(\xi) = [T_{\rho\sigma}(\xi), T_{\sigma,-\rho}(2^{-1})] = [T_{\rho\sigma}(\xi), x_\alpha(\pm 2^{-1})] \in [E(56, B), E(\mathrm{E}_7, R)] \subset [E, E]$, что нетрудно проверить аналогичными рассуждениями. Доказательство окончено.

Глава 3

Надгруппы F_4 в E_6

3.1. Группа Шевалле типа F_4

В этом разделе, если не указано обратное, $\Phi = \mathrm{F}_4$, Φ_l — множество длинных, Φ_s — множество коротких корней Φ. Мы рассматриваем систему корней F_4 как проекцию системы корней E_6 на четырехмерное подпространство, порожденное векторами $\begin{smallmatrix}00000\\1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}00100\\0\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}01010\\0\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}10001\\0\end{smallmatrix}$. При этом длинные корни F_4 — это в точности корни E_6, лежащие в этом подпространстве. Такой корень обязательно имеет вид $\begin{smallmatrix}abcba\\d\end{smallmatrix} \in \mathrm{E}_6$, и с точки зрения системы F_4 является корнем $d\alpha_1 + c\alpha_2 + 2b\alpha_3 + 2a\alpha_4 \in \Phi_l$ (α_i, $1 \le i \le 4$ — фундаментальная система корней F_4). Таким образом, можно считать, что $\Phi_l \subset \mathrm{E}_6$ (заметим, что множество Φ_l является системой корней типа D_4). Короткий же корень F_4 является проекцией двух корней E_6 на наше четырехмерное пространство: корни $\begin{smallmatrix}abcb'a'\\d\end{smallmatrix}$ и $\begin{smallmatrix}a'b'cba\\d\end{smallmatrix}$ проектируются в корень

$$d\alpha_1 + c\alpha_2 + (b+b')\alpha_3 + (a+a')\alpha_4 \in \Phi_s.$$

Через β_i, $1 \le i \le 6$ мы будем обозначать простые корни системы корней E_6; напомним, что наша нумерация простых корней следует [2]. Рассмотрим внешний автоморфизм $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ порядка 2 системы E_6, переставляющий β_1 с β_6, β_3 с β_5 и оставляющий β_2 и β_4 на месте. Одноэлементные орбиты этого автоморфизма состоят в точности из длинных корней F_4, а двухэлементные содержат пары корней, проектирующихся в короткие корни F_4. Заметим, что корни $\beta \neq \overline{\beta}$ двухэлементной орбиты ортогональны друг другу и образуют углы $\pi/4$ с соответствующим коротким корнем $(\beta + \overline{\beta})/2 \in \Phi_s$. Мы будем отождествлять множество орбит с множеством корней F_4.

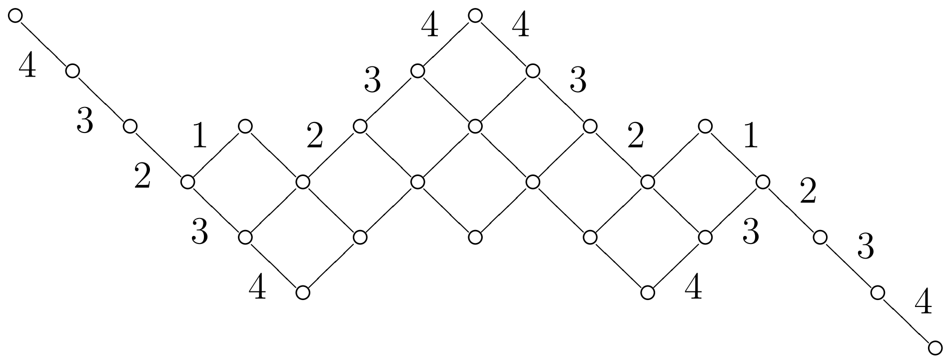


Рис. 5: $(\mathrm{E}_6, \varpi_1) \downarrow \mathrm{F}_4$: корни

Мы будем обозначать через $x_\beta(\xi)$ элементарные корневые элементы группы $G(\mathrm{E}_6, R)$, а через $X_\beta(\xi)$ — элементарные корневые элементы группы $G(\mathrm{F}_4, R)$. При этом элементы $X_\beta(\xi)$ могут иметь вид $x_\beta(\xi)$ для $\beta = \overline{\beta}$ (длинные корневые элементы) или вид $x_\beta(\xi)x_{\overline{\beta}}(\pm\xi)$ для $\beta \neq \overline{\beta}$ (короткие корневые элементы). Нам понадобится явное знание знаков в коротких корневых элементах, поэтому приведем их:

$$
\begin{aligned}
X_{0001}(\xi) &= x_{\substack{10000\\0}}(\xi)x_{\substack{00001\\0}}(\xi), & X_{0010}(\xi) &= x_{\substack{01000\\0}}(\xi)x_{\substack{00010\\0}}(\xi),\\
X_{0011}(\xi) &= x_{\substack{11000\\0}}(\xi)x_{\substack{00011\\0}}(-\xi), & X_{0110}(\xi) &= x_{\substack{01100\\0}}(\xi)x_{\substack{00110\\0}}(-\xi),\\
X_{1110}(\xi) &= x_{\substack{01100\\1}}(\xi)x_{\substack{00110\\1}}(-\xi), & X_{0111}(\xi) &= x_{\substack{11100\\0}}(\xi)x_{\substack{00111\\0}}(\xi),\\
X_{1111}(\xi) &= x_{\substack{11100\\1}}(\xi)x_{\substack{00111\\1}}(\xi), & X_{0121}(\xi) &= x_{\substack{11110\\0}}(\xi)x_{\substack{01111\\0}}(-\xi),\\
X_{1121}(\xi) &= x_{\substack{11110\\1}}(\xi)x_{\substack{01111\\1}}(-\xi), & X_{1221}(\xi) &= x_{\substack{11210\\1}}(\xi)x_{\substack{01211\\1}}(-\xi),\\
X_{1231}(\xi) &= x_{\substack{12210\\1}}(\xi)x_{\substack{01221\\1}}(-\xi), & X_{1232}(\xi) &= x_{\substack{12211\\1}}(\xi)x_{\substack{11221\\1}}(\xi).
\end{aligned}
$$

Максимальный расщепимый тор $T(\mathrm{F}_4, R)$ группы $G(\mathrm{F}_4, R)$ порождается диагональными элементами

$$
\begin{aligned}
H_{1000}(\varepsilon) &= h_{\substack{00000\\1}}(\varepsilon), & H_{0100}(\varepsilon) &= h_{\substack{00100\\0}}(\varepsilon),\\
H_{0010}(\varepsilon) &= h_{\substack{01000\\0}}(\varepsilon)h_{\substack{00010\\0}}(\varepsilon), & H_{0001}(\varepsilon) &= h_{\substack{10000\\0}}(\varepsilon)h_{\substack{00001\\0}}(\varepsilon).
\end{aligned}
$$

При ограничении представления π с $G(\mathrm{E}_6, R)$ на $G(\mathrm{F}_4, R)$ получаем 27-мерное представление, диаграмма которого приведена на рисунке 5. Здесь метки на ребрах соответствуют нумерации простых корней F_4.

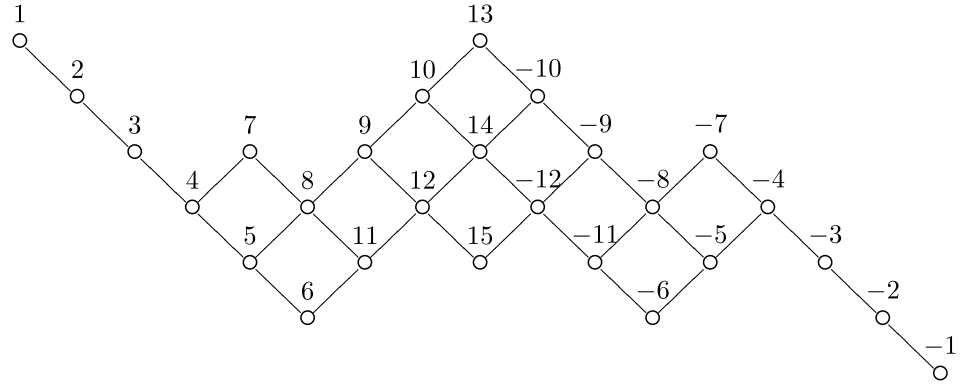


Рис. 6: (E_6, ϖ_1): неестественная нумерация весов

Нумерация весов, приведенная на рисунке 6, будет использоваться для всех вычислений этой главы. Для разнообразия она (и даже ее положительная часть) не согласована ни с одной из трех нумераций, приведенных в [8]. Мы будем обозначать вес, занумерованный на этой диаграмме целым числом i, через λ_i или (если это не вызывает двусмысленностей) просто i. Заметим, что в ограничении на F_4 веса 13, 14, 15 становятся нулевыми.

Полученное представление $(\mathrm{E}_6, \varpi_1) \downarrow \mathrm{F}_4$ приводимо и является прямой суммой 26-мерного представления на коротких корнях и тривиального 1-мерного представления. Кроме того, нам понадобится ограничение $(\mathrm{E}_6, \varpi_1) \downarrow \mathrm{D}_4$. Для его визуализации достаточно вычеркнуть в диаграмме (E_6, ϖ_1) ребра, помеченные 1 и 6. При совмещении ограничений на F_4 и на D_4 мы получаем ограничение на B_3, которое получается из диаграммы $(\mathrm{E}_6, \varpi_1) \downarrow \mathrm{F}_4$ вырезанием всех ребер, помеченных 4. Как видно, результатом является прямая сумма трех одномерных представлений, отвечающих весам $\lambda_1 = \omega$, $\lambda_{-1} = -\overline{\omega}$, λ_{13}, и трех восьмимерных представлений (одно из них приводимо и является прямой суммой семимерного и одномерного). Обозначим через В, Γ, Δ множества весов этих представлений:

$$\mathrm{B} = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\},$$

$$\Gamma = \{6, 11, 12, 14, 15, -12, -11, -6\},$$

$$\Delta = \{-10, -9, -8, -7, -5, -4, -3, -2\}.$$

Как отмечено выше (см. 1.7), $G(\mathrm{E}_6, R)$ совпадает с группой преобразований свободного правого модуля R^{27}, сохраняющих некоторую трилинейную форму T. Удобно рассматривать $G(\mathrm{F}_4, R) < G(\mathrm{E}_6, R)$ как группу преобразований из $G(\mathrm{E}_6, R)$, стабилизирующих некоторый выделенный вектор u, для которого $Q(u) \neq 0$. Равносильно, $G(\mathrm{F}_4, R)$ — это группа преобразований из $G(\mathrm{E}_6, R)$, сохраняющих билинейную форму $B(x, y)$, определенную равенством $B(x, y) = T(u, x, y)$. В качестве выделенного вектора мы будем брать $u = v^{13} - v^{14} + v^{15}$, тогда $Q(u) = -1$, а билинейная форма приобретет вид

$$\begin{aligned} B(x, y) = &\sum_{i=1}^{12} (-1)^{i+1}(x_i y_{-i} + x_{-i} y_i) \\ &+ x_{13}y_{14} + x_{14}y_{13} + x_{14}y_{15} + x_{15}y_{14} - x_{13}y_{15} - x_{15}y_{13}. \end{aligned}$$

Пусть F — матрица Грама билинейной формы B. Мы получили, что матрица $g = (g_{ij}) \in G(\mathrm{E}_6, R)$ в том и только в том случае принадлежит $G(\mathrm{F}_4, R)$, когда $gFg^T = F$ (здесь и далее через g^T мы обозначаем матрицу, транспонированную к g). Таким образом, $G(\mathrm{F}_4, -)$ является подсхемой в $G(\mathrm{E}_6, -)$; матрица $g \in G(\mathrm{E}_6, R)$ лежит в $G(\mathrm{F}_4, R)$ тогда и только тогда, когда $(Fg^T)_{ij} = (g^{-1}F)_{ij}$ для всех $i, j = 1, \ldots, -1$. В частности, для $i, j = 1, \ldots, 12, -12, \ldots, -1$ эти уравнения превращаются в $g'_{ij} = \varepsilon_i \varepsilon_j g_{-j,-i}$.

Нам понадобится также группа *подобий* билинейной формы B, то есть множество преобразований $g \in G(\mathrm{E}_6, R)$, для которых $B(gx, gy) = \lambda(g)B(x, y)$ для некоторого $\lambda(g) \in R^*$. В терминах матрицы Грама это условие означает, что $gFg^T = \lambda(g)F$. Мы будем обозначать эту группу $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$. Пусть $g \in \overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$. Для любых $x, y \in R^{27}$ имеем

$$\begin{aligned} T(u, x, y) = B(x, y) &= \lambda(g)^{-1}B(gx, gy) \\ &= \lambda(g)^{-1}T(u, gx, gy) = \lambda(g)^{-1}T(g^{-1}u, x, y), \end{aligned} \tag{4}$$

откуда $T(\lambda(g)u - g^{-1}u, x, y) = 0$. Значит, $g^{-1}u = \lambda(g)u$, то есть g переводит в себя одномерное подпространство $\langle u \rangle$. Обратное тоже верно; таким образом, на $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$ можно смотреть как на группу матриц из $G(\mathrm{E}_6, R)$, стабилизирующих $\langle u \rangle$.

Лемма 3.1. *Если $gu = ku$ для некоторых $g \in G(\mathrm{E}_6, R)$, $k \in R$, то $k^3 = 1$.*

Доказательство. Доказательство

$$-1 = Q(u) = Q(gu) = Q(ku) = k^3 Q(u) = -k^3.$$

Получаем, что если R не содержит нетривиальных кубических корней из 1, то $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R) = G(\mathrm{F}_4, R)$. Если же $\lambda \in R$ и $\lambda^3 = 1$, то матрица λI_{27} лежит в центре $G(\mathrm{E}_6, R)$ и является элементом $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$; кроме того, $\mathrm{Cent}(G(\mathrm{E}_6, R))$ состоит в точности из таких скалярных матриц. Таким образом, мы доказали, что

$$\overline{G}(\mathrm{F}_4, R) = G(\mathrm{F}_4, R)\,\mathrm{Cent}(G(\mathrm{E}_6, R)). \tag{5}$$

Содержащуюся в $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$ диагональную подгруппу мы будем обозначать через $\overline{T}(\mathrm{F}_4, R)$. Эта подгруппа нормализует $E(\mathrm{F}_4, R)$, поэтому мы можем рассмотреть произведение

$$\overline{E}(\mathrm{F}_4, R) = E(\mathrm{F}_4, R)\overline{T}(\mathrm{F}_4, R) = E(\mathrm{F}_4, R)\,\mathrm{Cent}(G(\mathrm{E}_6, R)).$$

3.2. Элементарные подгруппы и локализация

В этом разделе $\Phi = \mathrm{E}_6$ или F_4.

Пусть $A \trianglelefteq R$ — идеал в R. Обозначим через $E(\Phi, A)$ группу, порожденную корневыми элементами уровня A:

$$E(\Phi, A) = \langle x_\alpha(\xi), \alpha \in \Phi, \xi \in A \rangle.$$

В случае $A = R$ группа $E(\Phi, R)$ называется (абсолютной) *элементарной группой*. Важную роль играют и *относительные элементарные группы* $E(\Phi, R, A)$

$$E(\Phi, R, A) = \langle x_a(\xi), \alpha \in \Phi, \xi \in A \rangle^{E(\Phi, R)}.$$

Рассмотрим гомоморфизм редукции $\rho_A^\Phi : G(\Phi, R) \to G(\Phi, R/A)$, являющийся ограничением очевидного гомоморфизма $\mathrm{GL}(27, R) \to \mathrm{GL}(27, R/A)$ на группу $G(\Phi, R) \leq \mathrm{GL}(27, R)$. Обозначим через $G(\Phi, R, A)$ ядро этого гомоморфизма, а через $C(\Phi, R, A)$ — прообраз центра группы $G(\Phi, R/A)$.

Равенства из следующего утверждения носят название *стандартных коммутационных формул.*

Лемма 3.2. *Пусть* $\Phi = \mathrm{E}_6$ *или* F_4. *Для любого идеала* $A \trianglelefteq R$ *выполняются равенства*

$$[G(\Phi, R), E(\Phi, R, A)] = [E(\Phi, R), C(\Phi, R, A)] = E(\Phi, R, A)$$

В частности, подгруппа $E(\Phi, R, A)$ *нормальна в* $G(\Phi, R)$.

