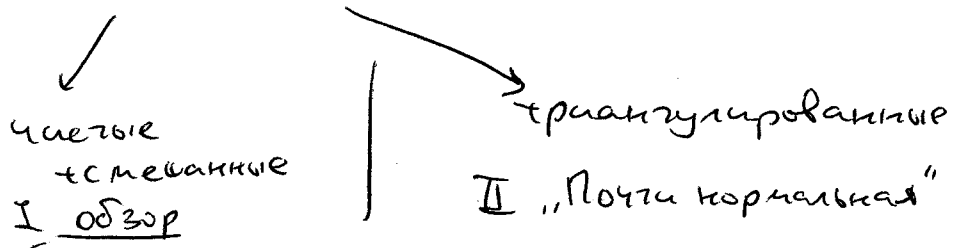


Мотивы



- I Чтобы вы что-то поняли о мотивах
- II Чтобы мотивы стали вам интересны
- III Чтобы стала интересна вся алгебра

Почему я не буду давать все определенья? Я их не знаю
 Триангулированные категории (см. Гельфанд - Манцин)

§ Гипотезы Вейля

Системы уравнений над конечным полем \mathbb{F}_q , $q = p^k$

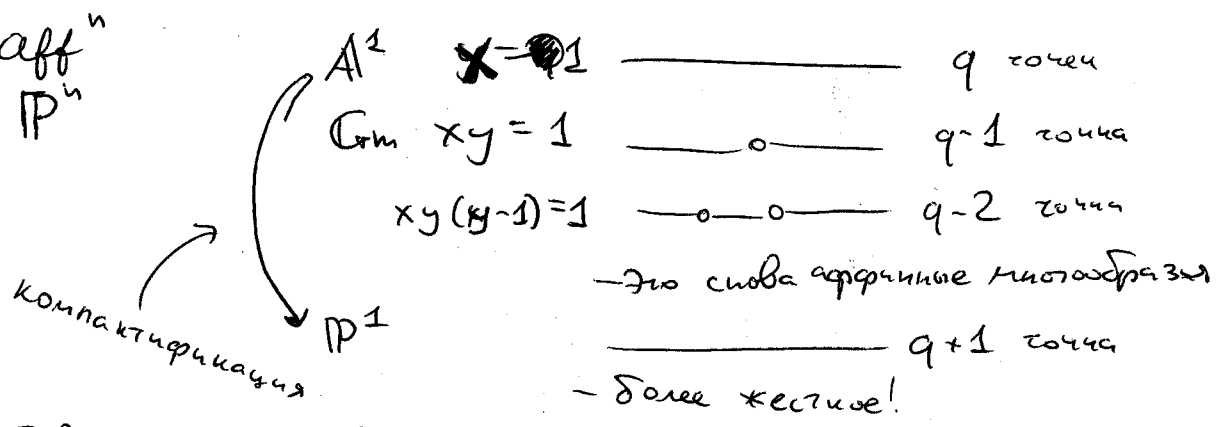
→ количество решений

потом - алгебраические многообразия

(проективные, в частности)

Что такое „кривая“? k неизвестных, $k-1$ уравнение

$V \subset \mathbb{A}^n$
 $V \subset \mathbb{P}^n$



потому будем рассматривать гладкие проективные многообразия

Оценка на число точек

первый негравитный случай - эллиптические кривые

$x^2 = P(y)$ - многочлен третьей степени без кратных корней,
 $p \neq 2, 3?$

$\# X(\mathbb{F}_q)$ - для простоты считаем $q = p$

$\# X(\mathbb{F}_{q^k})$ - функция от k

Что мы знаем про эту функцию?