Для интересующих нас исключительных случаев эта лемма была доказана Таддеи [61] и Васерштейном [64]. В работах [67], [22], [34]. можно найти другие доказательства и дальнейшие ссылки.

Пусть S — мультипликативная система в кольце R, то есть множество элементов R, содержащее 1 и замкнутое относительно умножения. Мы будем обозначать через $S^{-1}R$ *локализацию* кольца R относительно системы S и через $F_S : R \to S^{-1}R$ — канонический гомоморфизм. Наиболее важными для нас являются следующие частные случаи:

- Локализация в максимальном идеале: $S = R \setminus M$, где $M \in \mathrm{Max}(R)$ — максимальный идеал кольца R. В этом случае мы пишем $(R \setminus M)^{-1}R = R_M$, и F_M вместо F_S. Кольцо R_M является локальным с максимальным идеалом $R_M F_M(M)$.

- Главная локализация: $S = \langle s \rangle = \{1, s, s^2, \dots\}$ — наименьшая мультипликативная система, содержащая элемент $s \in R$. Мы будем обозначать $\langle s \rangle^{-1}R$ через R_s, F_S через F_s.

Пусть X — аффинная групповая схема над $\mathbb{Z}$. Гомоморфизм $X(F_S) : X(R) \to X(S^{-1}R)$, индуцированный гомоморфизмом локализации, мы также будем обозначать через F_S. Заметим, что если $X = G(\mathrm{E}_6, R)$, $G(\mathrm{F}_4, R)$, $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$, то элементарные корневые элементы переходят в элементарные корневые элементы: $F_S(x_\alpha(\xi)) = x_\alpha(F_S(\xi))$. Это означает, что

$$F_S(E(\mathrm{E}_6, R)) \le E(\mathrm{E}_6, S^{-1}R),$$
$$F_S(E(\mathrm{F}_4, R)) \le E(\mathrm{F}_4, S^{-1}R).$$

Так как при гомоморфизме F_S торы переходят в торы, то $F_S(\overline{E}(\mathrm{F}_4, R)) \le \overline{E}(\mathrm{F}_4, S^{-1}R)$. Таким образом, $E(\mathrm{E}_6, -)$, $E(\mathrm{F}_4, -)$, $\overline{E}(\mathrm{F}_4, -)$ также являются функторами из категории коммутативных колец в категорию групп, однако эти функторы не представимы.

Хорошо известно, что все эти функторы коммутируют с индуктивными пределами. Точнее, если R_i, $i \in I$ — индуктивная система колец, а X — один из функторов $G(\mathrm{E}_6, -)$, $G(\mathrm{F}_4, -)$, $\overline{G}(\mathrm{F}_4, -)$, $E(\mathrm{E}_6, -)$, $E(\mathrm{F}_4, -)$, $\overline{E}(\mathrm{F}_4, -)$, то $X(\varinjlim R_i) = \varinjlim X(R_i)$.

В частности, если R_i — индуктивная система всех конечно порожденных подколец в R по отношению к вложению, то $X(R) = \varinjlim X(R_i)$, что позволяет нам ограничиться рассмотрением нетеровых колец.

Кроме того, если S — мультипликативная система, мы можем рассмотреть систему колец R_s, $s \in S$, как индуктивную систему колец по отношению к каноническим гомоморфизмам локализации $F_t : R_s \to R_{st}$. Тогда $X(S^{-1}R) = \varinjlim X(R_s)$. Это позволит нам сводить рассмотрение произвольных локализаций (в частности, локализации в максимальном идеале) к главным локализациям. Локализации в максимальных идеалах приводят нас к локальным кольцам. Как хорошо известно (см., например, [16]), для локальных (и даже для полулокальных) колец $G(\mathrm{E}_6, R) = E(\mathrm{E}_6, R)$, $G(\mathrm{F}_4, R) = E(\mathrm{F}_4, R)$, а поэтому и $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R) = \overline{E}(\mathrm{F}_4, R)$.

3.3. Изучение уравнений в $G(\mathrm{E}_6, R)$

В настоящем разделе собраны технические результаты, касающиеся матриц из $G(\mathrm{E}_6, R)$. Их доказательства используют явный вид трилинейной формы T, кубической формы Q и ее частных производных f_λ, $\lambda \in \Lambda$. В нашей нумерации весов кубическая форма Q выглядит так:

$$\begin{aligned}Q(x) =& x_1x_{13}x_{-1} - x_1x_{-10}x_{-2} + x_1x_{-9}x_{-3} - x_1x_{-8}x_{-4} + x_1x_{-5}x_{-7} \\ & - x_2x_{10}x_{-1} + x_2x_{14}x_{-2} - x_2x_{-12}x_{-3} + x_2x_{-11}x_{-4} - x_2x_{-6}x_{-7} \\ & + x_3x_9x_{-1} - x_3x_{12}x_{-2} + x_3x_{15}x_{-3} - x_3x_{-11}x_{-5} + x_3x_{-8}x_{-6} \\ & - x_4x_8x_{-1} + x_4x_{11}x_{-2} - x_4x_{15}x_{-4} + x_4x_{-12}x_{-5} - x_4x_{-9}x_{-6} \\ & + x_7x_5x_{-1} - x_7x_6x_{-2} + x_7x_{15}x_{-7} - x_7x_{-12}x_{-8} + x_7x_{-9}x_{-11} \\ & - x_5x_{11}x_{-3} + x_5x_{12}x_{-4} - x_5x_{14}x_{-5} + x_5x_{-10}x_{-6} + x_8x_6x_{-3} \\ & - x_8x_{12}x_{-7} + x_8x_{14}x_{-8} - x_8x_{-10}x_{-11} - x_6x_9x_{-4} + x_6x_{10}x_{-5} \\ & - x_6x_{13}x_{-6} + x_9x_{11}x_{-7} - x_9x_{14}x_{-9} + x_9x_{-10}x_{-12} - x_{11}x_{10}x_{-8} \\ & + x_{11}x_{13}x_{-11} + x_{10}x_{12}x_{-9} - x_{10}x_{15}x_{-10} - x_{12}x_{13}x_{-12} + x_{13}x_{14}x_{15}.\end{aligned}$$

Симметрическая трилинейная форма T получается отсюда поляризацией. Воспроизведем для дальнейших ссылок и явный вид частных производных этой формы в той же нумерации:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= x_{13}x_{-1} - x_{-10}x_{-2} + x_{-9}x_{-3} - x_{-8}x_{-4} + x_{-7}x_{-5} \\
f_2(x) &= -x_{10}x_{-1} + x_{14}x_{-2} - x_{-12}x_{-3} + x_{-11}x_{-4} - x_{-6}x_{-7} \\
f_3(x) &= x_9x_{-1} - x_{12}x_{-2} + x_{15}x_{-3} - x_{-11}x_{-5} + x_{-8}x_{-6} \\
f_4(x) &= -x_8x_{-1} + x_{11}x_{-2} - x_{15}x_{-4} + x_{-12}x_{-5} - x_{-9}x_{-6} \\
f_5(x) &= x_7x_{-1} - x_{11}x_{-3} + x_{12}x_{-4} - x_{14}x_{-5} + x_{-10}x_{-6} \\
f_6(x) &= -x_7x_{-2} + x_8x_{-3} - x_9x_{-4} + x_{10}x_{-5} - x_{13}x_{-6} \\
f_7(x) &= x_5x_{-1} - x_6x_{-2} + x_{15}x_{-7} - x_{-12}x_{-8} + x_{-9}x_{-11} \\
f_8(x) &= -x_4x_{-1} + x_6x_{-3} - x_{12}x_{-7} + x_{14}x_{-8} - x_{-10}x_{-11} \\
f_9(x) &= x_3x_{-1} - x_6x_{-4} + x_{11}x_{-7} - x_{14}x_{-9} + x_{-10}x_{-12} \\
f_{10}(x) &= -x_2x_{-1} + x_6x_{-5} - x_{11}x_{-8} + x_{12}x_{-9} - x_{15}x_{-10} \\
f_{11}(x) &= x_4x_{-2} - x_5x_{-3} + x_9x_{-7} - x_{10}x_{-8} + x_{13}x_{-11} \\
f_{12}(x) &= -x_3x_{-2} + x_5x_{-4} - x_8x_{-7} + x_{10}x_{-9} - x_{13}x_{-12} \\
f_{13}(x) &= x_1x_{-1} - x_6x_{-6} + x_{11}x_{-11} - x_{12}x_{-12} + x_{14}x_{15}
\end{aligned}$$

$$f_{14}(x) = x_2x_{-2} - x_5x_{-5} + x_8x_{-8} - x_9x_{-9} + x_{13}x_{15}$$

$$f_{15}(x) = x_3x_{-3} - x_4x_{-4} + x_7x_{-7} - x_{10}x_{-10} + x_{13}x_{14}$$

$$f_{-12}(x) = -x_2x_{-3} + x_4x_{-5} - x_7x_{-8} + x_9x_{-10} - x_{12}x_{13}$$

$$f_{-11}(x) = x_2x_{-4} - x_3x_{-5} + x_7x_{-9} - x_8x_{-10} + x_{11}x_{13}$$

$$f_{-10}(x) = -x_1x_{-2} + x_5x_{-6} - x_8x_{-11} + x_9x_{-12} - x_{10}x_{15}$$

$$f_{-9}(x) = x_1x_{-3} - x_4x_{-6} + x_7x_{-11} - x_9x_{14} + x_{10}x_{12}$$

$$f_{-8}(x) = -x_1x_{-4} + x_3x_{-6} - x_7x_{-12} + x_8x_{14} - x_{10}x_{11}$$

$$f_{-7}(x) = x_1x_{-5} - x_2x_{-6} + x_7x_{15} - x_8x_{12} + x_9x_{11}$$

$$f_{-6}(x) = -x_2x_{-7} + x_3x_{-8} - x_4x_{-9} + x_5x_{-10} - x_6x_{13}$$

$$f_{-5}(x) = x_1x_{-7} - x_3x_{-11} + x_4x_{-12} - x_5x_{14} + x_6x_{10}$$

$$f_{-4}(x) = -x_1x_{-8} + x_2x_{-11} - x_4x_{15} + x_5x_{12} - x_6x_9$$

$$f_{-3}(x) = x_1x_{-9} - x_2x_{-12} + x_3x_{15} - x_5x_{11} + x_6x_8$$

$$f_{-2}(x) = -x_1x_{-10} + x_2x_{14} - x_3x_{12} + x_4x_{11} - x_6x_7$$

$$f_{-1}(x) = x_1x_{13} - x_2x_{10} + x_3x_9 - x_4x_8 + x_5x_7$$

Мы часто будем пользоваться тем, что каждый столбец v матрицы из $G(\mathrm{E}_6, R)$ является *сингулярным* и, следовательно, удовлетворяет квадратичным уравнениям $f_\lambda(v) = 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$.

Лемма 3.3. *Пусть v является столбцом матрицы $G(\mathrm{E}_6, R)$, причем строка $(v_2, \ldots, v_{-1})$ унимодулярна. Если $v_j = 0$ для $j = 6, 11, 12, 13, -12, \ldots, -1$ и $v_{14} + v_{15} = 0$, то $v_{14} = v_{15} = 0$.*

Доказательство. Обозначим $\xi = v_{15} = -v_{14}$. Поскольку V — столбец матрицы из $G(\mathrm{E}_6,R)$, то $f_\lambda(v)=0$ для всех $\lambda\in\Lambda$. В частности,

$$
\begin{aligned}
0&=f_{-2}(v)=v_2v_{14}=-\xi v_2,\\
0&=f_{-3}(v)=v_3v_{15}=\xi v_3,\\
0&=f_{-4}(v)=-v_4v_{15}=-\xi v_4,\\
0&=f_{-5}(v)=-v_5v_{14}=\xi v_5,\\
0&=f_{-7}(v)=v_7v_{15}=\xi v_7,\\
0&=f_{-8}(v)=v_8v_{14}=-\xi v_8,\\
0&=f_{-9}(v)=-v_9v_{14}=\xi v_9,\\
0&=f_{-10}(v)=-v_{10}v_{15}=-\xi v_{10},\\
0&=f_{13}(v)=v_{14}v_{15}=\xi v_{14}.
\end{aligned}
$$

Но по условию строка $(v_2,v_3,v_4,v_5,v_7,v_8,v_9,v_{10},v_{14})$ унимодулярна, значит, $\xi=0$, что и требовалось доказать.

3.4. Параболические подгруппы

Разобьем все веса из Λ на три множества: $\{\lambda_1\}$, $\mathrm{B}\cup\Gamma$ и $\{\lambda_{13},\lambda_{-1}\}\cup\Delta$ (это разбиение соответствует вырезанию из весовой диаграммы E_6 всех ребер, помеченных 1). Если $g_{\lambda 1}=0$ для всех $\lambda\in\mathrm{B}\cup\Gamma$ и элемент g_{11} обратим, то из уравнений на первый столбец следует, что он совпадает с первым столбцом единичной матрицы. Иными словами, тогда g лежит в параболической подгруппе $G(\mathrm{E}_6,R)$ и по отношению к приведенному разбиению весов матрица g имеет следующую блочную структуру:

$$g=\begin{pmatrix}* & * & *\\ 0 & * & *\\ 0 & 0 & *\end{pmatrix}$$

Диагональные блоки здесь имеют размеры 1, 16, 10 соответственно. Мы будем обозначать эту параболическую подгруппу через $P_1(R)$. Ее унипотентный радикал $U_1(R)$ выглядит так:

$$\begin{pmatrix}1 & A & *\\ 0 & I_{16} & *\\ 0 & 0 & I_{10}\end{pmatrix}$$

Группа $U_1(R)$ абелева и изоморфна (как абстрактная группа) R^{16}: мы можем произвольным образом выбрать строку A длины 16, состоящую из элементов кольца R и единственным образом построить по ней матрицу из унипотентного радикала $U_1(R)$. Покажем, как это сделать явно. Обозначим через Σ_1 множество таких корней $\alpha \in \mathrm{E}_6$, что $\lambda_1 - \alpha \in \Lambda$. Заметим, что при вычитании всех таких α из λ_1 мы получим в точности шестнадцать весов из $\mathrm{B} \cup \Gamma$, то есть

$$\Sigma_1 = \{\lambda_1 - \lambda \mid \lambda \in \mathrm{B} \cup \Gamma\} = \{{}^{1****}_{\ \ *} \in \mathrm{E}_6\}.$$

Выберем произвольные шестнадцать элементов $\xi_\alpha \in R$, $\alpha \in \Sigma_1$ и рассмотрим матрицу

$$\prod_{\alpha \in \Sigma_1} x_\alpha(\xi_\alpha) \in G(\mathrm{E}_6, R).$$

Порядок, в котором здесь перемножаются корневые элементы, не важен: все они коммутируют друг с другом. Нетрудно видеть, что эта матрица лежит в $U_1(R)$ и на пересечении ее первой строки со столбцом, помеченным v^λ, $\lambda \in \mathrm{B} \cup \Gamma$, находится элемент $\pm\xi_{\lambda_1 - \lambda}$ (знак здесь на самом деле равен знаку структурной константы $c_{\lambda, \lambda_1 - \lambda}$). Кроме того, любая матрица из $U_1(R)$ единственным образом представляется в виде такого произведения.

Аналогичным образом определяется параболическая подгруппа $P_6(R)$ и ее унипотентный радикал $U_6(R)$. Для этого рассмотрим разбиение Λ на три множества $\{\lambda_1, \lambda_{13}\} \cup \mathrm{B}$, $\Gamma \cup \Delta$ и $\{\lambda_{-1}\}$, соответствующее вырезанию из весовой диаграммы E_6 всех ребер, помеченных 6. Матрицы из $P_6(R)$ и $U_6(R)$ имеют следующую блочную структуру относительно этого разбиения:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in P_6(R), \qquad \begin{pmatrix} I_{10} & * & * \\ 0 & I_{16} & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in U_6(R).$$

Группа $U_6(R)$ абелева и также является произведением шестнадцати попарно коммутирующих корневых подгрупп. Действительно, пусть

$$\Sigma_6 = \{\alpha \in \mathrm{E}_6 \mid \lambda_{-1} + \alpha \in \Lambda\} = \{{}^{****1}_{\ \ *} \in \mathrm{E}_6\}$$

Тогда $\lambda_{-1}+\alpha \in \Gamma \cup \Delta$ для $\alpha \in \Sigma_6$. Мы можем выбрать произвольные $\xi_\alpha \in R$, $\alpha \in \Sigma_6$ и рассмотреть произведение

$$\prod_{\alpha \in \Sigma_6} x_\alpha(\xi_\alpha) \in G(\mathrm{E}_6, R).$$

Оно лежит в $U_6(R)$ и любая матрица из $U_6(R)$ представляется в таком виде.

Теперь посмотрим на пересечение $P_1(R) \cap P_6(R)$. Для этого необходимо разбить Λ на шесть множеств весов:

$$\Lambda = \{\lambda_1\} \cup \mathrm{B} \cup \Gamma \cup \{\lambda_{13}\} \cup \Delta \cup \{\lambda_{-1}\}.$$

Блочная структура матриц из пересечения $P_1(R) \cap P_6(R)$ и его унипотентного радикала такова:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in P_1(R) \cap P_6(R), \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & I_8 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & I_8 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in U_1(R) \cap U_6(R),$$

Обозначим через Ψ_{16} пересечение множеств $\Sigma_1 \cap \Sigma_6$, а через Ψ_1 и Ψ_6 — дополнения Ψ_{16} до Σ_1 и Σ_6 соответственно. Нетрудно видеть, что

$$\Psi_1 = \{\lambda_1 - \lambda \mid \lambda \in \mathrm{B}\} = \{{}^{1***0}_{\ \ *} \in \mathrm{E}_6\},$$
$$\Psi_6 = \{\lambda - \lambda_{-1} \mid \lambda \in \Delta\} = \{{}^{0***1}_{\ \ *} \in \mathrm{E}_6\},$$
$$\Psi_{16} = \{\lambda_1 - \lambda \mid \lambda \in \Gamma\} = \{\lambda - \lambda_{-1} \mid \lambda \in \Gamma\} = \{{}^{1***1}_{\ \ *} \in \mathrm{E}_6\}.$$

Матрица из $U_1(R) \cap U_6(R)$ единственным образом представляется в виде произведения

$$\prod_{\alpha \in \Psi_{16}} x_\alpha(\xi_\alpha) \in G(\mathrm{E}_6, R),$$

где $\xi_\alpha \in R$ для $\alpha \in \Psi_{16}$.

Лемма 3.4. *Пусть $g \in G(\mathrm{E}_6, R)$ такова, что $g_{11} = 1$ и $g_{\lambda 1} = 0$ для $\lambda \in (\mathrm{B} \cup \Gamma) \setminus \{\lambda_{15}\}$. Тогда $g_{\lambda 1} = 0$ для всех $\lambda \notin \{\lambda_1, \lambda_{15}\}$.*

Доказательство. Обозначим $g_{15,1}$ через ξ и рассмотрим матрицу

$$h = x_{-\substack{11221\\1}}(\xi)g.$$

Заметим, что $h_{15,1} = g_{15,1} - \xi g_{11} = 0$. Кроме того, $h_{\lambda,1} = g_{\lambda,1}$ для всех $\lambda \in \mathrm{B} \cup \Gamma \setminus \{\lambda_{15}\}$, потому что для всех таких λ сумма $\lambda + \substack{11221\\1}$ не является весом. Но из этого следует, что $h_{\lambda 1} = 0$ для всех $\lambda \neq \lambda_1$, то есть $h \in P_1(R)$. Отсюда, поскольку $g = x_{-\substack{11221\\1}}(-\xi)h$, видно, что

$$g_{\lambda,1} = h_{\lambda,1} = 0 \text{ для всех } \lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_1\}, \lambda + \substack{11221\\1} \notin \Lambda.$$

Если же $\lambda, \lambda + \substack{11221\\1} \in \Lambda$ и $\lambda \neq \lambda_{15}$, то

$$g_{\lambda,1} = h_{\lambda,1} \pm \xi h_{\lambda + \substack{11221\\1}} = h_{\lambda,1} = 0.$$

Лемма 3.5. *Пусть $g = \prod_{\gamma \in \Psi_{16}} x_\gamma(\xi_\gamma) \in G(\mathrm{E}_6, R)$, где $\xi_\gamma \in R$ для всех $\gamma \in \Psi_{16}$. Матрица g лежит в $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$ тогда и только тогда, когда $\xi_{\substack{12211\\1}} = \xi_{\substack{11221\\1}}$.*

Доказательство. Если $\xi_{\substack{12211\\1}} = \xi_{\substack{11221\\1}} = \xi$, то

$$x_{\substack{12211\\1}}(\xi_{\substack{12211\\1}})x_{\substack{11221\\1}}(\xi_{\substack{11221\\1}}) = X_{1232}(\xi),$$

а поскольку все остальные корни из Ψ_{16} лежат в Φ_l, получаем $g \in E(\mathrm{F}_4, R)$. Обратно, поскольку

$$g_{1,13} = 0, \quad g_{1,14} = -\xi_{\substack{12211\\1}}, \quad g_{1,15} = -\xi_{\substack{11221\\1}},$$

имеем

$$(gu)_1 = g_{1,13} - g_{1,14} + g_{1,15} = \xi_{\substack{12211\\1}} - \xi_{\substack{11221\\1}}.$$

По условию $gu = \lambda u$ для некоторого $\lambda \in R^*$, значит,

$$\xi_{\substack{12211\\1}} - \xi_{\substack{11221\\1}} = (gu)_1 = \lambda u_1 = 0.$$

Лемма 3.6. *Если $g \in P_1(R) \cap G(\mathrm{F}_4, R)$, то $g \in P_6(R)$.*

Доказательство. По условию, $g_{11} \in R^*$ и $g_{\lambda,1} = 0$ для $\lambda \neq \lambda_1$. Выберем $\lambda \in \Delta \cup \{\lambda_{13}\}$. Тогда

$$0 = B(v^1, v^\lambda) = B(gv^1, gv^\lambda) = g_{11} g_{-1,\lambda},$$

поэтому $g_{-1,\lambda} = 0$ для всех таких λ. С другой стороны, для $\lambda \in \mathrm{B} \cup \Delta \cup \{\lambda_1\}$ также имеем $g_{-1,\lambda} = 0$, поскольку $g \in P_1(R)$. Значит, последняя строка g пропорциональна последней строке единичной матрицы, то есть, $g \in P_6(R)$.

3.5. Вычисление нормализатора $E(\mathrm{F}_4, R)$ в $G(\mathrm{E}_6, R)$

В этом разделе мы докажем следующее предложение, являющееся аналогом теоремы A.

Предложение 3.7. *В условиях теоремы C имеем*

$$N_G(E(\mathrm{F}_4, R)) = N_G(G(\mathrm{F}_4, R)) = \mathrm{Tran}_G(E(\mathrm{F}_4, R), G(\mathrm{F}_4, R)) = \overline{G}(\mathrm{F}_4, R).$$

Напомним, что здесь $G = G(\mathrm{E}_6, R)$, и для подгрупп E и F в группе G мы обозначаем через $\mathrm{Tran}_G(E, F)$ *транспортер* E в F (см.)

Предложение 3.7, говоря неформально, показывает, что $\overline{G}$ является нормализатором F_4 в E_6 не только в схемном смысле, но и поточечно: значение этого функтора на любом кольце является абстрактно-групповым нормализатором соответствующей группы. Заметим, что наше определение $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$ совпадает с определением *расширенной группы Шевалле*, данным впервые в [15] для присоединенных групп, а позднее в [24] и для интересующего нас случая односвязных групп (см. также [4]). Очевидно, что $G(\mathrm{F}_4, R)$ — нормальная подгруппа в $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$.

По самому определению $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$ является аффинной схемой над $\mathbb{Z}$. Как хорошо известно, функтор точек аффинной схемы полностью определяется своими значениями на локальных кольцах. Частным случаем этого принципа является следующая лемма.

Лемма 3.8. *Пусть $g \in G(\mathrm{E}_6, R)$, причем $F_M(g) \in \overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$ для всех $M \in \mathrm{Max}(R)$. Тогда $g \in \overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$.*

Лемма 3.9. *Матрица $g \in G(\mathrm{E}_6, R)$ принадлежит $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнениям*

$$(Fg^T)_{ir}(g^{-1}F)_{js} = (g^{-1}F)_{ir}(Fg^T)_{js}$$

для всех $i, j, r, s = 1, \dots, -1$.

Доказательство. Пусть X — аффинная подсхема в $G(\mathrm{E}_6, -)$ над $\mathbb{Z}$, определенная этими уравнениями. Ясно, что $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R) \subset X(R)$. По лемме 3.8 обратное включение достаточно доказывать для локального кольца R. Пусть $M = R \setminus R^*$ — максимальный идеал R. Для начала докажем, что если $g \in X(R)$, то найдутся i, r такие, что $(Fg^T)_{ir}(g^{-1}F)_{ir} \in R^*$. Предположим противное: пусть $(Fg^T)_{ir}(g^{-1}F)_{ir} \in M$ для всех i, r. Так как матрица Fg^T обратима, то для любого i найдется такое r, что $(Fg^T)_{ir} \notin M$. Так как матрица $g^{-1}F$ обратима, то для любого j найдется такое s, что $(g^{-1}F)_{js} \notin M$. Тогда $(Fg^T)_{ir}(g^{-1}F)_{js} \in R^*$, но по нашему предположению $(g^{-1}F)_{ir}(Fg^T)_{js} \in M$, что противоречит тому, что $g \in X(R)$.

Теперь зафиксируем i, r такие, что $(Fg^T)_{ir}(g^{-1}F)_{ir} \in R^*$. Положим

$$\lambda = (Fg^T)_{ir}((g^{-1}F)_{ir})^{-1} \in R^*.$$

Тогда уравнения на g превращаются в $(Fg^T)_{js} = \lambda(g^{-1}F)_{js}$. Но это означает, что $Fg^T = \lambda g^{-1}F$, то есть $gFg^T = \lambda F$, откуда $g \in \overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$.

Следующая лемма является небольшим усилением теоремы Таддеи [61]. Строго говоря, в [61] доказана нормальность $E(\Phi, R)$ лишь в группе Шевалле $G(\Phi, R)$, но позднее (см., например, [10], [11]) было замечено, что $G(\Phi, R)$ можно заменить на $\overline{G}(\Phi, R)$. Впрочем, в интересующем нас случае $\Phi = \mathrm{F}_4$ этот факт очевидно следует из теоремы Таддеи, поскольку выполняется (1). См. также обсуждение леммы 1.2.

Лемма 3.10. *Элементарная подгруппа $E(\mathrm{F}_4,R)$ нормальна в $\overline{G}(\mathrm{F}_4,R)$ для любого коммутативного кольца R.*

Доказательство предложения 3.7 Напомним, что через G мы обозначаем группу $G(\mathrm{E}_6,R)$. Очевидно, что $\overline{G}(\mathrm{F}_4,R)\le N_G(G(\mathrm{F}_4,R))$ — это сразу вытекает из (1). Из леммы 3.10 следует, что $\overline{G}(\mathrm{F}_4,R)\le N_G(E(\mathrm{F}_4,R))$. Кроме того, очевидно, что

$$N_G(E(\mathrm{F}_4,R)),\ N_G(G(\mathrm{F}_4,R))\le \mathrm{Tran}_G(E(\mathrm{F}_4,R),G(\mathrm{F}_4,R)).$$

Для окончания доказательства нам достаточно проверить включение

$$\mathrm{Tran}_G(E(\mathrm{F}_4,R),G(\mathrm{F}_4,R))\le \overline{G}(\mathrm{F}_4,R).$$

Возьмем какую-нибудь матрицу $g\in \mathrm{Tran}_G(E(\mathrm{F}_4,R),G(\mathrm{F}_4,R))$. Для некоторых $\alpha\in\mathrm{F}_4$, $\xi\in R$ рассмотрим матрицу $h=g^{-1}X_\alpha(\xi)g$. Поскольку $h\in G(\mathrm{F}_4,R)$, имеем $hu=u$, то есть $g^{-1}X_\alpha(\xi)gu=u$. Обозначим $gu=v=\sum_\lambda v_\lambda v^\lambda$, тогда $X_\alpha(\xi)v=v$. Поскольку $X_\alpha(\xi)=e+\xi e_\alpha$, получаем, что $e_\alpha v=0$ для всех $\alpha\in\mathrm{F}_4$. Из этого немедленно следует, что если $\alpha\in\Phi_l$ и $\lambda\in\Lambda$ — такой вес, что $\lambda+\alpha\in\Lambda$, то $v_\lambda=0$. Таким образом, у вектора v стоит 0 во всех позициях, кроме 13, 14, 15 (для всех остальных позиций нетрудно подобрать нужный корень $\alpha\in\Phi_l$). Подставив теперь в качестве α короткий корень $0001\in\mathrm{F}_4$, получаем $v_{13}+v_{14}=0$, а подставив $\alpha=0010\in\mathrm{F}_4$, получаем $v_{14}+v_{15}=0$. Значит, $v=ku$ для некоторого $k\in R$ и $gu=ku$, откуда по лемме 3.1 имеем $k^3=1$ и, следовательно, $g\in\overline{G}(\mathrm{F}_4,R)$.

Простое теоретико-групповое рассуждение позволяет усилить результат предложения 3.7 следующим образом.

Следствие 3.11. *Следствие В условиях предложения 3.7 имеем также*

$$\mathrm{Tran}_G(E(\mathrm{F}_4,R),\overline{G}(\mathrm{F}_4,R))=\overline{G}(\mathrm{F}_4,R).$$

Доказательство. Пусть для некоторого $g\in G(\mathrm{E}_6,R)$ выполняется включение $[g, E(\mathrm{F}_4, R)] \leq \overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$. По лемме 3.10

$$[g, E(\mathrm{F}_4, R), E(\mathrm{F}_4, R)] \leq E(\mathrm{F}_4, R).$$

Но группа $E(\mathrm{F}_4, R)$ совершенна (лемма 1.4), поэтому из леммы о трех подгруппах вытекает, что $g \in N_G(E(\mathrm{F}_4, R)) = \overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$.

3.6. Относительные группы и нижний уровень

Напомним определение относительной элементарной группы. Пусть R — коммутативное кольцо, $A \trianglelefteq R$ — идеал в нем, Φ — произвольная система корней. Тогда

$$E(\Phi, R, A) = E(\Phi, A)^{E(\Phi,R)}.$$

Лемма 3.12. *Для идеала $A \trianglelefteq R$ имеет место равенство*

$$E(\mathrm{E}_6, A)^{E(\mathrm{F}_4,R)} = E(\mathrm{E}_6, R, A).$$

Доказательство. Ясно, что левая часть содержится в правой. Обозначим левую часть через H. По лемме 1.1 достаточно доказать, что если $\alpha \in \mathrm{E}_6$, $\xi \in A$, $\zeta \in R$, то $z_\alpha(\xi, \zeta) \in H$. Для $\alpha \in \Phi_l$ это очевидно; если же α не является длинным корнем F_4, значит, α и $\overline{\alpha} \neq \alpha$ проектируются в корень $\beta \in \Phi_s$. Рассмотрим в H элемент ${}^{X_{-\beta}(\zeta)}x_\alpha(\xi) = {}^{x_{-\alpha}(\pm\zeta)x_{-\overline{\alpha}}(\pm\zeta)}x_\alpha(\xi)$. Поскольку $\overline{\alpha}$ ортогонален α, этот элемент равен ${}^{x_{-\alpha}(\pm\zeta)}x_\alpha(\xi) = z_\alpha(\xi, \pm\zeta)$, что завершает доказательство.