Теорема

X - гладкое проективное, размерности d , связное абсолютно неприводимое?

$$\# X(\mathbb{F}_{q^k}) = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \sum_{j=0}^{h_i} a_{ij}^k$$

⑥ Эта сумма конечна

① $i=0, 2d$ ~ только $a_{i0} \neq 0$, при этом $a_{00} = 1, a_{2d,0} = q^d$

② (при подходящем выборе нумерации) $h_i = h_{2d-i}$ и

$$a_{2d-i,j} (= q^{d-i} a_{ij}) = \frac{q^d}{a_{ij}} a_{i, (h_i+1-j)}$$

③ a_{ij} - алгебраические числа, $|a_{ij}| = q^{i/2}$

↑ модуль ал. числа - точка + вес \mathbb{Q} :

Есть $[\mathbb{Q}(a_{ij}) : \mathbb{Q}]$ способов вложить a_{ij} в \mathbb{C} .

- имеют вид \pm все модули $|a_{ij}|$

Пример \mathbb{P}^d

$$\frac{\mathbb{A}^{d+1} \setminus \{0\}}{\mathbb{C}^*}$$

мотив - универсальная хорошая

теория когомологий

на простом языке - куски многообразий

$$\frac{q^{d+1} - 1}{q - 1} = q^d + q^{d-1} + \dots + q + 1$$

точек

$$\mathbb{P}^d = \mathbb{A}^d \cup \mathbb{A}^{d-1} \cup \dots \cup \mathbb{A}^1 \cup \text{pt}$$

В этом случае $h_i = 0$, если i нечетно

$h_i = 1$, если i четно

$$a_{i1} = q^{i/2}, \text{ если } i \text{ четно.}$$

Что происходит для кривых?

$d=1 \rightsquigarrow i=0, 1, 2$. При $i=0$ и 2 все понятно:

$$h_0 = h_2 = 1, h_1 = 2g$$

↑ род кривой алгебра

↑ топология

Если бы это было над \mathbb{C} :

гладкое многообразие \rightsquigarrow многообразие

- это компактные ориентируемые многообразия без края.

проективное (собственное) \rightsquigarrow без края компактное

$\rightarrow g$ - число ручек

Над \mathbb{R} ручек нет, а g есть.

конечным числом

для \mathbb{P}^1 $g=0$

для эллиптической $g=1 \rightarrow h_1=2$

Вообще, можно рассмотреть $P_i = \prod_{j=1}^{h_i} (x - a_{ij})$,

тогда условие 2. теоремы переписывается на человеческом языке как связь P_i и P_{2d-i}

так вот, $P_1(x) = x^2 + cx + q$, дискриминант ≤ 0 (его корни — a_{ij})

Формула Лершеца (fixed point formula)

X задается уравнениями над \mathbb{F}_q

$$x \in X(\mathbb{F}) \text{ , т.е. } \begin{cases} M_i(x) = 0 \\ \text{равносильно } (M_i(x))^q = 0 \end{cases}$$

↑ алгебр. замкнутые ↑ многочлены

Что происходит с M_i ?

Было, скажем, $x + cy = 0$, $c \in \mathbb{F}_q$

Стало: $x^{q^k} + \underbrace{c^{q^k}}_c y^{q^k} = 0$

Возведение в степень q — это Фробениус: $F_{r,q} = Fr$

$$\text{то есть, } x \in X(\mathbb{F}) \iff (Fr_q)^k(x) \in X(\mathbb{F})$$

$\uparrow Fr^k$ — морфизм

$$x \in X(\mathbb{F}_q^k) \iff (Fr)^k(x) = x$$

Как посчитать число неподвижных точек? В классическом случае:

$$\# X^T = \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i \text{Tr}(H^i(T))$$

↑ "уловное" количество точек

H^i — коинвариантный функтор:

$$H^i: \text{Man}^{\text{op}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}}^{\text{fin}}$$

↓ ↙ ↘
 и/л в.п.

$$H^i(T): H^i(X) \rightarrow H^i(X)$$

проблема с кратностями

Если пересечение диагональ с графиком T трансверсально, то все работает.

Слабая формулировка: если правая часть $\neq 0$, то неподвижные точки есть.

Из этой формулы видно, что для $T = Fr^k$ возникают k -ые степени собственных чисел.