Лемма 3.13. *Пусть H — подгруппа в $G(\mathrm{E}_6, R)$, содержащая $E(\mathrm{F}_4, R)$. Для $\alpha \in \mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$ положим $I_\alpha = \{\xi \in R \mid x_\alpha(\xi) \in H\}$. Тогда для любого $\beta \in E_6 \setminus \Phi_l$ имеем $I_\alpha = I_\beta = I$, причем $I \trianglelefteq R$.*

Доказательство. Очевидно, что каждое множество I_α является аддитивной подгруппой в R. Возьмем сначала $\alpha \in \mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$ и $\xi \in I_\alpha$. Возьмем также любое $\zeta \in R$ и $\beta \in \mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$ такой, что разность $\beta - \alpha$ лежит в Φ_l. Тогда

$$x_\beta(\pm\xi\zeta) = [x_\alpha(\xi), x_{\beta-\alpha}(\zeta)] = [x_\alpha(\xi), X_{\beta-\alpha}(\zeta)] \in H.$$

Таким образом, $I_\alpha R \subset I_\beta$. Кроме того, для некоторого выбора знаков $x_\alpha(\pm\xi)x_{\overline{\alpha}}(\pm\xi)$ лежит в $\mathrm{E}(\mathrm{F}_4, R)$, откуда $I_\alpha = I_{\overline{\alpha}}$. Разобьем все положительные корни из $\mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$ на три множества:

$$
\begin{array}{l}
\Theta_1 : \substack{10000\\0},\ \substack{11110\\0},\ \substack{11110\\1},\ \substack{11210\\1},\ \substack{00001\\0},\ \substack{01111\\0},\ \substack{01111\\1},\ \substack{01211\\1}\\
\Theta_2 : \substack{11000\\0},\ \substack{11100\\0},\ \substack{11100\\1},\ \substack{12210\\1},\ \substack{00011\\0},\ \substack{00111\\0},\ \substack{00111\\1},\ \substack{01221\\1}\\
\Theta_3 : \substack{01000\\0},\ \substack{01100\\0},\ \substack{01100\\1},\ \substack{12211\\1},\ \substack{00010\\0},\ \substack{00110\\0},\ \substack{00110\\1},\ \substack{11221\\1}
\end{array}
$$

Как нетрудно видеть, в каждом из этих множеств у любых двух корней из первой четверки разность лежит в Φ_l, а вторая четверка является образом первой четверка под действием автоморфизма $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$. Значит, для корней α в каждом из множеств Θ_i множества I_α совпадают и являются идеалами. Обозначим идеалы, соответствующие корням из Θ_1, Θ_2, Θ_3, соответственно, I_1, I_2, I_3. Рассмотрим коммутатор

$$[x_{\substack{10000\\0}}(\xi), X_{0010}(\zeta)] = [x_{\substack{10000\\0}}(\xi), x_{\substack{01000\\0}}(\pm\zeta)x_{\substack{00010\\0}}(\pm\zeta)] = x_{\substack{11000\\0}}(\pm\xi\zeta).$$

Получаем, что $I_1 R \subset I_2$. Проведя еще два аналогичных вычисления, легко убедиться, что $I_1 = I_2 = I_3$. Таким образом, идеалы I_α совпадают для всех положительных $\alpha \in \mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$. Точно такое же рассуждение показывает, что идеалы I_α совпадают для всех отрицательных $\alpha \in \mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$. Осталось заметить, что разность корней $\substack{10000\\0}$ и $-\substack{01111\\0}$ является корнем из Φ_l, поэтому можно применить такое же вычисление, как в начале доказательства леммы, и получить совпадение идеалов для *всех* корней из $\mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$.

Суммируя леммы 3.12 и 3.13, мы получаем следующее утверждение.

Предложение 3.14. *Пусть H — подгруппа в $G(\mathrm{E}_6, R)$, содержащая $E(\mathrm{F}_4, R)$. Тогда существует единственный наибольший идеал $A \trianglelefteq R$ такой, что*

$$\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A) = E(\mathrm{F}_4, R)E(\mathrm{E}_6, R, A) \leq H.$$

При этом, если $x_\alpha(\xi) \in H$ для некоторого $\alpha \in \mathrm{E}_6 \setminus \mathrm{F}_4$, то $\xi \in A$.

Это означает, что для каждой подгруппы между $E(\mathrm{F}_4, R)$ и $G(\mathrm{E}_6, R)$ мы нашли так называемый *нижний уровень*. Для окончания доказательства теоремы C остается показать, что он совпадает с верхним уровнем, то есть, что $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)$ *нормальна* в H.

3.7. Нормализатор промежуточной подгруппы

Рассмотрим гомоморфизм редукции $\rho_A^{\mathrm{E}_6} : G(\mathrm{E}_6, R) \to G(\mathrm{E}_6, R/A)$, индуцированный гомоморфизмом соответствующих полных линейных групп, и обозначим через $\mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A)$ полный прообраз группы $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R/A)$ относительно $\rho_A^{\mathrm{E}_6}$.

Предложение 3.15. *В условиях теоремы C для любого идеала $A \trianglelefteq R$ имеем*

$$N_G(\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)) = \mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A).$$

Лемма 3.16. *Пусть R — коммутативное кольцо, $A \trianglelefteq R$ — идеал. Тогда группа* $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)$ *совершенна.*

Доказательство. Из леммы 3.12 следует, что $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)$ порождается как группа всеми корневыми элементами $x_\alpha(\zeta)$, $\alpha \in \mathrm{F}_4$, $\zeta \in R$ и корневыми элементами $x_\alpha(\xi)$, $\alpha \in \mathrm{E}_6 \setminus \mathrm{F}_4$, $\xi \in A$. Покажем, что все эти образующие лежат в коммутанте $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)$. Для корневых элементов F_4 это вытекает из совершенности абсолютной элементарной группы (лемма 1.4). Теперь рассмотрим $x_\alpha(\xi)$, где $\alpha \in \mathrm{E}_6 \setminus \mathrm{F}_4$ и $\xi \in A$. Как замечено в доказательстве леммы 3.13, найдется корень $\beta \in \mathrm{E}_6 \setminus \mathrm{F}_4$ такой, что $\alpha - \beta \in \mathrm{F}_4$. Но тогда

$$x_\alpha(\xi) = [x_\beta(\xi), x_{\alpha-\beta}(\pm 1)],$$

и оба корневых элемента из правой части лежат в $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)$.

Рассмотрим гомоморфизм редукции $\rho_A^{\mathrm{E}_6} : G(\mathrm{E}_6, R) \to G(\mathrm{E}_6, R/A)$ и обозначим через $\mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A)$ полный прообраз $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R/A)$ относительно этой редукции:

$$\mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A) = (\rho_A^{\mathrm{E}_6})^{-1}(\overline{G}(\mathrm{F}_4, R/A))$$

Напомним, что через $G(\mathrm{E}_6, R, A)$ мы обозначили ядро гомоморфизма $\rho_A^{\mathrm{E}_6}$. Заметим, что $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)G(\mathrm{E}_6, R, A) \leq \mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A)$, однако здесь возможно и строгое неравенство.

Из леммы 3.9 немедленно вытекает следующее описание введенной нами группы $\mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A)$.

Предложение 3.17. *Матрица $g \in G(\mathrm{E}_6, R)$ принадлежит $\mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет сравнениям*

$$(Fg^T)_{ir}(g^{-1}F)_{js} \equiv (g^{-1}F)_{ir}(Fg^T)_{js} \pmod A$$

для всех $i, j, r, s = 1, \ldots, -1$.

Теперь все готово для доказательства предложения 3.15.

Доказательство предложения 3.15. Напомним, что $G = G(\mathrm{E}_6, R)$. Очевидно, что

$$N_G(\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)) \leq N_G(\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)G(\mathrm{E}_6, R, A)).$$

Кроме того, из предложения 3.7, примененной к кольцу R/A, и теоремы о гомоморфизме следует, что

$$N_G(\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)G(\mathrm{E}_6, R, A)) = \mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A).$$

В частности,

$$[\mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A), \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)] \leq \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)G(\mathrm{E}_6, R, A).$$

Нам остается доказать, что $\mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A)$ нормализует $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)$. Заметим, что

$$[\overline{G}(\mathrm{F}_4, R, A)G(\mathrm{E}_6, R, A), \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)] \leq \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A).$$

Действительно, рассмотрим коммутатор вида

$$[xy, hg], \quad x \in \overline{G}(\mathrm{F}_4, R),\ y \in G(\mathrm{E}_6, R, A),\ h \in E(\mathrm{F}_4, R),\ g \in E(\mathrm{E}_6, R, A).$$

Тогда $[xy, hg] = {}^x[y, h]\cdot[x, h]\cdot{}^h[xy, g]$. По лемме 3.10 второй коммутатор лежит в $E(\mathrm{F}_4, R)$. По лемме 3.2 коммутаторы $[xy, g]$ и $[y, h]$ лежат в $E(\mathrm{E}_6, R, A)$, следовательно, ${}^h[xy, g] \in \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)$ и, снова по лемме 3.2, ${}^x[y, h] \in E(\mathrm{E}_6, R, A)$.

Но $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)G(\mathrm{E}_6, R, A)$ содержится в $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R, A)G(\mathrm{E}_6, R, A)$, поэтому, тем более,

$$[\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)G(\mathrm{E}_6, R, A), \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)] \leq \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A).$$

Резюмируя сказанное выше, мы видим, что

$$[[\mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A), \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)], \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)] \leq \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A).$$

Теперь уточним этот результат: покажем, что на самом деле

$$[[\mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A), \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)], [\mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A), \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)]] \leq \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A).$$

Заметим, что по уже доказанному левая часть порождается коммутаторами вида $[uv, [z, y]]$, где $u, y \in \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)$, $v \in G(\mathrm{E}_6, R, A)$, $z \in \mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A)$. Но

$$[uv, [z, y]] = {}^u[v, [z, y]] \cdot [u, [z, y]],$$

причем второй коммутатор принадлежит $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)$, а первый принадлежит $[G(\mathrm{E}_6, R, A), E(\mathrm{E}_6, R)] \leq E(\mathrm{E}_6, R, A)$.

Теперь мы можем завершить доказательство. Напомним, что нам остается доказать, что $\mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A)$ нормализует $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)$. По лемме 3.16 группа $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)$ совершенна. Значит, достаточно показать, что $[z, [x, y]] \in \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)$ для любых $x, y \in \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)$, $z \in \mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A)$. Тождество Холла-Витта дает

$$[z, [x, y]] = {}^{xz}[[z^{-1}, x^{-1}], y] \cdot {}^{xy}[[y^{-1}, z], x^{-1}],$$

причем, по уже доказанному, второй коммутатор лежит в $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)$. Осталось заметить, что

$${}^{xz}[[z^{-1}, x^{-1}], y] = {}^x[{}^z[z^{-1}, x^{-1}], {}^zy] = {}^x[[x^{-1}, z], [z, y]y]$$

и достаточно доказать, что $[[x^{-1},z],[z,y]y] \in \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4,R,A)$. Но

$$\begin{aligned},[z,y]y] &= [x^{-1},z][z,y]y[z,x^{-1}]y^{-1}[y,z] \\ &= [[x^{-1},z],[z,y]]\cdot[z,y][x^{-1},z]y[z,x^{-1}]y^{-1}[y,z] \\ &= [[x^{-1},z],[z,y]]\cdot {}^{[z,y]}[[x^{-1},z],y],\end{aligned}$$

причем оба коммутатора $[[x^{-1},z],[z,y]]$ и $[[x^{-1},z],y]$ в полученном выражении принадлежат $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4,R,A)$, а сопрягающий элемент $[z,y]$ при втором коммутаторе лежит в $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4,R,A)G(\mathrm{E}_6,R,A)$ и, следовательно, нормализует $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4,R,A)$.

3.8. Функтор локализации

Следующие леммы предоставляют техническую основу для проведения локализации. Лемма 3.18 является частным случаем теоремы 5.3 работы [34].

Лемма 3.18. *Для любого конечного числа элементов $g_1,\dots,g_n \in \overline{E}(F_4,R)$ и любого $k \geq 0$ существует такое $m \geq 0$, что*

$$[g_i, F_s(\overline{G}(\mathrm{F}_4,R,s^mR))] \leq E(\mathrm{F}_4,F_s(s^kR)).$$

Лемма 3.19. *Пусть H — подгруппа в $G(\mathrm{E}_6,R)$, содержащая $E(\mathrm{F}_4,R)$. Пусть $X \leq G(\mathrm{E}_6,-)$ — групповая подсхема. Предположим, что для какого-то $s \in R$*

$$F_s(H)\overline{G}(\mathrm{F}_4,R_s) \cap X(R_s) \not\subseteq \overline{G}(\mathrm{F}_4,R_s).$$

Тогда найдется такое $t \in R$, что уже

$$F_t(H)\overline{E}(\mathrm{F}_4,R_t) \cap X(R_t) \not\subseteq \overline{G}(\mathrm{F}_4,R_t).$$

Доказательство. Пусть $F_s(g)x$, где $g \in H$, $x \in \overline{G}(\mathrm{F}_4,R_s)$, такой элемент. По лемме 3.8 найдется такой максимальный идеал $M \in \mathrm{Max}(R)$, что $s \notin M$ и $F_M(g) \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4,R_M)$. Так как кольцо R_M локальное, то $\overline{G}(\mathrm{F}_4,R_M) = \overline{E}(\mathrm{F}_4,R_M)$. С другой стороны, так как $\overline{E}(\mathrm{F}_4,R_M) = \varinjlim \overline{E}(\mathrm{F}_4,R_t)$, где предел берется по всем $t \notin M$, то найдется такое $t = sq \notin M$, что $F_q(x) \in \overline{E}(\mathrm{F}_4, R_t)$. Тогда

$$F_q(F_s(g)x) = F_t(g)F_q(x) \in F_t(H)\overline{G}(\mathrm{F}_4, R_t) \cap X(R_t)$$

и в силу нашего выбора M по-прежнему $F_t(g) \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_t)$.

Лемма 3.20. *Если в условиях предыдущей леммы $y \in F_s(H)\overline{E}(\mathrm{F}_4, R_s)$, то найдется такое $n \in \mathbb{N}_0$, что*

$$[y, X_\alpha(s^n/1)] \in F_s(H)$$

для всех $\alpha \in \mathrm{F}_4$.

Доказательство. Запишем y в виде $y = gx$, где $g \in F_s(H)$, $x \in \overline{E}(\mathrm{F}_4, R_s)$. Тогда для любого n имеем

$$[y, X_\alpha(s^n/1)] = {}^g[x, X_\alpha(s^n/1)][g, X_\alpha(s^n/1)].$$

По лемме 3.18 можно выбрать n так, чтобы

$$[x, X_\alpha(s^n/1)] \in F_s(E(\mathrm{F}_4, R)) \subseteq F_s(H)$$

для всех $\alpha \in \mathrm{F}_4$. Все остальные множители в правой части принадлежат $F_s(H)$.

Доказательство леммы 3.20 демонстрирует важный способ применения леммы 3.18: при коммутировании с корневым элементом можно выбирать степень s так, чтобы знаменатели уничтожились и результат попал в $F_s(H)$. В дальнейшем при извлечении корневого элемента мы будем пользоваться этой идеей без специального упоминания.

Следующий вспомогательный результат позволяет нам извлекать корневой элемент из группы $F_s(H)$ при помощи элементов $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, а не только элементов $F_s(\mathrm{E}(\mathrm{F}_4, R))$. Благодаря этому дальнейшее доказательство уже может практически не учитывать локализацию.

Предложение 3.21. *Пусть H — подгруппа в $G(\mathrm{E}_6, R)$, содержащая $E(\mathrm{F}_4, R)$. Предположим, что найдется такое $s \in R$, что $F_s(H)\overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$ содержит нетривиальный элементарный корневой элемент, соответствующий корню из $\mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$. Тогда H содержит нетривиальный корневой элемент $x_\alpha(\xi)$, где $\alpha \in \mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$, $\xi \in R$.*

Доказательство. По лемме 3.19 мы можем считать, что

$$x_\alpha(a/s^k) \in F_s(H)\overline{E}(\mathrm{F}_4, R_s)$$

для некоторых $\alpha \in \mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$, $a \in R$, $k \geq 0$, причем $a/s^k \neq 0$. Выберем корень $\beta \in \Phi_l$ такой, что $\alpha + \beta \in \mathrm{E}_6$ и рассмотрим коммутатор

$$[x_\alpha(a/s^k), x_\beta(s^{n+k}/1)] = x_{\alpha+\beta}(\pm s^n a/1).$$

В силу леммы 3.20 найдется n такое, что $x_{\alpha+\beta}(\pm s^n a/1) \in F_s(H)$, то есть, найдется такое $g \in H$, что $F_s(g) = x_{\alpha+\beta}(\pm s^n a/1)$. Кроме того, $F_s(x_{\alpha+\beta}(\pm s^n a)) = x_{\alpha+\beta}(\pm s^n a/1)$, и поэтому $g = x_{\alpha+\beta}(\pm s^n a)y$ для некоторого $y \in \mathrm{Ker}(F_s)$. Следовательно, найдется $m \in \mathbb{N}_0$ такое, что $y \in \mathrm{GL}(27, R, \mathrm{Ann}(s^m))$. Рассмотрим коммутатор $z = [g, x_{-\beta}(s^m)] \in H$. Так как $[y, x_{-\beta}(s^m)] = e$, то

$$z = [x_{\alpha+\beta}(\pm s^n a), x_{-\beta}(s^m)] = x_\alpha(s^{n+m}a).$$

Если $s^{m+n}a = 0$, то $a \in \mathrm{Ker}(F_s)$, что невозможно, так как мы предполагали, что $a/s^k \in R_s$ — ненулевой элемент. Значит, $z = x_\alpha(s^{m+n}a) \in H$ и есть искомый нетривиальный корневой элемент.

3.9. Извлечение корневого элемента из унипотентных радикалов

В следующих предложениях происходит *извлечение корневого элемента*, аналогичное извлечению трансвекции в доказательствах описания надгрупп классических групп в полной линейной группе. Напомним, что $P_1(R)$, $P_6(R)$ — максимальные параболические подгруппы в $G(\mathrm{E}_6, R)$, соответствующие корням α_1 и α_6 соответственно; $U_1(R)$, $U_6(R)$ — их (абелевы) унипотентные радикалы. В этом разделе мы показываем существование корневого элемента при наличии нетривиального элемента в пересечении унипотентных радикалов $U_1(R_s)$ и $U_6(R_s)$, затем — в их произведении, а затем — в произведении $U_1(R_s)$, $U_6(R_s)$ и тора $T(\mathrm{E}_6, R_s)$. Таким образом, происходит постепенное ослабление условий.

Предложение 3.22. *Пусть H — подгруппа в $G(\mathrm{E}_6, R)$, содержащая $E(\mathrm{F}_4, R)$. Предположим, что для некоторого $s \in R$ имеем*

$$F_s(H) \cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s) \cap U_1(R_s) \cap U_6(R_s) \not\subseteq \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s).$$

Тогда H содержит нетривиальный корневой элемент, соответствующий корню из $\mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$.

Доказательство. Любой элемент из $U_1(R_s) \cap U_6(R_s)$ является произведением корневых элементов $x_\alpha(\xi_\alpha)$, где α имеет вид $\begin{smallmatrix}1{*}{*}{*}1\\ *\end{smallmatrix}$. Нетрудно видеть, что все такие корни, кроме $\alpha = \begin{smallmatrix}12211\\ 1\end{smallmatrix}$ и $\overline{\alpha} = \begin{smallmatrix}11221\\ 1\end{smallmatrix}$, лежат в Φ_l. Домножая на обратные к этим корневым элементам, получаем, что

$$y = x_\alpha(\xi_\alpha) x_{\overline{\alpha}}(\xi_{\overline{\alpha}}) \in F_s(H) \cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s),$$

причем $y \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$. Корни α и $\overline{\alpha}$ проектируются в один короткий корень $1232 \in \mathrm{F}_4$: $X_{1232}(\xi) = x_\alpha(\xi) x_{\overline{\alpha}}(\xi)$. Рассмотрим элемент

$$z = y X_{1232}(-\xi_\alpha) = x_{\overline{\alpha}}(\xi_{\overline{\alpha}} - \xi_\alpha) \in F_s(H) \cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s).$$

Очевидно, что $z \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, поэтому $\xi_{\overline{\alpha}} - \xi_\alpha \neq 0 \in R_s$, и по предложению 3.21 в H найдется нужный нетривиальный корневой элемент.

Предложение 3.23. *Пусть H — подгруппа в $G(\mathrm{E}_6, R)$, содержащая $E(\mathrm{F}_4, R)$. Предположим, что для некоторого $s \in R$ имеем*

$$F_s(H) \cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s) \cap U_1(R_s) \cdot U_6(R_s) \not\subseteq \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s).$$

Тогда H содержит нетривиальный корневой элемент, соответствующий корню из $\mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$.

Доказательство. Любой элемент y произведения унипотентных радикалов $U_1(R_s)\cdot U_6(R_s)$ и тора T можно представить в виде

$$y=\prod_{\gamma\in\Psi_6}x_\gamma(\xi_\gamma)\prod_{\gamma\in\Psi_1}x_\gamma(\xi_\gamma)\prod_{\gamma\in\Psi_{16}}x_\gamma(\xi_\gamma).$$

Заметим, что если мы представим, кроме этого, y в виде

$$y=\prod_{\gamma\in\Psi_1}x_\gamma(\zeta_\gamma)\prod_{\gamma\in\Psi_6}x_\gamma(\zeta_\gamma)\prod_{\gamma\in\Psi_{16}}x_\gamma(\zeta_\gamma),$$

то $\xi_\gamma=\zeta_\gamma$ для $\gamma\in\Psi_1\cup\Psi_6$ (это непосредственно следует из того, что для $\gamma\in\Psi_1$, $\delta\in\Psi_6$ имеем $[x_\gamma(\xi),x_\delta(\zeta)]=x_{\gamma+\delta}(\pm\xi\zeta)$, если $\gamma+\delta\in\Psi_{16}$, и $[x_\gamma(\xi),x_\delta(\zeta)]=1$ в противном случае).

Для каждого корня $\gamma\in\Psi_6$ мы можем составить элемент $x_\gamma(-\xi_\gamma)x_{\overline{\gamma}}(\pm\xi_\gamma)\in E(\mathrm{F}_4,R_s)$ и домножить слева y на произведение всех таких элементов; значит, можно считать, что $\xi_\gamma=\zeta_\gamma=0$ для всех $\gamma\in\Psi_6$.

Выберем короткий корень $\alpha\in\mathrm{F}_4$ вида $\alpha={*}{*}{*}1$. Соответствующие ему корни $\beta,\overline{\beta}\in\mathrm{E}_6$ выглядят так: $\beta=\begin{smallmatrix}1{*}{*}{*}0\\ *\end{smallmatrix}\in\Psi_1$, $\overline{\beta}=\begin{smallmatrix}0{*}{*}{*}1\\ *\end{smallmatrix}\in\Psi_6$. Прокоммутируем y с корневым элементом $X_\alpha(\xi)=x_\beta(\xi)x_{\overline{\beta}}(\pm\xi)$:

$$[X_\alpha(\xi),y]={}^{x_\beta(\xi)}[x_{\overline{\beta}}(\pm\xi),y]\cdot[x_\beta(\pm\xi),y].$$

Пусть

$$y_6=\prod_{\gamma\in\Psi_6}x_\gamma(\xi_\gamma),\quad y_1=\prod_{\gamma\in\Psi_1}x_\gamma(\xi_\gamma),\quad y_{16}=\prod_{\gamma\in\Psi_{16}}x_\gamma(\xi_\gamma).$$

Тогда $y=y_6y_1y_{16}$. Прежде всего заметим, что $x_\beta(\xi)$ коммутирует со всеми $x_\gamma(\xi_\gamma)$ для $\gamma\in\Psi_1\cup\Psi_{16}$, и, следовательно, с y_1 и y_{16}. Значит,

$$\begin{aligned}&=[x_\beta(\pm\xi),y_6y_1y_{16}]\\&=[x_\beta(\pm\xi),y_6]\cdot{}^{y_6}[x_\beta(\pm\xi),y_1]\cdot{}^{y_6y_1}[x_\beta(\pm\xi),y_{16}]\\&=[x_\beta(\pm\xi),y_6].\end{aligned}$$

Аналогично, если

$$z_1=\prod_{\gamma\in\Psi_1}x_\gamma(\zeta_\gamma),\quad z_6=\prod_{\gamma\in\Psi_6}x_\gamma(\zeta_\gamma),\quad z_{16}=\prod_{\gamma\in\Psi_{16}}x_\gamma(\zeta_\gamma),$$

то $y = z_1 z_6 z_{16}$ и, следовательно,

$$[x_{\overline{\beta}}(\pm\xi), y] = [x_{\overline{\beta}}(\pm\xi), z_1].$$

Кроме этого, y_6 является произведением коммутирующих между собой корневых элементов вида $x_\gamma(\xi_\gamma)$, $\gamma = \overset{0{*}{*}{*}1}{*}$. Результат коммутирования $x_\beta(\pm\xi)$ с одним таким элементом равен либо e, либо корневому элементу, соответствующему корню из Ψ_{16}, и, следовательно, коммутирует со всеми корневыми элементами $x_\gamma(\xi_\gamma)$, $\gamma \in \Psi_1 \cup \Psi_6 \cup \Psi_{16}$. Таким образом,

$$[x_\beta(\pm\xi), y_6] = [x_\beta(\pm\xi), \prod_{\gamma\in\Psi_6} x_\gamma(\xi_\gamma)] = \prod_{\gamma\in\Psi_6} [x_\beta(\pm\xi), x_\gamma(\xi_\gamma)].$$

Аналогичное рассуждение показывает, что

$$[x_{\overline{\beta}}(\pm\xi), z_1] = [x_{\overline{\beta}}(\pm\xi), \prod_{\gamma\in\Psi_1} x_\gamma(\zeta_\gamma)] = \prod_{\gamma\in\Psi_1} [x_{\overline{\beta}}(\pm\xi), x_\gamma(\zeta_\gamma)]$$

и, поскольку $[x_{\overline{\beta}}(\pm\xi), y] = [x_{\overline{\beta}}(\pm\xi), z_1]$ оказалось произведением корневых элементов, соответствующих корням из Ψ_{16}, оно коммутирует с $x_\beta(\xi)$. Значит,

$$\begin{aligned} z = [x_\alpha(\xi), y] &= [x_\beta(\pm\xi), y_6] \cdot [x_{\overline{\beta}}(\pm\xi), z_1] \\ &= \prod_{\gamma\in\Psi_6} [x_\beta(\pm\xi), x_\gamma(\xi_\gamma)] \prod_{\gamma\in\Psi_1} [x_{\overline{\beta}}(\pm\xi), x_\gamma(\zeta_\gamma)] \end{aligned}$$

Каждый из получившихся коммутаторов является корневым элементом вида $x_\gamma(*)$, $\gamma \in \Psi_{16}$, то есть все произведение лежит в $U_1(R_s) \cap U_6(R_s)$. Если мы покажем, что можно подобрать α так, что $z \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, то мы попадем в условие предложения 3.22 и доказательство будет закончено. Теперь вспомним, что $\xi_\gamma = 0$ для всех $\gamma \in \Psi_6$ и $\xi_\gamma = \zeta_\gamma$ для всех $\gamma \in \Psi_1 \cup \Psi_6$. Значит,

$$z = \prod_{\gamma\in\Psi_1} [x_{\overline{\beta}}(\pm\xi), x_\gamma(\xi_\gamma)]$$

Но по лемме 3.5 элемент $z = \prod_{\gamma\in\Psi_{16}} x_\gamma(\eta_\gamma)$ лежит в $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$ тогда и только тогда, когда $\eta_{\substack{12211\\1}} = \eta_{\substack{11221\\1}}$. Теперь рассмотрим все возможные α:

$$\begin{aligned}
&\alpha = 0001, \quad \overline{\beta} = \substack{00001\\0}, \quad \eta_{\substack{12211\\1}} = \pm\xi\xi_{\substack{12210\\1}}, \quad \eta_{\substack{11221\\1}} = 0;\\
&\alpha = 0011, \quad \overline{\beta} = \substack{00011\\0}, \quad \eta_{\substack{12211\\1}} = 0, \quad \eta_{\substack{11221\\1}} = \pm\xi\xi_{\substack{11210\\1}};\\
&\alpha = 0111, \quad \overline{\beta} = \substack{00111\\0}, \quad \eta_{\substack{12211\\1}} = 0, \quad \eta_{\substack{11221\\1}} = \pm\xi\xi_{\substack{11110\\1}};\\
&\alpha = 1111, \quad \overline{\beta} = \substack{00111\\1}, \quad \eta_{\substack{12211\\1}} = 0, \quad \eta_{\substack{11221\\1}} = \pm\xi\xi_{\substack{11110\\0}};\\
&\alpha = 0121, \quad \overline{\beta} = \substack{01111\\0}, \quad \eta_{\substack{12211\\1}} = \pm\xi\xi_{\substack{11100\\1}}, \quad \eta_{\substack{11221\\1}} = 0;\\
&\alpha = 1121, \quad \overline{\beta} = \substack{01111\\1}, \quad \eta_{\substack{12211\\1}} = \pm\xi\xi_{\substack{11100\\0}}, \quad \eta_{\substack{11221\\1}} = 0;\\
&\alpha = 1122, \quad \overline{\beta} = \substack{01211\\1}, \quad \eta_{\substack{12211\\1}} = \pm\xi\xi_{\substack{11000\\0}}, \quad \eta_{\substack{11221\\1}} = 0;\\
&\alpha = 1132, \quad \overline{\beta} = \substack{01221\\1}, \quad \eta_{\substack{12211\\1}} = 0, \quad \eta_{\substack{11221\\1}} = \pm\xi\xi_{\substack{10000\\0}};
\end{aligned}$$

По нашему предположению, все получающиеся z лежат в $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$. Значит, $\xi_\gamma = 0$ для всех $\gamma \in \Psi_1$, что означает, что $y \in U_1(R_s) \cap U_6(R_s)$, и мы можем применить предложение 3.22.

Предложение 3.24. *Пусть H — подгруппа в $G(\mathrm{E}_6, R)$, содержащая $E(\mathrm{F}_4, R)$. Предположим, что для некоторого $s \in R$ имеем*

$$F_s(H) \cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s) \cap U_1(R_s) \cdot U_6(R_s) \cdot T(\mathrm{E}_6, R_s) \not\subseteq \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s).$$

Тогда H содержит нетривиальный корневой элемент, соответствующий корню из $\mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$.

Доказательство. После домножения на подходящий элемент $T(\mathrm{F}_4, R_s)$ можно считать, что мы нашли элемент $y = zd \in F_s(H) \cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s) \setminus \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, где

$$z \in U_1(R_s) \cdot U_6(R_s), \quad d = h_{\substack{10000\\0}}(\varepsilon) h_{\substack{01000\\0}}(\eta)$$

для некоторых $\varepsilon, \eta \in R_s^*$.

Возьмем $\beta = \substack{10000\\0}$, $\overline{\beta} = \substack{00001\\0}$, $\alpha = 0001 \in \mathrm{F}_4$ и рассмотрим

$$\begin{aligned}
g &= [X_\alpha(\xi), y]\\
&= X_\alpha(\xi) z d x_\beta(-\xi) x_{\overline{\beta}}(-\xi) d^{-1} z^{-1}\\
&= X_\alpha(\xi) z x_\beta(-\varepsilon^2\eta\xi) x_{\overline{\beta}}(-\xi) z^{-1}
\end{aligned}$$

Посмотрим, что происходит при коммутировании z с корневым элементом $x_\beta(*)$. z является произведением корневых элементов $x_\gamma(*)$, где $\gamma \in \Psi_1 \cup \Psi_6 \cup \Psi_{16}$. Поскольку $\beta \in \Psi_1$, элемент $x_\beta(*)$ коммутирует с $x_\gamma(*)$ при всех γ таких, что $\beta + \gamma \notin \mathrm{E}_6$. Если же $\beta + \gamma \in \mathrm{E}_6$, то $\gamma \in \Psi_6$, $\beta + \gamma \in \Psi_{16}$ и $[x_\beta(*), x_\gamma(*)] = x_{\beta+\gamma}(*)$. Таким образом,

$$[z, x_\beta(*)] \in U_1(R_s) \cap U_6(R_s).$$

Аналогичными рассуждениями показывается, что

$$[z, x_{\overline{\beta}}(*)] \in U_1(R_s) \cap U_6(R_s).$$

Значит,

$$\begin{aligned} g &= X_\alpha(\xi) u x_\beta(-\varepsilon^2\eta\xi) x_{\overline{\beta}}(-\xi) z z^{-1} \\ &= u x_\beta((1-\varepsilon^2\eta)\xi) \end{aligned}$$

для некоторого $u \in U_1(R_s) \cap U_6(R_s)$.