§ Свойства этальных когомологий.
Теория когомологий Вейля

Идея в топологии: сопоставить пространству цепочной комплексу абелевы группы, часто даже пространства над полем (у нас \mathbb{Q})
 $C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \rightarrow \dots$ - комплекс: $d^2 = 0$

(иногда бывают и отрицательные члены: $\dots \rightarrow C^{-2} \rightarrow C^{-1} \rightarrow \dots$)

когомологии: $H^i = \text{Ker } d^i / \text{Im } d^{i-1}$, $h^i = \dim H^i$

инвариант комплекса \sim инвариант многообразия

C^i часто бесконечномерны, а H^i ведут себя лучше.

Идея: посчитать X^T внутри $X * X$ как пересечение:

$X^T = \Delta \cap \Gamma_T$ (основа хорошее многообразие)

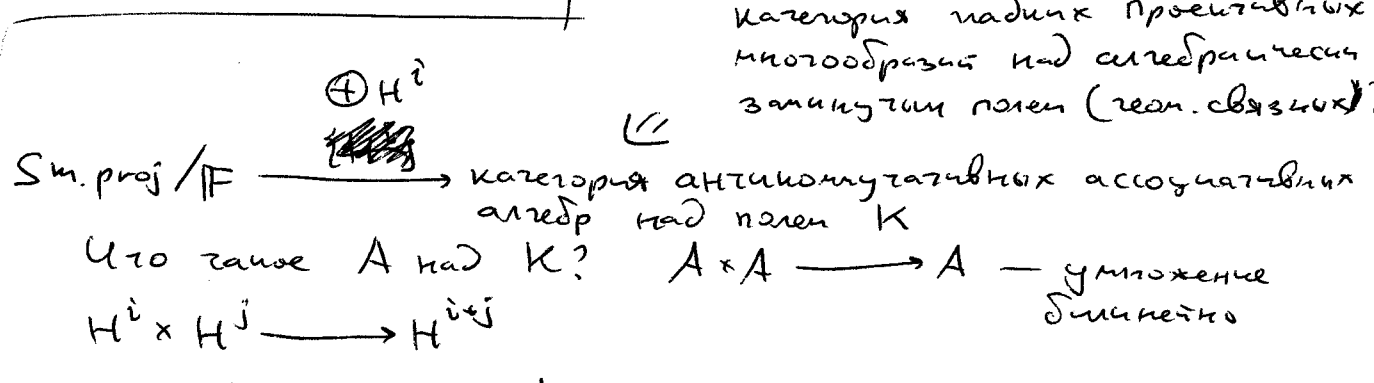
Какие свойства теории когомологий позволяют это посчитать?

① H^i - конечномерные пространства над полем K , $\text{char } K = 0$.

② $H^i \neq \{0\} \Rightarrow 0 \leq i \leq 2d$

Sim. proj. / \mathbb{F}

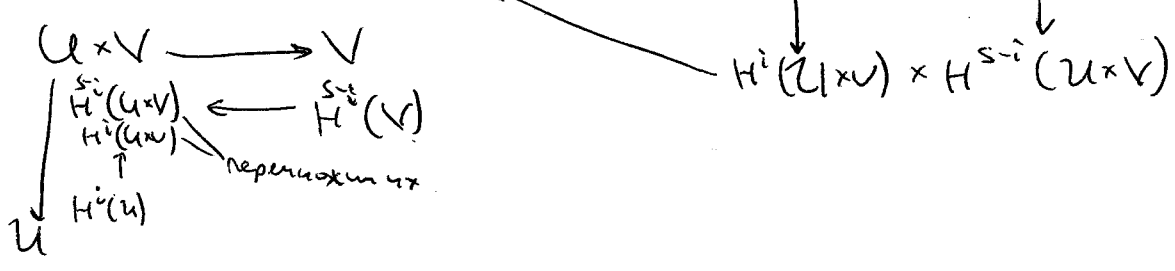
категория модулей проективных многообразий над алгебраическим замкнутым полем (геом. связки?)