Если $g \notin G(\mathrm{F}_4, R_s)$, мы можем применить предложение 3.23. Нетрудно видеть, что $g_{12} = (1-\varepsilon^2\eta)\xi$ и $g_{-2,-1} = 0$. Но если $g \in G(\mathrm{F}_4, R_s)$, то

$$0 = B(v^2, v^{-1}) = B(gv^2, gv^{-1}) = g_{12} - g_{-2,-1}.$$

Подставляя $\xi = 1$, получаем, что $\varepsilon^2\eta = 1$.

Теперь повторим это рассуждение для $\beta = \begin{smallmatrix}11000\\0\end{smallmatrix}$, $\overline{\beta} = \begin{smallmatrix}00011\\0\end{smallmatrix}$, $\alpha = 0011 \in \mathrm{F}_4$. На этот раз

$$\begin{aligned} g &= [X_\alpha(\xi), y] \\ &= X_\alpha(\xi) z d x_\beta(-\xi) x_{\overline{\beta}}(\xi) d^{-1} z^{-1} \\ &= X_\alpha(\xi) z x_\beta(-\varepsilon\eta\xi) x_{\overline{\beta}}(\xi) z^{-1} \end{aligned}$$

При коммутировании z с $x_\beta(*)$ и $x_{\overline{\beta}}(*)$ вновь получаются элементы из $U_1(R_s) \cap U_6(R_s)$, поэтому

$$\begin{aligned} g &= X_\alpha(\xi) u x_\beta(-\varepsilon\eta\xi) x_{\overline{\beta}}(\xi) z z^{-1} \\ &= u x_\beta((1-\varepsilon\eta)\xi) \end{aligned}$$

для некоторого $u \in U_1(R_s) \cap U_6(R_s)$.

Если $g \notin G(\mathrm{F}_4, R_s)$, мы можем применить предложение 3.23. Как и в предыдущем рассуждении, нетрудно видеть, что $g_{13} = (1-\varepsilon\eta)\xi$, $g_{-3,-1} = g_{-2,-1} = 0$. Но если $g \in G(\mathrm{F}_4, R_s)$, то

$$0 = B(v^3, v^{-1}) = B(gv^3, gv^{-1}) = g_{13} + g_{-2,-1}.$$

Подставляя $\xi = 1$, получаем, что $\varepsilon\eta = 1$. Из равенств $\varepsilon\eta = \varepsilon^2\eta = 1$ получаем, что $\varepsilon = \eta = 1$. Но это означает, что $d = 1$, $y \in U_1(R_s) \cdot U_6(R_s)$ и мы могли с самого начала применить предложение 3.23.

3.10. Извлечение корневого элемента из параболических подгрупп

Ослабление условий продолжается: в этом разделе мы извлекаем корневой элемент из параболических подгрупп (сначала из пересечения $P_1(R_s)$ и $P_6(R_s)$, а потом из $P_1(R_s)$), фактически сводя задачу к уже проведенному извлечению из унипотентных радикалов. Неформально говоря, здесь мы избавляемся от факторов Леви.

Предложение 3.25. *Пусть H — подгруппа в $G(\mathrm{E}_6, R)$, содержащая $E(\mathrm{F}_4, R)$. Предположим, что для некоторого $s \in R$ имеем*

$$F_s(H) \cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s) \cap P_1(R_s) \cap P_6(R_s) \not\subseteq \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s).$$

Тогда H содержит нетривиальный корневой элемент, соответствующий корню из $\mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$.

Доказательство. Пусть $y \in F_s(H) \cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s) \cap P_1(R_s) \cap P_6(R_s)$ и $y \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$ Выберем $\alpha \in \Sigma_1 \cap \Phi_l$, то есть длинный корень F_4 такой, что $\omega - \alpha \in \Lambda$ и рассмотрим $z = y^{-1}X_\alpha(1)y$. Заметим, что $\omega - \alpha \in \mathrm{B}$. Нетрудно видеть, что $z \in U_1(R_s) \cap U_6(R_s)$, и, если $z \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, то мы можем применить предложение 3.22. Теперь можно считать, что $z \in \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, но тогда $z \in G(\mathrm{F}_4, R_s)$. Для любого $j \in \Gamma$

$$z_{1j} = \sum_{\lambda, \lambda+\alpha \in \Lambda} c_{\lambda,\alpha} y'_{1,\lambda+\alpha} y_{\lambda,j} = c_{\omega-\alpha,\alpha} y'_{11} y_{\omega-\alpha,j},$$

поскольку для пяти остальных слагаемых множитель $y_{\lambda,j}$ обращается в 0: действительно, у четырех из остальных слагаемых $\lambda \in \Delta$, но $y_{\Delta,\Gamma} = 0$; у пятого же $\lambda = -\omega$, но $y_{-1,\Gamma} = 0$. Кроме этого,

$$z_{1,13} = \sum_{\lambda,\lambda+\alpha\in\Lambda} c_{\lambda,\alpha} y'_{1,\lambda+\alpha} y_{\lambda,13} = c_{\omega-\alpha,\alpha} y'_{11} y_{\omega-\alpha,13} = 0,$$

поскольку $y_{\Delta,13} = 0$, $y_{-1,13} = 0$ и $y_{\mathrm{B},13} = 0$. По нашему предположению $z \in G(\mathrm{F}_4, R_s)$, то есть $zu = u$, откуда $z_{1,13} - z_{1,14} + z_{1,15} = 0$. Это означает, что $c_{\omega-\alpha,\alpha} \xi y'_{11}(-y_{\omega-\alpha,14} + y_{\omega-\alpha,15}) = 0$. Поскольку $c_{\omega-\alpha,\alpha} = \pm 1$ и $y'_{11} \in R^*$, мы получаем $-y_{\omega-\alpha,14} + y_{\omega-\alpha,15} = 0$. В то же время, $y_{\omega-\alpha,13} = 0$, поскольку $\omega - \alpha \in \mathrm{B}$. Варьируя α, мы получаем, что для всех $\lambda \in \Gamma \setminus \{14, 15\}$ выполняется $y_{\lambda,13} - y_{\lambda,14} + y_{\lambda,15} = 0$.

Теперь возьмем $\alpha = 1232 \in \Phi_s$, $\beta = \begin{smallmatrix}12211\\1\end{smallmatrix} \in \mathrm{E}_6$, $\overline{\beta} = \begin{smallmatrix}11221\\1\end{smallmatrix} \in \mathrm{E}_6$ и рассмотрим

$$z = y^{-1} X_\alpha(1) y = y^{-1} x_\beta(1) x_{\overline{\beta}}(1) y.$$

Аналогично, $z \in U_1(R_s) \cap U_6(R_s)$, и можно считать, что $z \in G(\mathrm{F}_4, R_s)$. Для любого $j \in \Gamma$

$$\begin{aligned} z_{1j} &= \sum_{\lambda,\lambda+\beta\in\Lambda} c_{\lambda,\beta} y'_{1,\lambda+\beta} y_{\lambda,j} + \sum_{\lambda,\lambda+\overline{\beta}\in\Lambda} c_{\lambda,\overline{\beta}} y'_{1,\lambda+\overline{\beta}} y_{\lambda,j} \\ &= c_{\omega-\beta,\beta} y'_{11} y_{\omega-\beta,j} + c_{\omega-\overline{\beta},\overline{\beta}} y'_{11} y_{\omega-\overline{\beta},j} = -y'_{11}(y_{14,j} + y_{15,j}), \end{aligned}$$

поскольку $c_{\omega-\beta,\beta} = c_{\omega-\overline{\beta},\overline{\beta}} = -1$. Далее,

$$\begin{aligned} z_{1,13} &= \sum_{\lambda,\lambda+\beta\in\Lambda} c_{\lambda,\beta} y'_{1,\lambda+\beta} y_{\lambda,13} + \sum_{\lambda,\lambda+\overline{\beta}\in\Lambda} c_{\lambda,\overline{\beta}} y'_{1,\lambda+\overline{\beta}} y_{\lambda,13} \\ &= c_{\omega-\beta,\beta} y'_{11} y_{\omega-\beta,13} + c_{\omega-\overline{\beta},\overline{\beta}} y'_{11} y_{\omega-\overline{\beta},13} = 0. \end{aligned}$$

По нашему предположению $z \in G(\mathrm{F}_4, R_s)$, откуда $z_{1,13} - z_{1,14} + z_{1,15} = 0$ и $y'_{11}(y_{14,14} + y_{15,14} - y_{14,15} - y_{15,15}) = 0$. Обозначим $-y_{15,14} + y_{15,15} = \xi$, $y_{13,13} = \zeta$, тогда $-y_{14,14} + y_{14,15} = -\xi$. Кроме того, $y_{14,13} = y_{15,13} = 0$.

Рассмотрим блочно-диагональную матрицу g, образованную подматрицами y_{11}, y_{BB}, $y_{\Gamma\Gamma}$, $y_{13,13}$, $y_{\Delta\Delta}$, $y_{-1,-1}$. Поскольку g — часть Леви матрицы y относительно разложения Леви для параболической подгруппы $P_1(R_s) \cap P_6(R_s)$, имеем $g \in G(\mathrm{E}_6, R_s)$.

Сейчас мы покажем, что можно домножить g на некоторую диагональную матрицу из $G(\mathrm{E}_6, R_s)$ так, чтобы результат оказался в $G(\mathrm{F}_4, R_s)$. Посмотрим на вектор gu. По построению матрицы g имеем

$$(gu)_\lambda = g_{\lambda,13} - g_{\lambda,14} + g_{\lambda,15} = 0 \text{ для } \lambda \in \mathrm{B} \cup \Delta \cup \{1, -1\}.$$

Кроме того,

$$(gu)_\lambda = g_{\lambda,13} - g_{\lambda,14} + g_{\lambda,15} = y_{\lambda,13} - y_{\lambda,14} + y_{\lambda,15} = 0 = ru_\lambda \text{ для } \lambda \in \Gamma \setminus \{14, 15\}.$$

Наконец,

$$(gu)_{13} = g_{13,13} - g_{13,14} + g_{13,15} = y_{13,13} = \zeta$$
$$(gu)_{14} = g_{14,13} - g_{14,14} + g_{14,15} = y_{14,13} - y_{14,14} + y_{14,15} = -\xi$$
$$(gu)_{15} = g_{15,13} - g_{15,14} + g_{15,15} = y_{15,13} - y_{15,14} + y_{15,15} = \xi$$

Заметим, что $\zeta \in R_s^*$. Посмотрим внимательнее на обратимую матрицу $g_{\Gamma\Gamma} = y_{\Gamma\Gamma}$. Вычтем из столбца $y_{\Gamma,15}$ столбец $y_{\Gamma,14}$. Полученная матрица тоже обратима, и в ее столбце с номером 15 все элементы равны 0, кроме двух: $-\xi$ на позиции 14 и ξ на позиции 15. Значит, $\xi \in R_s^*$.

Итак, мы показали, что

$$gu = \zeta v^{13} - \xi v^{14} + \xi v^{15}, \text{ где } \xi, \zeta \in R_s^*.$$

Теперь уже нетрудно «подправить» g на диагональную матрицу из $G(\mathrm{E}_6, R_s)$ так, чтобы она попала в $G(\mathrm{F}_4, R_s)$. Заметим сначала, что

$$-1 = Q(u) = Q(gu) = -\zeta\xi^2,$$

откуда $\zeta = \xi^{-2}$. Рассмотрим теперь произведение весовых элементов

$$h = h_{\beta_6}(\xi^2) h_{\beta_5}(\xi).$$

Нетрудно видеть, что $hgu = u$, то есть $hg \in G(\mathrm{F}_4, R_s)$. Рассмотрим произведение $y(hg)^{-1}$ Кроме того, произведение $y(hg)^{-1}$ лежит в $T \cdot U_1(R_s) \cdot U_6(R_s)$, и в то же время $y(hg)^{-1} \in F_s(H) \cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$ и $y(hg)^{-1} \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$. Значит, мы можем применить предложение 3.24; доказательство окончено.

Предложение 3.26. *Пусть H — подгруппа в $G(\mathrm{E}_6, R)$, содержащая $E(\mathrm{F}_4, R)$. Предположим, что для некоторого $s \in R$ имеем*

$$F_s(H) \cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s) \cap P_1(R_s) \not\subseteq \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s).$$

Тогда H содержит нетривиальный корневой элемент, соответствующий корню из $\mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$.

Доказательство. Пусть $y \in F_s(H) \cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s) \cap P_1(R_s)$ и $y \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$. Как и в доказательстве предыдущего предложения, выберем $\alpha \in \Sigma_1 \cap \Phi_l$, то есть длинный корень F_4 такой, что $\omega - \alpha \in \Lambda$ и рассмотрим $z = y^{-1} X_\alpha(1) y$. Нетрудно видеть, что $z \in U_1$. Если $z \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, то мы можем применить предложение 3.23. Если же $z \in \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, то на самом деле $z \in G(\mathrm{F}_4, R_s)$. В таком случае $B(zv^i, zv^j) = B(v^i, v^j)$ для всех $i, j \in \Lambda$. В частности, для $i \in \mathrm{B}$ и $j = -\omega$ мы получаем, что $B(z_{*i}, z_{*,-1}) = 0$. Это означает, что $z_{1i} z_{-1,-1} + z_{ii} z_{-i,-1} = 0$. Но $z_{-1,-1} = 1$ и $z_{-i,-1} = 0$, поскольку $-i \in \Delta$. Получаем, что $z_{1i} = 0$. Но

$$z_{1i} = \sum_{\lambda, \lambda+\alpha \in \Lambda} \pm y'_{1,\lambda+\alpha} y_{\lambda,i}$$

Нетрудно видеть, что любой корень $\alpha \in \Sigma_1 \cap \Phi_l$ совершает одно прибавление от веса $\omega - \alpha \in \Gamma$ к весу ω, четыре прибавления от каких-то весов из группы Δ и одно прибавление от $-\omega$ Поскольку y лежит в P_1, последние пять прибавлений ничего не дают: для них $y_{\lambda,i} = 0$, и $z_{1i} = \pm y'_{11} y_{\omega-\alpha,i}$. Кроме этого, элемент y'_{11} обратим. Отсюда $y_{\omega-\alpha,i} = 0$.

Теперь рассмотрим *короткий* корень $\alpha = 1232$. Корневой элемент $X_\alpha(1)$ является произведением двух корневых элементов E_6, а именно, $X_\alpha(1) = x_{\substack{11221\\1}}(1) x_{\substack{12211\\1}}(1)$, оба из которых лежат в U_1. Поэтому к нему применимы такие же рассуждения, и мы получаем $y_{14,i} + y_{15,i} = 0$ для всех $i \in \mathrm{B}$.

Получаем, что если $v = y_{*i}$ — столбец матрицы y с номером $i \in \mathrm{B}$, то мы находимся в условиях леммы 3.3 и, следовательно, $v_{14} = v_{15} = 0$. Таким образом, $y_{ij} = 0$ для всех $i \in \Gamma$, $j \in \mathrm{B}$.

Возьмем $i \in \Gamma$, $j \in \Delta$ и применим уравнения на матрицу z к *строкам* z_{i*} и $z_{-j,*}$. Эти уравнения означают, что $B(z_{i*}, z_{-j,*}) = 0$. Так как в строке $z_{-j,*}$ все коэффициенты на позициях из $\mathrm{B} \cup \Gamma \cup \{\lambda_{13}\}$, кроме $z_{-j,-j} = 1$, равны нулю, это уравнение превращается в $z_{ij} = 0$. Но $z_{ij} = \sum \pm y'_{i,\lambda+\alpha} y_{\lambda,j} = \pm y'_{i,-\omega+\alpha} y_{-\omega,j}$, поскольку мы уже знаем, что $y'_{i,\lambda+\alpha} = 0$ для $i \in \Gamma$, $\lambda + \alpha \in \{\omega\} \cup \mathrm{B}$. Но $-\omega + \alpha \in \Gamma$, и строка $y'_{i,\lambda_{-1}+\alpha}$ (i пробегает Γ) является строкой обратимой матрицы $y'_{\Gamma\Gamma}$, поэтому $y_{-1,j} = 0$.

Теперь посмотрим на столбец $z_{*,13}$. Для $i \in \{6, 11, 12, -12, -11, -6\}$ имеем $B(z_{*,13}, z_{*,-i}) = 0$, откуда $z_{i,13} = 0$. Наконец, $B(z_{*,13}, z_{*,14}) = 1$, откуда $z_{13,13} + z_{15,13} = 1$, значит, $z_{15,13} = 0$. Аналогично, $B(z_{*,13}, z_{*,15}) = -1$, откуда $-z_{13,13} + z_{14,13} = -1$, значит, $z_{14,13} = 0$. Мы доказали, что $z_{i,13} = 0$ для всех $i \in \mathrm{B}$. Теперь можно повторить вычисление из предыдущего абзаца, положив $j = 13$: получим, что $y_{-1,13} = 0$. Значит, последняя строка матрицы y пропорциональна последней строке единичной матрицы, откуда $y \in P_1 \cap P_6$, и мы можем применить предложение 3.25.

3.11. Извлечение корневого элемента: окончание

Нам осталось попасть в параболическую подгруппу; но над локальным кольцом орбиты действия $G(\mathrm{F}_4, R)$ и $G(\mathrm{E}_6, R)$ не совпадают (поскольку рассматриваемое представление F_4 приводимо), поэтому сначала нам приходится провести еще одно ослабление условий и потребовать наличие нетривиального элемента в произведении параболической подгруппы на некоторый корневой элемент E_6.

Предложение 3.27. *Пусть H — подгруппа в $G(\mathrm{E}_6, R)$, содержащая $E(\mathrm{F}_4, R)$. Предположим, что для некоторого $s \in R$ найдется элемент $g \in F_s(H) \cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$ такой, что $g \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$ и первый столбец g совпадает с первым столбцом единичной матрицы во всех позициях, кроме, быть может, λ_{15}. Тогда H содержит нетривиальный корневой элемент, соответствующий корню из $\mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$.*

Доказательство. Обозначим $a = g_{15,1}$ и рассмотрим $h = x_{-\substack{11221\\1}}(a)g$. Нетрудно видеть, что h лежит в параболической подгруппе $P_1(R_s)$. Выберем $\alpha \in \mathrm{F}_4$, $\xi \in R$ и рассмотрим

$$z = X_\alpha(\xi)^g = g^{-1}X_\alpha(\xi)g = h^{-1}x_{-\substack{11221\\1}}(a)X_\alpha(\xi)x_{-\substack{11221\\1}}(-a)h.$$

Предположим также, что $\alpha = {*}{*}{*}1 \in \Phi_s$; тогда $X_\alpha(\xi) = x_{\alpha'}(\xi)x_{\alpha''}(\pm\xi)$, где $\alpha' = \substack{1{*}{*}{*}0\\ *}$, $\alpha'' = \substack{0{*}{*}{*}1\\ *}$ — корни E_6. Потребуем дополнительно $\alpha' - \substack{11221\\1} \in \mathrm{E}_6$ и $\alpha'' - \substack{11221\\1} \notin \mathrm{E}_6$ (на самом деле эти два условия равносильны). Тогда

$$\begin{aligned}
x_{-\substack{11221\\1}}(a)X_\alpha(\xi)x_{-\substack{11221\\1}}(-a) &= x_{-\substack{11221\\1}}(a)x_{\alpha'}(\xi)x_{\alpha''}(\pm\xi)x_{-\substack{11221\\1}}(-a)\\
&= x_{-\substack{11221\\1}}(a)x_{\alpha'}(\xi)x_{-\substack{11221\\1}}(-a)x_{\alpha''}(\pm\xi)\\
&= x_{\alpha'}(\xi)[x_{\alpha'}(-\xi), x_{-\substack{11221\\1}}(a)]x_{\alpha''}(\pm\xi)\\
&= x_{\alpha'}(\xi)x_{\alpha'-\substack{11221\\1}}(\pm a\xi)x_{\alpha''}(\pm\xi).
\end{aligned}$$

Поскольку $\alpha' - \substack{11221\\1}$ имеет вид $-\substack{0{*}{*}{*}{*}\\ *}$, все произведение лежит в $P_1(R_s)$. Значит, $z \in P_1(R_s)$ и, если $z \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, можно применить предложение 3.26.

Если же $z \in \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, то $z \in G(\mathrm{F}_4, R_s)$ и по лемме 3.6 на самом деле $z \in P_1(R_s) \cap P_6(R_s)$. Кроме того, $z_{11} = z_{-1,-1} = 1$. Значит, последняя строка z совпадает с последней строкой единичной матрицы. Пусть $w = h'_{-1,*} \in {}^{27}R$ — последняя строка матрицы h^{-1}. Имеет место равенство $zh^{-1} = h^{-1}x_{\alpha'}(\xi)x_{\alpha'-\substack{11221\\1}}(\pm a\xi)x_{\alpha''}(\pm\xi)$. В левой части его стоит матрица, последняя строка которой совпадает с w. В правой же части стоит матрица $h^{-1}(e+\xi e_{\alpha'} \pm a\xi e_{\alpha'-\substack{11221\\1}} \pm \xi e_{\alpha''})$. Значит, последняя строка матрицы $h^{-1}(\xi e_{\alpha'} \pm a\xi e_{\alpha'-\substack{11221\\1}} \pm \xi e_{\alpha''})$ — нулевая, то есть $w(\xi e_{\alpha'} \pm a\xi e_{\alpha'-\substack{11221\\1}} \pm \xi e_{\alpha''}) = 0$. Теперь воспользуемся явными формулами: $(we_\gamma)_\lambda = \pm w_{\lambda+\gamma}$, если $\lambda + \gamma \in \Lambda$; $(we_\gamma)_\lambda = 0$, если $\lambda + \gamma \notin \Lambda$. Подставляя $\xi = 1$, $\alpha = 0001$, 0121, 1121, 1221 и рассматривая $w(\xi e_{\alpha'} \pm a\xi e_{\alpha'-\substack{11221\\1}} \pm \xi e_{\alpha''})_\lambda$ для $\lambda = \lambda_{-1}$ и $\lambda = \lambda_{-10}$, получаем, что $w_{-1} = w_{-5} = w_{-8} = w_{-9} = w_{13} = 0$. Кроме этого, подставляя $\xi = 1$, $\alpha = 1221$, $\lambda = \lambda_{-3}$, получаем, что $aw_{-1} = 0$

Теперь выберем $\alpha = ***0 \in \Phi_l$ и проведем аналогичное рассуждение: сейчас $X_\alpha(\xi) = x_\alpha(\xi)$, где $\alpha = \substack{0***0\\ *} \in \mathrm{E}_6$. При этом автоматически $\alpha - \substack{11221\\ 1} \notin \mathrm{E}_6$. Тогда $x_{-\substack{11221\\ 1}}(a) X_\alpha(\xi) x_{-\substack{11221\\ 1}}(-a) = x_\alpha(\xi)$ и матрица z снова лежит в $P_1(R_s)$. Если $z \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, то можно применить предложение 3.26. Если же $z \in \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, то $z \in G(\mathrm{F}_4, R_s)$ и (по лемме 3.6) $z \in P_1(R_s) \cap P_6(R_s)$, причем $z_{11} = z_{-1,-1} = 1$, то есть последняя строка z совпадает с последней строкой единичной матрицы. Поскольку $zh^{-1} = h^{-1} x_\alpha(\xi)$, мы имеем $w = w x_\alpha(\xi)$ и, следовательно, $w e_\alpha = 0$ (можно подставить $\xi = 1$). Значит, $w_{\lambda+\alpha} = 0$, если $\lambda, \lambda + \alpha \in \Lambda$. Подставляя $\alpha = \pm 1000$, ± 0100, ± 0120, получаем, что $w_{-3} = w_{-4} = w_{-7} = w_{-10} = 0$.

Итак, мы получили, что все элементы последней строки w матрицы h^{-1} равны 0, кроме $h'_{-1,-1}$ и, кроме этого, $ah'_{-1,-1} = 0$. Но матрица h^{-1} обратима, поэтому $h'_{-1,-1} \in R^*$, откуда $a = 0$ и, значит, мы с самого начала были в условиях предложения 3.26.

Если R — локальное кольцо, то сингулярные векторы из R^{27} образуют одну орбиту под действием $E(\mathrm{E}_6, R)$. Следующее утверждение фактически описывает орбиты, на которые она распадается при сужении группы действия до $E(\mathrm{F}_4, R)$.

Предложение 3.28. *Пусть R — локальное кольцо и $g \in G(\mathrm{E}_6, R)$. Тогда найдется элемент $x \in E(\mathrm{F}_4, R)$ такой, что первый столбец матрицы xg совпадает с первым столбцом единичной матрицы во всех позициях, кроме, быть может, λ_{15}.*

Доказательство. Пусть M — максимальный идеал кольца R. Покажем сначала, что найдется $x_1 \in E(\mathrm{F}_4, R)$ такой, что $(x_1 g)_{11} = 1$

Поскольку R локально, найдется $\lambda \in \Lambda$ такой, что $g_{\lambda 1}$ обратим. Рассмотрим несколько случаев:

- $\lambda \in \mathrm{B}$. Обозначим $\alpha = \omega - \lambda \in \Phi_s$ и рассмотрим элемент

$$h = X_\alpha((1 - g_{11}) g_{\lambda 1}^{-1}) g.$$

При этом $X_\alpha(\xi) = x_{\alpha'}(\xi)x_{\alpha''}(\pm\xi)$, где $\alpha' = \substack{1{*}{*}{*}0\\ *}, \alpha'' = \substack{0{*}{*}{*}1\\ *}$. Тогда $h_{11} = g_{11} \pm (1 - g_{11})g_{\lambda 1}^{-1}g_{\lambda 1}$. Заменяя знак в аргументе X_α, если необходимо, можно добиться $h_{11} = 1$.

- $\lambda \in \Gamma \setminus \{\lambda_{14}, \lambda_{15}\}$. Точно так же обозначим $\alpha = \omega - \lambda$ (теперь $\alpha \in \Phi_l$) и рассмотрим элемент $h = X_\alpha((1-g_{11})g_{\lambda 1}^{-1})g$. Как и в предыдущем случае, при необходимости меняя знак аргумента X_α, получаем $h_{11} = 1$.

- $\lambda = \lambda_1$. Сначала получим 1 в позиции 10 первого столбца: положим $\alpha = \lambda_{10} - \lambda_1 = 1231 \in \Phi_s$ и $h = X_\alpha((1 - g_{10,1})g_{11}^{-1})g$. При необходимости меняя знак аргумента, получаем $h_{10,1} = 1$, и можно воспользоваться уже рассмотренным случаем (1).

- $\lambda = \lambda_{-1}$. Сейчас нетрудно получить 1 в позиции -6: положим $\alpha = \lambda_{-6} - \lambda_{-1} = 0122 \in \Phi_l$, $h = X_\alpha((1-g_{-6,1})g_{-1,1}^{-1})g$, и, с возможной заменой знака, получаем $h_{-6,1} = 1$, что приводит нас к уже рассмотренному случаю (2).

- $\lambda \in \Delta$. Аналогично, нетрудно подобрать $\alpha \in \Phi_l$ такой, что $\lambda + \alpha \in \mathrm{B}$; например, можно взять $\alpha = 0122$ для $\lambda \in \{\lambda_{-10}, \lambda_{-9}, \lambda_{-8}, \lambda_{-7}\}$ и $\alpha = 2342$ для $\lambda \in \{\lambda_{-5}, \lambda_{-4}, \lambda_{-3}, \lambda_{-2}\}$. Рассмотрим после этого $h = X_\alpha((1 - g_{\lambda+\alpha,1})g_{\lambda,1}^{-1})g$. Заменив при необходимости знак, получаем $h_{\lambda+\alpha,1} = 1$, и можно воспользоваться случаем (1).

- Теперь можно считать, что $g_{\lambda,1} \in M$ для всех $\lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{15}\}$. Заметим, что элементы $g_{13,1}$, $g_{14,1}$, $g_{15,1}$ не могут быть одновременно обратимыми: иначе $Q(g_{*1})$ сравнимо с $\pm g_{13,1}g_{14,1}g_{15,1}$ по модулю M, то есть, обратимо; но, с другой стороны, столбец g_{*1} сингулярен, поэтому $Q(g_{*1}) = 0$. Предположим, что $g_{14,1} \in R^*$. Нам известно, что хотя бы один из элементов $g_{13,1}$, $g_{15,1}$ лежит в M. Пусть, например, $g_{13,1} \in M$. Рассмотрим $\alpha = 0001 \in \Phi_s$, $\xi = (1 - g_{10,1})g_{14,1}^{-1}$ и $h = X_\alpha(\xi)$. Поскольку $X_\alpha(\xi) = x_{\substack{10000\\0}}(\xi)x_{\substack{00001\\0}}(\pm\xi)$, мы имеем $h_{10,1} = g_{10,1} \pm \xi g_{14,1} \pm \xi g_{13,1} =$

$g_{10,1} \pm (1 - g_{10,1}) \pm \xi g_{13,1}$. При необходимости меняя знак у ξ, можно добиться того, что $h_{10,1} = 1 \pm \xi g_{13,1} \in R^*$, поскольку $g_{13,1} \in M$, и мы можем попали в условия случая (1). Аналогично, если $g_{15,1} \in M$, достаточно взять $\alpha = 0010 \in \Phi_s$ и $\xi = (1 - g_{12,1})g_{14,1}^{-1}$; тогда $h_{12,1} \in R^*$, где $h = X_\alpha(\pm\xi)g$, и мы попали в условия случая (2). Совершенно так же рассматривается случай $g_{14,1} \in M$, ибо хотя бы один из элементов $g_{13,1}$, $g_{15.1}$ обратим.

Итак, теперь у нас есть $x_1 \in E(\mathrm{F}_4, R)$ и $y = x_1 g$ такой, что $y_{11} = 1$. Покажем, что можно осуществить прибавления от первого элемента первого столбца вниз так, чтобы поставить 0 во все позиции кроме, быть может, λ_{15}. Сначала получим 0 в позициях из В: положим $x_2 = \prod_{\lambda \in \mathrm{B}} X_{\lambda-\omega}(\pm y_{\lambda 1})$ и $z = x_2 y$. Знаки здесь следует выбрать так, чтобы элемент $X_{\lambda-\omega}(\pm y_{\lambda 1})$ осуществлял *вычитание* с коэффициентом y_{λ_1} первой строчки из строчки с номером λ при действии на матрицах слева. Другими словами, нам нужно, чтобы матричный элемент $(X_{\lambda-\omega}(\pm y_{\lambda 1}))_{\lambda 1}$ равнялся $-y_{\lambda 1}$, а не $y_{\lambda 1}$. Легко видеть, что $z_{\lambda 1} = 0$ для всех $\lambda \in B$.

Теперь можно поставить 0 во все позиции из Г, кроме λ_{14} и λ_{15}: рассмотрим $x_3 = \prod_{\lambda \in \Gamma} X_{\lambda-\omega}(\pm z_{\lambda 1})$ и $u = x_3 z$ с аналогичным выбором знаков.

Если теперь $u_{14,1} \neq 0$, рассмотрим $x_4 = X_{1232}(\pm u_{14,1})$ и $v = x_4 u$. Можно выбрать знак так, что $v_{14,1} = 0$.

Таким образом, мы нашли x такой, что $(xg)_{11} = 1$ и $(xg)_{\lambda 1} = 0$ для $\lambda \in (\mathrm{B} \cup \Gamma) \setminus \{\lambda_{15}\}$. По лемме 3.4 из этого следует, что и на остальных местах первого столбца стоят нули.

3.12. Доказательство теоремы C

Следующая лемма резюмирует проведенное выше извлечение корневого элемента.

Лемма 3.29. *Пусть H — подгруппа в $G(\mathrm{E}_6, R)$, содержащая $E(\mathrm{F}_4, R)$. Тогда либо $H \leq \overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$, либо H содержит нетривиальный элементарный* *корневой элемент* $x_\alpha(\xi)$, *где* $\alpha \in \mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$, $\xi \in R$.