② $H^i \times H^{2d-i} \longrightarrow H^{2d}$ - двойственность Пуанкаре
 $h^{2d} = 1$, и это невырожденная линейная форма.

③ Формула Кюннета:

$U, V \quad H^s(U \times V) = \bigoplus_{i=0}^s H^i(U) \otimes H^{s-i}(V)$



④ \exists функторциальный гомоморфизм $Cl: Chow^s(X) \rightarrow H^{2s}(X)$
 $\forall s, 0 \leq s \leq d$ с хорошими свойствами

Cl -cycle class

Что такое $Chow(X)$? свободная абелева группа, порожденная \dots ,
 прообразы \dots

Образующие: $Z \subset X$: Z неприводимое замкнутое
 подмногообразие размерности d

Соотношения: рациональная эквивалентность $(\dim X - \dim Z)$

$$Chow^0 \cong \mathbb{Z}$$

$$Chow^1 = ClDiv = Pic(X)$$

Когомологические теории, удовлетворяющие этим свойствам,
 называются когомологическими теориями Вейля.

Как из этого выводится ф-ла Лефшеца?

Об этом в следующий раз.

$$Chow^{s_1} \times Chow^{s_2} \longrightarrow Chow^{s_1+s_2} \quad \text{— мультипликативное}$$

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \rightsquigarrow Chow$ — коммутативное кольцо

Взяли Z_1, Z_2 , произведение должно соответствовать
 их пересечению. Пересечение должно быть почти трансверсально

$Z_1 \cap Z_2$ состоит из нескольких компонент

если для каждой компоненты пересечение Z_1 и Z_2 в ней
 трансверсально — совсем хорошо

если где-то пересекаются с касанием,

но компоненты правильной размерности — еще ничего

если посылить так, что размерности выше — совсем плохо

$Z_1 \cap Z_2 =$ формальная сумма компонент

касаний нет \rightsquigarrow все с коэффициентами 1

~~есть~~ \rightsquigarrow нужно смотреть на кратности пересечений
 совсем плохой случай \rightsquigarrow использовать рац. эквивалентность

⑤
$$\begin{matrix} X \\ \downarrow \\ Z \end{matrix} \subseteq \begin{matrix} \mathbb{P}^n \\ \text{or} \\ \mathbb{P}^{n-1} \end{matrix} \quad X \cap \mathbb{P}^{n-1} = Z \quad \text{— гиперплоское сечение } X.$$

Z гладкое (хотя не обязательно)

$$H^i(X) \longrightarrow H^i(Z) \quad \text{— изоморфизм при } i < \dim Z = d-1 \\ \text{равенство при } i = \dim Z = d-1$$

т.е. гиперплоское сечение помнит половину когомологии

(а если Z гладкое, то по двойственности Пуанкаре — все, кроме середины)

Уже можно посчитать количество точек на гладкой гиперповерхности в \mathbb{P}^N

$$\textcircled{6} \quad Z \in \text{Schw}^1 \rightsquigarrow E = \text{Cl}(Z) \in H^2$$

$\forall i \quad H^i$ двойственно H^{2d-i} — знамен

Умножение H^i на E^{d-i} задает изоморфизм $H^i \rightarrow H^{2d-i}$

ℓ -приме, $\rightsquigarrow H_e^{i, \ell}$ — ℓ -адические этажные кохомологии
 $\ell \neq p$ — в.п. над \mathbb{Q}_ℓ

$\text{Str } \rho_j \rightsquigarrow$ этажные кохомологии для каждого ℓ

\rightsquigarrow получаются соответствующие операторы над \mathbb{Q}_ℓ
 $\rightsquigarrow \ell$ -адические

$$H_e^{i, \ell} \cong H_a^{i, \text{sing}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell$$

Невозможно пропустить все этажные кохомологии. через одну?
ответ — "а хрен его знает"