Доказательство. Пусть $g \in H$, но $g \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$. Тогда по лемме 3.8 найдется максимальный идеал $M \in \mathrm{Max}(R)$ такой, что $F_M(g) \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_M)$. Поскольку R_M — локальное кольцо, по предложению 3.28 найдется элемент $x \in E(\mathrm{F}_4, R_M)$ такой, что первый столбец матрицы $xF_M(g)$ совпадает с первым столбцом единичной матрицы во всех позициях, кроме λ_{15}. Так как $E(\mathrm{F}_4, R_M) = \varinjlim E(\mathrm{F}_4, R_s)$ по всем $s \notin M$, найдется такое $s \in M$ и такой элемент $x \in E(\mathrm{F}_4, R_s)$, что первый столбец матрицы $y = xF_s(g)$ совпадает с первым столбцом единичной матрицы во всех позициях, кроме λ_{15} и, конечно, $y \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$. Теперь можно воспользоваться предложением 3.27 и завершить доказательство.

Доказательство теоремы C Пусть, как и в предложении 3.14, A — наибольший идеал, для которого $\mathrm{E}(\mathrm{F}_4, R, A) \le H$. Пусть $\overline{H} = \rho_A^{\mathrm{E}_6}(H)$ — образ группы H под действием гомоморфизма редукции $\rho_A^{\mathrm{E}_6} : G(\mathrm{E}_6, R) \to G(\mathrm{E}_6, R/A)$. Ясно, что группа $\overline{H}$ содержит $E(\mathrm{F}_4, R/A)$, и, применяя к ней лемму 3.29, видим, что либо $\overline{H} \le \overline{G}(\mathrm{F}_4, R, A)$, либо $\overline{H}$ содержит нетривиальный элементарный корневой элемент $x_\alpha(\xi + A)$, где $\alpha \in \mathrm{E}_6 \setminus \mathrm{F}_4$, $\xi \in R$. Покажем, что второй случай невозможен. Действительно, представим $x_\alpha(\xi) \in H\ G(\mathrm{F}_4, R, A)$ в виде $x_\alpha(\xi) = ab$, где $a \in H$, $b \in G(\mathrm{F}_4, R, A)$. Найдется корень $\beta \in \mathrm{E}_6 \setminus \mathrm{F}_4$ такой, что $\beta - \alpha \in \mathrm{F}_4$. Рассмотрим коммутатор

$$[x_\alpha(\xi), x_{\beta-\alpha}(1)] = x_\beta(\pm\xi).$$

Подставляя сюда выражение $x_\alpha(\xi) = ab$, получаем

$$x_\beta(\pm\xi) = [ab, x_{\beta-\alpha}(1)] = {}^a[b, x_{\beta-\alpha}(1)][a, x_{\beta-\alpha}(1)].$$

Первый из коммутаторов в правой части принадлежит $E(\mathrm{E}_6, R, A)$ в силу стандартной коммутационной формулы, а второй лежит в H. Значит, $x_\beta(\pm\xi) \in H$, и $\xi \notin A$, что противоречит максимальности A. Таким образом, всегда $\overline{H} \leq \overline{G}(\mathrm{F}_4, R/A)$, но тогда из предложения 3.15 следует включение

$$H \leq (\rho_A^{\mathrm{E}_6})^{-1}(\overline{G}(\mathrm{F}_4, R/A)) = \mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A) = N_G(\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)),$$

которое завершает доказательство.

Список литературы

[1] *Борель А.* Свойства и линейные представления групп Шевалле // Семинар по алгебраическим группам. — М., 1973. — С. 9–59.

[2] *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Главы IV-VI. — М.: Мир, 1972. — С. 1–334.

[3] *Вавилов Н. А.* Как увидеть знаки структурных констант? // *Алгебра и Анализ.* — 2007. — Т. 19, № 4. — С. 34–68.

[4] *Вавилов Н. А.* Весовые элементы групп Шевалле // *Алгебра и Анализ.* — 2008. — Т. 20, № 1. — С. 34–85.

[5] *Вавилов Н. А., Гаврилович М. Р.* A_2-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов E_6 и E_7 // *Алгебра и Анализ.* — 2004. — Т. 16, № 4. — С. 54–87.

[6] *Вавилов Н. А., Гаврилович М. Р., Николенко С. И.* Строение групп Шевалле: доказательство из книги // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2006. — Т. 330. — С. 36–76.

[7] *Вавилов Н. А., Лузгарев А. Ю.* Нормализатор группы Шевалле типа E_6 // *Алгебра и Анализ.* — 2007. — Т. 19, № 5. — С. 35–62.

[8] *Вавилов Н. А., Лузгарев А. Ю., Певзнер И. М.* Группа Шевалле типа E_6 в 27-мерном представлении // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2006. — Т. 338. — С. 5–68.

[9] *Вавилов Н. А., Николенко С. И.* A_2-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов F_4 и ${}^2\mathrm{E}_6$ // *Алгебра и Анализ.* — готовится к печати.

[10] *Вавилов Н. А., Петров В. А.* О надгруппах $\mathrm{Ep}(n, R)$ // *Алгебра и Анализ.* — 2003. — Т. 15, № 3. — С. 72–114.

[11] *Вавилов Н. А., Петров В. А.* О надгруппах $\mathrm{EO}(n, R)$ // *Алгебра и Анализ.* — 2007. — Т. 19, № 2. — С. 10–51.

[12] *Вавилов Н. А., Плоткин Е. Б., Степанов А. В.* Вычисления в группах Шевалле над коммутативными кольцами // *Докл. АН. СССР.* — 1990. — Vol. 40, no. 1. — Pp. 145–147.

[13] *Лузгарев А. Ю.* О надгруппах $E(\mathrm{E}_6, R)$ и $E(\mathrm{E}_7, R)$ в минимальных представлениях // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2004. — Т. 319. — С. 216–243.

[14] *Хамфри Д.* Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. — М.: МЦНМО, 2003. — С. 1–213.

[15] *Шевалле К.* О некоторых простых группах // *Математика, период. сб. перев. ин. статей.* — 1958. — Т. 2, № 1. — С. 3–58.

[16] *Abe E., Suzuki K.* On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // *Tôhoku Math. J. (2).* — 1976. — Vol. 28, no. 2. — Pp. 185–198.

[17] *Aschbacher M.* Finite simple groups and their subgroups // Group theory, Beijing 1984. — Berlin: Springer, 1–57. — Vol. 1185 of *Lecture Notes in Math.*

[18] *Aschbacher M.* On the maximal subgroups of the finite classical groups // *Invent. Math.* — 1984. — Vol. 76, no. 3. — Pp. 469–514.

[19] *Aschbacher M.* Subgroup structure of finite groups // Proceedings of the Rutgers group theory year, 1983–1984 (New Brunswick, N.J., 1983–1984). — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. — Pp. 35–44.

[20] *Aschbacher M.* Some multilinear forms with large isometry groups // *Geom. Dedicata.* — 1988. — Vol. 25, no. 1-3. — Pp. 417–465.

[21] *Bak A.* Nonabelian K-theory: the nilpotent class of K_1 and general stability // *K-Theory.* — 1991. — Vol. 4, no. 4. — Pp. 363–397.

[22] *Bak A., Vavilov N.* Normality for elementary subgroup functors // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1995. — Vol. 118, no. 1. — Pp. 35–47.

[23] *Bak A., Vavilov N.* Structure of hyperbolic unitary groups. I. Elementary subgroups // *Algebra Colloq.* — 2000. — Vol. 7, no. 2. — Pp. 159–196.

[24] *Berman S., Moody R. V.* Extensions of Chevalley groups // *Israel J. Math.* — 1975. — Vol. 22, no. 1. — Pp. 42–51.

[25] *Burgoyne N., Williamson C.* Some computations involving simple lie algebras // Symposium on Symbolic and algebraic manipulation. — New York: Ass. Comp. Mach., 1971. — Pp. 162–171.

[26] *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. — John Wiley & Sons, London-New York-Sydney, 1972. — Pp. viii+331. — Pure and Applied Mathematics, Vol. 28.

[27] *Chevalley C.* Certains schémas de groupes semi-simples // Séminaire Bourbaki. — 1960–1961. — Vol. Exp. 219. — Pp. 1–16.

[28] *Demazure M.* Schémas en groupes réductifs // *Bull. Soc. Math. France.* — 1965. — Vol. 93. — Pp. 369–413.

[29] *Demazure M., Grothendieck A.* Schémas en groupes. I, II, III. — 1971. — Vol. 151, 152, 153 of *Lecture Notes Math.*

[30] *Dye R. H.* Interrelations of symplectic and orthogonal groups in characteristic two // *J. Algebra.* — 1979. — Vol. 59, no. 1. — Pp. 202–221.

[31] *Dye R. H.* Maximal subgroups of $\mathrm{GL}_{2n}(K)$, $\mathrm{SL}_{2n}(k)$, $\mathrm{PGL}_{2n}(K)$ and $\mathrm{PSL}_{2n}(k)$ // *J. Algebra.* — 1980. — Vol. 66, no. 1. — Pp. 1–11.

[32] *Dye R. H.* On the maximality of the orthogonal groups in the symplectic groups in characteristic two // *Math. Z.* — 1980. — Vol. 172, no. 3. — Pp. 203–212.

[33] *Hazrat R.* Dimension theory and nonstable K_1 of quadratic modules // *K-Theory.* — 2002. — Vol. 27, no. 4. — Pp. 293–328.

[34] *Hazrat R., Vavilov N.* K_1 of Chevalley groups are nilpotent // *J. Pure Appl. Algebra.* — 2003. — Vol. 179, no. 1-2. — Pp. 99–116.

[35] *King O.* On subgroups of the special linear group containing the special orthogonal group // *J. Algebra.* — 1985. — Vol. 96, no. 1. — Pp. 178–193.

[36] *King O.* On subgroups of the special linear group containing the special unitary group // *Geom. Dedicata.* — 1985. — Vol. 19, no. 3. — Pp. 297–310.

[37] *Kleidman P., Liebeck M.* The subgroup structure of the finite classical groups. — Cambridge: Cambridge University Press, 1990. — Vol. 129 of *London Mathematical Society Lecture Note Series.* — Pp. x+303.

[38] *Li S. Z.* Overgroups of $\mathrm{SU}(n, K, f)$ or $\Omega(n, K, Q)$ in $\mathrm{GL}(n, K)$ // *Geom. Dedicata.* — 1990. — Vol. 33, no. 3. — Pp. 241–250.

[39] *Li S. Z.* Overgroups of a unitary group in $\mathrm{GL}(2, K)$ // *J. Algebra.* — 1992. — Vol. 149, no. 2. — Pp. 275–286.

[40] *Li S. Z.* Overgroups in $\mathrm{GL}(n, F)$ of a classical group over a subfield of F // *Algebra Colloq.* — 1994. — Vol. 1, no. 4. — Pp. 335–346.

[41] *Liebeck M. W.* Subgroups of exceptional groups // Algebraic groups and their representations (Cambridge, 1997). — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. — Vol. 517 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.* — Pp. 275–290.

[42] *Liebeck M. W., Seitz G. M.* Maximal subgroups of exceptional groups of Lie type, finite and algebraic // *Geom. Dedicata.* — 1990. — Vol. 35, no. 1-3. — Pp. 353–387.

[43] *Liebeck M. W., Seitz G. M.* On the subgroup structure of classical groups // *Invent. Math.* — 1998. — Vol. 134, no. 2. — Pp. 427–453.

[44] *Liebeck M. W., Seitz G. M.* On the subgroup structure of exceptional groups of Lie type // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1998. — Vol. 350, no. 9. — Pp. 3409–3482.

[45] *Matsumoto H.* Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés // *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4).* — 1969. — Vol. 2. — Pp. 1–62.

[46] *Mizuno K.* The conjugate classes of Chevalley groups of type E_6 // *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* — 1977. — Vol. 24, no. 3. — Pp. 525–563.

[47] *Mizuno K.* The conjugate classes of unipotent elements of the Chevalley groups E_7 and E_8 // *Tokyo J. Math.* — 1980. — Vol. 3, no. 2. — Pp. 391–461.

[48] *Petrov V.* Overgroups of unitary groups // *K-Theory.* — 2003. — Vol. 29, no. 3. — Pp. 147–174.

[49] *Plotkin E., Semenov A., Vavilov N.* Visual basic representations: an atlas // *Internat. J. Algebra Comput.* — 1998. — Vol. 8, no. 1. — Pp. 61–95.

[50] *Ree R.* A family of simple groups associated with the simple Lie algebra of type F_4 // *Amer. J. Math.* — 1961. — Vol. 83. — Pp. 401–420.

[51] *Ree R.* A family of simple groups associated with the simple Lie algebra of type G_2 // *Amer. J. Math.* — 1961. — Vol. 83. — Pp. 432–462.

[52] *Ree R.* Construction of certain semi-simple groups // *Canad. J. Math.* — 1964. — Vol. 16. — Pp. 490–508.

[53] *Seitz G. M.* Maximal subgroups of exceptional groups // Classical groups and related topics (Beijing, 1987). — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1989. — Vol. 82 of *Contemp. Math.* — Pp. 143–157.

[54] *Seitz G. M.* Maximal subgroups of exceptional algebraic groups // *Mem. Amer. Math. Soc.* — 1991. — Vol. 90, no. 441. — Pp. iv+197.

[55] *Seitz G. M.* Maximal subgroups of finite exceptional groups // Groups and geometries (Siena, 1996). — Basel: Birkhäuser, 1998. — Trends Math. — Pp. 155–161.

[56] *Seitz G. M.* Topics in the theory of algebraic groups // Group representation theory. — EPFL Press, Lausanne, 2007. — Pp. 355–404.

[57] *Shoji T.* The conjugacy classes of Chevalley groups of type F_4 over finite fields of characteristic $p \neq 2$ // *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* — 1974. — Vol. 21. — Pp. 1–17.

[58] *Stein M. R.* Stability theorems for K_1, K_2 and related functors modeled on Chevalley groups // *Japan. J. Math. (N.S.).* — 1978. — Vol. 4, no. 1. — Pp. 77–108.

[59] *Steinberg R.* Générateurs, relations et revêtements de groups algébriques // Colloq. Théorie des Groupes Algébriques (Bruxelles, 1962). — Librairie Universitaire, Louvain, 1962. — Pp. 113–127.

[60] *Stepanov A., Vavilov N.* Decomposition of transvections: a theme with variations // *K-Theory.* — 2000. — Vol. 19, no. 2. — Pp. 109–153.

[61] *Taddei G.* Normalité des groupes élémentaire dans les groupes de Chevalley sur un anneau // Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983). — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1986. — Vol. 55 of *Contemp. Math.* — Pp. 693–710.

[62] *Tits J.* Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples // *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* — 1966. — Vol. 31. — Pp. 21–58.

[63] *Tits J.* Systèmes générateurs de groupes de congruence // *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B.* — 1976. — Vol. 283, no. 9. — Pp. Ai,A693–A695.

[64] *Vaserstein L. N.* On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // *Tôhoku Math. J. (2).* — 1986. — Vol. 38, no. 2. — Pp. 219–230.

[65] *Vavilov N.* A third look at weight diagrams // *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.* — 2000. — Vol. 104. — Pp. 201–250.

[66] *Vavilov N., Plotkin E.* Chevalley groups over commutative rings. I. Elementary calculations // *Acta Appl. Math.* — 1996. — Vol. 45, no. 1. — Pp. 73–113.

[67] *Vavilov N. A.* Structure of Chevalley groups over commutative rings // Nonassociative algebras and related topics (Hiroshima, 1990). — World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991. — Pp. 219–335.

[68] *W. L. M.* Introduction to the subgroup structure of algebraic groups // Representations of reductive groups. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. — Publ. Newton Inst. — Pp. 129–149.

[69] *Wang D. Y., Li S. Z.* Overgroups of $L_1(F)$ in $L(F)$ // *J. China Univ. Sci. Tech.* — 1998. — Vol. 28, no. 3. — Pp. 264–269.

[70] *You H.* Overgroups of symplectic group in linear group over commutative rings // *J. Algebra.* — 2004. — Vol. 282, no. 1. — Pp. 23–32.

[71] *You H.* Overgroups of classical groups over commutative rings in linear group // *Sci. China Ser. A.* — 2006. — Vol. 49, no. 5. — Pp. 626–638.